Ignasi Mundet i Riera: Nociones básicas de

Teoría geométrica de representaciones

CRM, 29/05/09

(notas por Luis Álvarez Cónsul)

NOTACIÓN:

$G =$ grupo de Lie$/\mathbb{C}$ semisimple

$\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$

$\mathfrak{h} =$ subálgebra de Cartan $\subset \mathfrak{g}$

$H =$ toro complejo $\subset G$ con $\operatorname{Lie} H = \mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{(descomposición de Cartan)}$$

$\Phi = \{\text{raíces}\} := \{\alpha \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} \subset \mathfrak{h}^*$

$\Delta = \{\text{raíces simples}\} \subset \Phi$, $\Phi^+ = \{\text{raíces positivas}\} \subset \Phi$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in-\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^-} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{n}^-$$

($\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n}^-$ son subálgebras nilpotentes)

$\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ retículo de pesos (generado sobre $\mathbb{Z}$ por las raíces)

$B \subset G$ subgrupo de Borel con $\operatorname{Lie} B = \mathfrak{b} := \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$

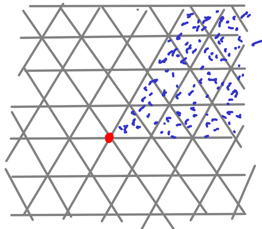
Ejemplo $G = SL(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{ con } \operatorname{tr} = 0 \right\} \subset \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} \ddots & & \pm 1 & \\ & \ddots & & \\ & \mp 1 & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \right\},\ \Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\},\ \Phi^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z} \right\},\ B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \subset SL(3,\mathbb{C})$$

$W = N(H)/H$ grupo de Weyl, $W \circlearrowright \mathfrak{h}^*$ (por definición)

$\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}$ dominio fundamental

Ejemplo $\Lambda =$  — Λ^+ para $SL(3,\mathbb{C})$

Representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\dim V < \infty$: $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ (pesos para la acción de H)

Teorema de Borel-Weil:

$\lambda \in \Lambda^+ \overset{\exp}{\rightsquigarrow} \chi : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times \rightsquigarrow \hat{\chi} : B \longrightarrow H \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$

corresponde a la proy. $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$

e.g. $B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \to H = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ para $SL(3,\mathbb{C})$

"olvidar componentes"

Fibrado de línea holomorfo $L_\chi := G \times_{\hat{\chi}} \mathbb{C}$ — la acción de G en G/B levanta a acción canónica en L_χ

$\downarrow$

G/B — variedad compleja compacta

Thm (BW) $H^0(G/B, L_\chi)$ es la representación irreducible ('irrep') de G con peso maximal λ. Además $H^k(G/B, L_\chi) = 0$ para $k > 0$.

[Bott extiende este teorema a $\lambda \in \Lambda$ que no están en Λ^+ $\rightsquigarrow$ usar $\ell(w)$.]

Dado $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, su **carácter** es $\mathrm{ch}\, V := \sum \dim V_\lambda \underbrace{e(\lambda)}_{} \in \mathbb{Z}\Lambda$

función indicatriz de $\lambda \in \Lambda$, ie $\Lambda \to \mathbb{Z} : \mu \mapsto \delta_{\lambda \mu}$

La acción natural $H \circlearrowright G/B$ tiene puntos fijos aislados.

Hay una biyección $\{\text{ptos fijos}\} \longleftrightarrow W$.

La fórmula de Atiyah-Bott nos da (en este caso) el carácter de V en términos de los ptos fijos .... lo que conduce a la fórmula de Weyl.

Representaciones de álgebras de Lie (dim infinita)

$$\{\mathfrak{g}\text{-módulos } \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(N)\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \{U(\mathfrak{g})\text{-módulos (por la izda.)}\}$$

donde el álgebra envolvente es el álgebra asociativa

$$U(\mathfrak{g}) = \underbrace{T\mathfrak{g}}_{\text{álgebra tensorial}} / \langle a \otimes b - b \otimes a - [a,b] \rangle$$

Thm (Poincaré-Birkhoff-Witt): Sea $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ base de $\mathfrak{g}$.
Entonces $\{\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_s} \mid i_1 \leq \cdots \leq i_s\}$ es base de $U(\mathfrak{g})$.

Corolario: $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$

Categoría $\mathcal{O}$ de Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG)

Subcategoría plena de $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ cuyos objetos son los $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos M tq

- M es f.g. como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo
- M es $\mathfrak{h}$-semisimple: $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$
- $\forall v \in M$, $\mathcal{U}(\mathfrak{n}) v \subset M$ tiene dim finita

Consecuencias (i) $\dim M_\lambda < \infty \quad \forall \lambda$

(ii) $\{\lambda \mid M_\lambda \neq 0\}$ está contenido en una unión finita de conjuntos de la forma $\lambda - \Gamma$, donde $\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Phi^+)$.

Dado $M \in \mathcal{O}$, $v \in M_\lambda$ se llama elemento de peso maximal si $\mathcal{U}(\mathfrak{n}) v = 0$.

M es un módulo de peso maximal si $\exists v \in M$ elemento de peso maximal tq $M = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) v$.

Módulos de Verma: Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, sea $\mathbb{C}_\lambda$ el espacio vectorial $\mathbb{C}$ con la estr. de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-módulo dada por el carácter $\underset{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}}{\overset{\|}{\mathfrak{b}}} \twoheadrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$.

