Funciones L aritméticas

Pilar Bayer

•

2010 Introducción al Programa de Langlands aritmético

•

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

•

Barcelona, 14 de enero de 2010

Representación de grupos

G grupo topológico, F cuerpo topológico

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}(V) \simeq \mathsf{GL}(n, F) \quad \text{representación contínua}$$

$\mathsf{Rep}_n(G; F)$ clases de representaciones de dimensión n

G grupo finito; grupo profinito; grupo localmente profinito

Ejemplos: $G = S_m$, $\mathsf{GL}(m, \mathbb{F}_q)$; $G_K := \mathsf{Gal}(\overline{K}|K)$; $\mathsf{GL}(m, \mathbb{Q}_p)$

$$F = \mathbb{C},\ \ \overline{\mathbb{Q}}_\ell,\ \ \overline{\mathbb{F}}_\ell$$

Representación de grupos finitos

$\mathsf{Rep}(G;\mathbb{C}) = \cup_{n\geq 1}\mathsf{Rep}_n(G;\mathbb{C})$ categoría semisimple:

Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.

Carácter de una representación

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}(n,\mathbb{C}), \quad \chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_\rho(g) := \mathsf{tr}(\rho(g)), \quad g \in G$$

$\chi_\rho(1) = n, \quad \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \quad \chi_\rho(ugu^{-1}) = \chi_\rho(g), \quad g, u \in G$

$\chi_{\rho_1\oplus\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}, \quad \chi_{\rho_1\otimes\rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$

$$\rho_1 \simeq \rho_2 \Leftrightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$$

Notación: $[g] = \{ugu^{-1}; u \in G\}$, $\Phi(G) = \{[g] : g \in G\}$, si G es finito.

Restricción de representaciones

Dados $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$, $\quad H < G$, $\quad \mathsf{Res}_H^G \rho : H \to \mathsf{GL}(V)$

Inducción de representaciones

Dada $\rho : H \to \mathsf{GL}(W)$, $\quad \mathsf{Ind}_H^G \rho : G \to \mathsf{GL}(V)$, $\quad V = \bigoplus_{s \in G/H} sW$,

$g \cdot \sum s_i w_i := \sum s_{j(i)} \rho(h_i) w_i$; $\quad \mathsf{Reg}_\mathsf{G} = \mathsf{Ind}_1^\mathsf{G} 1$

Fórmula de reciprocidad de Frobenius

$$\langle u, v \rangle_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} u(g) \overline{v}(g), \quad u, v \text{ funciones de clase}$$

$$\langle \psi, \mathsf{Res}_H^G \chi \rangle_H = \langle \mathsf{Ind}_H^G \psi, \chi \rangle_G$$

Tablas de caracteres de algunos grupos finitos

C_3	$1A$	$3A$	$3B$
$\sharp$	1	1	1
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

G abeliano $\Rightarrow \widehat{G} \simeq G$

S_4	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$4A$
$\sharp$	1	3	6	8	6
$\chi_1 =$ trivial	1	1	1	1	1
$\chi_2 =$ signo	1	1	-1	1	-1
$\chi_3 =$ proy S_3	0	2	0	-1	0
$\chi_4 =$ permutación	3	-1	-1	0	-1
$\chi_5 = \chi_2\chi_4$	3	-1	1	0	1

Las tablas son cuadradas.

Representaciones de grupos lineales finitos $(n = 2)$

$G = \mathsf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$, $q = p^f$, $\qquad |\Phi(G)| = q^2 - 1$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in G \right\}, \quad \text{subgrupo de Borel}$$

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G \right\} \simeq (\mathbb{F}_q, +), \quad \text{radical unipotente de } B$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in G \right\} \simeq \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*, \quad \text{toro maximal de } G, \quad B = N \rtimes T$$

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in G \right\} \simeq \mathbb{F}_q^*, \quad \text{centro de } G$$

La serie principal de $G = \mathsf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$

$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in G, \quad \{1, w\} = B \setminus G/B, \quad G = B \cup BwB$ Bruhat

$\chi_i : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}^*$, $i = 1, 2$; $\quad \chi_T := \chi_1 \otimes \chi_2 : \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(b)$;

pr : $B \to B/N \simeq T, \chi := \chi_T \circ$ pr; $\quad \mathsf{Ind}_B^G\chi$ es irreducible $\Leftrightarrow \chi \neq \chi^w$

$\mathsf{Ind}_B^G 1_B = 1_G \otimes \mathsf{St}_G$, $\quad$ dim$\mathsf{St}_G = q$, Steinberg

- Serie principal = {componentes irreducibles de $\mathsf{Ind}_B^G\chi$}

|serie principal|$= \frac{1}{2}(q^2 + q) - 1$; $\qquad$ faltan $\frac{1}{2}(q^2 - q)$

Representaciones cuspidales de $G = \mathsf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$

$\theta : \mathbb{F}^*_{q^2} \to \mathbb{C}^*,\ \theta^q \neq \theta,$ carácter regular, $\mathbb{F}^*_{q^2} \hookrightarrow E \subseteq G$

$\psi : N \to \mathbb{C}^*,$ carácter no trivial

$\theta_\psi : ZN \to \mathbb{C}^*,$ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} u \mapsto \theta(a)\psi(u),$ $a \in \mathbb{F}^*_q,\ u \in N$

• Toda representación π de G irreducible y cuspidal es de la forma

$$\pi_\theta = \mathrm{Ind}_{ZN}^{G} \theta_\psi - \mathrm{Ind}_E^G \theta, \quad \dim \pi_\theta = q - 1$$

• Toda representación irreducible de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ o es cuspidal o es de la serie principal.

Ley de reciprocidad de Langlands (GL(n), 1967)

K cuerpo de números

- Parte automorfa

Ciertas representaciones $\pi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ se parametrizan por

- Parte aritmética

Ciertas representaciones $\rho : G_K \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Dificultades: GL($n, \mathbb{A}_K$) no es un grupo compacto;
G_K es demasiado pequeño.

Ley de reciprocidad de Langlands (GL(n), 1967)

K cuerpo de números

- Parte automorfa

Ciertas representaciones $\pi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ se parametrizan por

- Parte aritmética

Ciertas representaciones $\sigma : W_K \to {}^L\mathrm{GL}_{n,K} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Programa de Langlands aritmético $\rightsquigarrow$ *Las tablas son cuadradas.*

Un ejemplo local

(Bargmann, 1947, *Irreducible unitary representations of the Lorenz group*)

$W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*$, $\quad j^2 = -1$, $\quad ji = -ij$, $\; jzj^{-1} = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\{\text{Clases de representaciones unitarias de } W_{\mathbb{R}} \text{ en } \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\}$$

$$\leftrightsquigarrow$$

$$\{\text{Clases de representaciones temperadas de } \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\}$$

1. $j \to \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $z \to \pm \begin{bmatrix} |z|^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & |z|^{i\lambda_2} \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \mathbb{R} \leftrightsquigarrow$ Serie principal unitaria esférica

2. $j \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $z \to \begin{bmatrix} |z|^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & |z|^{i\lambda_2} \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \leftrightsquigarrow$ Serie principal unitaria no esférica

3. $j \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^l & 0 \end{bmatrix}$, $z = |z|e^{i\theta} \to \begin{bmatrix} |z|^{i\lambda}e^{i\ell\theta} & 0 \\ 0 & |z|^{i\lambda}e^{-i\ell\theta} \end{bmatrix}$, $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}, \lambda \in \mathbb{R} \leftrightsquigarrow$ Serie discreta

Motivación aritmética

• Funciones L aritméticas: $L(\rho, s), L(\sigma, s)$

1. Poseen productos de Euler convergentes en semiplanos $\Re(s) \gg 0$.
2. Reflejan propiedades aritméticas de cuerpos de números, de variedades aritméticas, de motivos.
3. Proporcionan información aritmética en puntos en los que el producto de Euler no está definido!