El módulo de Verma de peso λ es $M(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$.

$M(\lambda)$ tiene un submódulo propio maximal $N(\lambda) \subset M(\lambda)$ (ya que $M(\lambda) = \underset{\underset{\mathbb{C}}{\parallel}}{M_\lambda} \oplus \bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \\ \mu \neq \lambda}} M_\mu$).

i.e.: $\forall \alpha \in \Delta$, $\langle \lambda - \mu, \alpha \rangle \geq 0$

Se define $\underbrace{L(\lambda)}$ $:= M(\lambda)/N(\lambda)$ = único cociente simple de $M(\lambda)$

'piezas fundamentales' de $\mathcal{O}$

(es un submódulo de peso maximal)

Thm: (1) $\dim L(\lambda) < \infty \iff \lambda \in \Lambda^+$

(2) $\left.\begin{array}{l} L(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\mu \\ \dim L(\lambda) < \infty \end{array}\right\} \iff \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$ $\quad \forall w \in W$

$$U(\mathfrak{g}) \overset{\text{PBW}}{\cong} U(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$$

Def de ξ: $Z(\mathfrak{g}) := Z(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\xi} U(\mathfrak{h})$

(centro de $U(\mathfrak{g})$)

morfismo de álgebras

Componiendo $\mathcal{E}$ con $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) : p(\lambda) \mapsto p(\lambda - \rho)$ (con $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha$), obtenemos el morfismo de Harish-Chandra: ↑ polinomio en $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

álgebra simétrica

$$\phi : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ es el álgebra simétrica porque $\mathfrak{h}$ es abeliano

Thm (Harish-Chandra): (1) ϕ induce un isomorfismo $Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\phi} S(\mathfrak{h})^W$.

(2) $Z(\mathfrak{g})$ actúa en $L(\lambda)$ con carácter $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\phi} S(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{C}$

morfismo inducido por $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$

(3) $\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \lambda = w \bullet \mu := w(\mu + \rho) - \rho$ con $w \in W$.

acción afín de W

Corolario: $\mathcal{O}$ es artiniana. [Nota: $\mathcal{O}$ es obviamente noetheriana.]

Por tanto, en el grupo de Grothendieck $K(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$:

$$[M(\lambda)] = \sum_{\mu \in W \bullet \lambda} a_{\lambda\mu} [L(\mu)]$$

acción afín

con: $a_{\lambda\lambda} = 1$, $(a_{\lambda\mu})$ forma matriz triangular de tamaño finito:

$\mu > \lambda \Rightarrow a_{\lambda\mu} = 0$

$\therefore$ La matriz $(a_{\lambda\mu})$ es invertible $\Longrightarrow$ podemos escribir

$$[L(\mu)] = \sum b_{\lambda\mu}[M(\lambda)]$$ (lo cual vale para todo μ, no necesariamente en Λ^+).

Definimos $p : \Lambda \to \mathbb{Z} : \lambda \mapsto \# \left\{ (c_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \,\middle|\, \begin{array}{l} c_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \lambda = -\sum c_\alpha \alpha \end{array} \right\}$ ("función de partición"),

de modo que $p \in \mathbb{Z}\Lambda$. Entonces $\mathrm{ch}\, M(\lambda) = p \cdot e(\lambda)$, pues (producto en $\mathbb{Z}\Lambda$)

$M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)v^+$, donde $v^+ =$ generador de $M_\lambda \cong \mathbb{C}$.

Sea $q = \prod_{\alpha\in\Delta} \left(e(\alpha/2) - e(-\alpha/2) \right)$.

Thm (Weyl): Dado $\lambda \in \Lambda^+$, $q \cdot \mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} e(w(\lambda+\rho))$.

Demo: La función de partición puede escribirse $p = \prod_{\alpha\in\Delta} \frac{1}{1-e(-\alpha)} = \prod_{\alpha\in\Delta} \frac{e(\alpha/2)}{e(\alpha/2)-e(-\alpha/2)}$

También podemos escribir $\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} b_{\lambda\mu}\, \mathrm{ch}\, M$, luego

$$\underbrace{\underbrace{q}_{W\text{-antisimét.}}\cdot \underbrace{\mathrm{ch}\, L(\lambda)}_{W\text{-simétrico}}}_{W\text{-antisimétrico}} = \sum_{w\in W} b_{\lambda, w\cdot\lambda}\, q\cdot p\, e(w\cdot\lambda) = \sum_{w\in W} \underset{\nwarrow (-1)^{\ell(w)}}{b_{\lambda, w\cdot\lambda}}\, e\big(\underbrace{w\cdot\lambda+\rho}_{w(\lambda+\rho)}\big)$$

$$\xRightarrow{\text{(inducción)}} b_{\lambda w\cdot\lambda} = (-1)^{\ell(w)} b_{\lambda,\lambda} = (-1)^{\ell(w)}. \ \blacksquare$$

Problema (Kazhdan-Lusztig): encontrar coeficientes $b_{\lambda\mu}$ para repr. de dim. ∞.

Conjeturas / polinomios de Kazhdan-Lusztig ...

Resuelto por Beilinson & Drinfeld y por Brylinski & Kashiwara (usando $\mathcal{D}$-módulos y haces perversos, álg. de Hecke ...).

PARA SABER MÁS libros:

- J.E. Humphreys, Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$ (2008)
- R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki, D-modules, perverse sheaves and representation theory (2008).