• Funciones L automorfas: $L(\pi, s)$

1. Están definidas en $\mathbb{C}$.
2. Deberían proporcionan prolongaciones analíticas de funciones L aritméticas.

Representaciones de Galois complejas

$[K:\mathbb{Q}] < \infty$

$\rho : G_K \to \mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ representación contínua $\Rightarrow |\mathrm{Im}(\rho)| < \infty$

Elementos de Frobenius, v primo de K

$$K_v \simeq \begin{cases} \mathbb{R},\ \mathbb{C}, & \text{caso arquimediano} \\ [K_v:\mathbb{Q}_p] < \infty, & \text{caso ultramétrico, } q_v = p^f = |\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v| \end{cases}$$

$L|K$ finita y de Galois, $G = \mathrm{Gal}(L|K)$, $\overline{v}|v$, $\mathrm{Fr}_{\overline{v}} \in G_{\overline{v}} = \mathrm{Gal}(L_{\overline{v}}|K_v)$

$G_{\overline{v}}/I_{\overline{v}} \simeq (\mathrm{Fr}_{\overline{v}})$, $\mathrm{Fr}_v = [\mathrm{Fr}_{\overline{v}}] = \{\mathrm{Fr}_{\overline{v}}\}_{\overline{v}|v} \subseteq G$, clase de conjugación

Funciones L de Artin (1923)

$\rho : G_K \to \mathsf{GL}(V) \simeq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$, contínua, K cuerpo de números

Existe $L|K$ finita y de Galois tal que

$\rho : G = \mathsf{Gal}(L/K) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$,

$L_v(\rho, s) := \det\left(1 - \rho(\mathsf{Fr}_{\overline{v}}) q_v^{-s} | V^{I_{\overline{v}}}\right)^{-1}$, si v es ultramétrico, $s \in \mathbb{C}$

$L(\rho, s) = \prod_v L_v(\rho, s)$, $\Re(s) > 1$, conv. uniforme sobre los compactos

Primeras propiedades de las funciones L de Artin

- Aditividad:

$$L(\rho_1 \oplus \rho_2, s) = L(\rho_1, s)L(\rho_2, s)$$

- Inducción: Si $K \subseteq L \subseteq M$, $H = \mathsf{Gal}(M|L)$, $G = \mathsf{Gal}(M|K)$,

$$L(\mathsf{Ind}_H^G \rho_H, s) = L(\rho_H, s)$$

- Inflación: Si $H \lhd G$, $\mathsf{pr} : G \to G/H$, $\rho := \rho_{G/H} \circ \mathsf{pr}$,

$$L(\rho, s) = L(\rho_{G/H}, s)$$

Funciones L de Artin: casos particulares

$L(\rho, s) = \prod_v \det\left(1 - \rho(\mathrm{Fr}_{\overline{v}}) q_v^{-s} | V^{I_{\overline{v}}}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1$

1. Zeta de Riemann $\qquad L = K = \mathbb{Q}$, $\dim(\rho) = 1$, $\rho = 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

Fórmula explícita de Riemann:

$$\pi(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{1/n}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho/n}) + \mathcal{O}(1)$$

2. Zeta de Dedekind

$L = K$, $\dim(\rho) = 1$, $\rho = 1$, $[K : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{N(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad \Re(s) > 1$$

Fórmula del residuo:

$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_K(s) = \dfrac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_K \, |d_K|^{1/2}} h_K R_K$

3. Series L de Dirichlet $\quad \chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, carácter de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{(a,N)=1} \frac{\chi(a)}{a^s} = \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi(p)}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1,$$

• Interpretación como función de Artin

$K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, $\quad \iota : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)|\mathbb{Q})$, $\quad p \mapsto \mathrm{Fr}_p$, $\quad \mathrm{Fr}_p(\zeta_N) = \zeta_N^p$

$\rho = \chi \circ \iota^{-1}$, $n = 1$, $\quad L(\rho, s) = L(\chi, s)$

Kronecker-Weber: Las funciones L de Artin asociadas a extensiones abelianas de $\mathbb{Q}$ se expresan como producto de series L de Dirichlet.

Ecuación funcional de las series L de Dirichlet

$\chi : (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*,$ carácter de Dirichlet de conductor f

$$\Gamma(\chi, s) := \begin{cases} \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ \\ \pi^{-(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2), & \text{si } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

$$\Lambda(\chi, s) := f^{s/2}\Gamma(\chi, s)L(\chi, s)$$

$$\varepsilon(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{f}}, & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ -i\dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{f}}, & \text{si } \chi(-1) = -1 \end{cases} \qquad \tau(\chi) := \sum_{a=1}^{f} \chi(a) e^{\frac{2\pi i a}{f}}$$

$$\Lambda(\chi, s) = \varepsilon(\chi)\Lambda(\overline{\chi}, 1-s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{C}$$

Prueba de la ecuación funcional de las series L de Dirichlet

Consiste en escribir $L(\chi, s)$ "de otra manera".

Series theta

$$\theta(\chi, z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) n^p e^{\pi i n^2 z/f}, \quad \chi(-1) = (-1)^p,\ p \in \{0,1\},\ \Im(z) > 0$$

La función $\Lambda(\chi, s)$ admite la representación integral

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{f}\right)^{p/2} \int_0^\infty (\theta(\chi, iy) - \chi(0)) y^{(s+p)/2} \frac{dy}{y}, \quad \Re(s) > 1,$$

siendo $\chi(0) = 0, \text{si } \chi \neq 1; 1(0) = 1.$

La conjetura de Artin K cuerpo de números

Si $\rho : G = \mathsf{Gal}(L/K) \to \mathsf{GL}(V) \simeq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ es una representación irreducible y no trivial, la función

$$\Lambda(\rho, s) := A(\rho)^{s/2}\Gamma(\rho, s)L(\rho, s)$$

es *entera* y satisface una ecuación funcional de la forma

$$\Lambda(\rho, s) = W(\rho)\Lambda(\overline{\rho}, 1 - s), \quad W(\rho) \in \mathbb{C}^*, \quad |W(\rho)| = 1.$$

•

Posibles demostraciones: identificar las funciones L de Artin con otras funciones L (automorfas) de las que se conozca que son enteras y que satisfacen ecuaciones funcionales.

Las funciones L automorfas se han de poder obtener por integración de formas automorfas.

Caracteres de Hecke

$0 \neq \mathfrak{m}_f \subseteq \mathcal{O}_K \subseteq K$ un ideal, $\quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_f \mathfrak{m}_\infty, \qquad I_\mathfrak{m} = \{\mathfrak{a} : (\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_f) = 1\}$

$P_\mathfrak{m} = \{(\alpha) \in I_\mathfrak{m} \cap P : \alpha \equiv 1 \bmod (\mathfrak{m}_f),\ \alpha > 0 \bmod (\mathfrak{m}_\infty)\}, \quad U_\mathfrak{m} = P_\mathfrak{m} \cap \mathcal{O}_K^*$

$H_\mathfrak{m} = I_\mathfrak{m}/P_\mathfrak{m}$ grupo de clases radiales módulo $\mathfrak{m}$

$\xi_\infty : K^*/\mathbb{Q}^* \to \mathbb{C}^*$ un carácter unitario tal que $U_\mathfrak{m} \subseteq \ker(\xi_\infty)$

Carácter de Hecke de peso ξ_∞:

$\chi : I_\mathfrak{m} \to \mathbb{C}^*$ tal que $\chi((\alpha)) = \xi_\infty(\alpha)$, si $(\alpha) \in P_\mathfrak{m}$

Funciones L de Hecke

χ carácter de Hecke de K, de peso ξ_∞ y conductor $\mathfrak{f}$

$$L(\chi, s) := \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_f)=1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}, \quad \Re(s) > 1$$

$$\Lambda(\chi, s) := A(s)\Gamma(\xi_\infty, s)L(\chi, s)$$

Teorema (Hecke): Si $\chi \neq 1$ es un carácter de Hecke primitivo de K, la función $\Lambda(\chi, s)$ admite una prolongación analítica en una función entera y satisface una ecuación funcional

$$\Lambda(\chi, s) = \varepsilon(\chi)\Lambda(\overline{\chi}, 1 - s), \quad \varepsilon(\chi) \in \mathbb{C}^*, \quad |\varepsilon(\chi)| = 1, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{C}.$$

Prueba de la conjetura de Artin en el caso abeliano $(n = 1)$

Teorema. (Artin). Sea K un cuerpo de números. Sea $L|K$ una extensión abeliana y finita de grupo de Galois G y de conductor $\mathfrak{f}$. Sea $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ un carácter de G. Entonces existen un carácter de Hecke χ, de módulo $\mathfrak{f}$, tal que

$$\Lambda(\rho, s) = \Lambda(\chi, s), \quad \Re(s) > 1.$$

De hecho, se satisfacen las identidades locales entre factores de Euler:

$$\rho(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}) = \chi(\mathfrak{p}), \quad \text{para todo } \mathfrak{p} \in I_{K,\mathfrak{f}}.$$

Demostración. (**CFT, ley de reciprocidad de Artin**) Se tiene que

$$K \subseteq L \subseteq K^{\mathfrak{f}}, \quad I_{K,\mathfrak{f}}/P_{K,\mathfrak{f}} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathfrak{f}}|K), \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}. \square$$

El teorema de inducción de Brauer. (1947) Todo todo carácter de un grupo finito G es combinación lineal con coeficientes enteros de caracteres inducidos por representaciones de grado 1 de subgrupos de G.

Corolario. Dada $\rho : G_K \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\rho \neq 1$, la función $\Lambda(\rho, s)$ admite una prolongación en una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

Demostración. Si $\chi_\rho = \sum n_i \mathrm{Ind}_{\mathrm{H_i}}^{\mathrm{G}} \chi_{\rho_i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\dim \rho_i = 1$, se tendrá que

$$L(\rho, s) = \prod L(\rho_i, s)^{n_i}, \quad \Lambda(\rho, s) = \prod \Lambda(\rho_i, s)^{n_i},$$

por lo que la afirmación resulta ahora de la teoría de cuerpos de clases.

• Puesto que toda representación de un grupo superresoluble es monomial, la conjetura de Artin es cierta para las extensiones de Galois superresolubles (en particular, para las nilpotentes y las diedrales).

La conjetura de Artin en el caso $n = 2$

Los subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ se clasifican por su imagen en $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Esta imagen es isomorfa a uno de los grupos siguientes:

• un grupo cícliclo C_n,	Hecke
• un grupo diédrico D_{2n},	Hecke
• el grupo alternado A_4 (grupo tetraédrico),	Langlands
• el grupo simétrico S_4 (grupo octaédrico),	Tunnell
• el grupo alternado A_5 (grupo icosaédrico),	Taylor, Khare, etc.

Algunas aplicaciones de las funciones L de Artin

• Permiten descomponer las funciones zeta de Dirichlet:

$$\zeta_L(s) = \zeta_K(s) \prod_{\chi \neq \mathbf{1}} L(L|K, \rho_\chi, s)^{\chi(1)},$$

para toda extensión de Galois $L|K$ de cuerpos de números.

• Proporcionan teoremas de densidad

(de la progresión aritmética, Chebotarev, etc.).

• Intervienen en la demostración del FLT.

Teorema. (*Coronidis loco*) Sea $\chi : H_{K,\mathfrak{m}} = I_{K,\mathfrak{m}}/P_{K,\mathfrak{m}} \to \mathbb{C}^*$ un carácter de Hecke no trivial. La serie L de Hecke satisface que

$$L(\chi, 1) \neq 0.$$

Demostración. Puesto que $H_{K,\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathfrak{m}}|K)$, χ puede ser interpretado como el carácter de una representación ρ_χ de Galois. Excepto para un número finito de factors de Euler, las series $L(\chi, s)$ de Hecke y $L(K^{\mathfrak{m}}|K, \rho_\chi, s)$ de Artin coinciden y ninguna de las dos tiene un polo en $s = 1$. A partir de la igualdad

$$\zeta_{K^{\mathfrak{m}}}(s) = \zeta_K(s) \prod_{\chi \neq \mathbf{1}} L(K^{\mathfrak{m}}|K, \rho_\chi, s)^{\chi(1)},$$

y como que las dos funciones zeta de Dedekind tienen un polo simple en $s = 1$, se sigue que $L(K^{\mathfrak{m}}|K, \rho_\chi, 1) \neq 0$, para todo $\chi \neq 1$. Por tanto, $L(\chi, 1) \neq 0$.

Densidad de Dirichlet. Dados un cuerpo de números K y $M \subseteq I_K$, se define

$$\delta(M) := \lim_{s\to 1} \frac{\displaystyle\sum_{\mathfrak{p}\in M} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}{\log \dfrac{1}{s-1}}, \qquad 0 \leq \delta(M) \leq 1.$$

Teorema de densidad. (Chebotarev) Sea $L|K$ una extensión de Galois de cuerpos de números. Dado $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$, sea

$$P_{L|K}(\sigma) := \left\{\mathfrak{p} \in I_{K,S} : \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} = [\sigma]\right\}.$$

El conjunto $P_{L|K}(\sigma)$ tiene densidad de Dirichlet dada por

$$\delta(P_{L|K}(\sigma)) = \frac{\#[\sigma]}{[L:K]}.$$

Una ley de reciprocidad abeliana (Dirichlet, progresión aritmética)

$\mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)|\mathbb{Q}) \overset{\sim}{\leftarrow} (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, $\mathsf{T} = \mathsf{Table}[\mathsf{Prime}[n], \{n, 1, 50]\}$

```
[1]= {29, 43, 71, 113, 127, 197, 211,...}

[2]= {2, 23, 37, 79, 107, 149, 163, 191,...}

[3]= {3, 17, 31, 59, 73, 101, 157, 199, 227,...}

[4]= {11, 53, 67, 109, 137, 151, 179, 193,...}

[5]= {5, 19, 47, 61, 89, 103, 131, 173, 229,...}

[6]= {13, 41, 83, 97, 139, 167, 181, 223,...}
```

Una ley de reciprocidad no abeliana

$$f(X) = X^4 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X], \quad x_i \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$K_1 = \mathbb{Q}(x_1), \quad K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq S_4$$

$$\Phi(S_4) = \{1A,\ 2A,\ 2B,\ 3A,\ 4A\}, \quad 4! = 1 + 3 + 6 + 8 + 6$$

$p\mathcal{O}_1$	$\mathrm{Fr}_p(K\|\mathbb{Q})$	$\sharp$	δ	$p \quad (\neq 2, 43)$
$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1''\mathfrak{p}_1'''$	$1A$	1	$1/24$	173, 487, 619, 719, 827, 857, $\cdots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$	$2A$	3	$1/8$	47, 59, 79, 107, 181, 197, $\cdots$
$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2$	$2B$	6	$1/4$	c, 19, 37, 71, 113, 131, 137, 149, $\cdots$
$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$	$3A$	8	$1/3$	11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, $\cdots$
$\mathfrak{p}_4$	$4A$	6	$1/4$	3, 5, 7, 29, 61, 73, 89, 151, 163, $\cdots$

ρ_K : $\mathsf{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq S_4 \twoheadrightarrow S_3 \hookrightarrow \mathsf{GL}(2, \mathbb{C}^*)$

$L(\rho_K, s)$ se prolonga en una función entera

S_4 no admite representaciones irreducibles y fieles de dimensión 2:

$$S_4 < \mathsf{PGL}(2, \mathbb{C}), \quad S_4 \not< \mathsf{GL}(2, \mathbb{C})$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathsf{GL}(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathsf{PGL}(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & \widetilde{S}_4 & \longrightarrow & S_4 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\widetilde{S}_4 \longrightarrow S_4 = \mathsf{Gal}(K/\mathbb{Q}), \quad \widetilde{S}_4 \simeq \mathsf{Gal}(\widetilde{K}/\mathbb{Q}) \longrightarrow S_4 = \mathsf{Gal}(K/\mathbb{Q})$$

$\widetilde{S}_4$	$1\widetilde{A}, 2\widetilde{A}$	$4\widetilde{A}$	$2\widetilde{B}$	$3\widetilde{A}, 6\widetilde{A}$	$8\widetilde{A}, 8\widetilde{B}$
S_4	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$4A$

$\widetilde{K} = K(\sqrt{\gamma}) \quad \gamma = 3(x_1^3 x_2^2 - x_2^2 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2 + x_2) + x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_1$

Fr_p	$\sharp$	$\chi(\mathrm{Fr}_p)$	$\det(\mathrm{Fr}_p)$	$p \quad (\neq 2, 43)$
$1\widetilde{A}$	1	2	1	$487, 619, 719, \cdots$
$2\widetilde{A}$	1	-2	1	$173, 827, 857, \cdots$
$2\widetilde{B}$	12	0	-1	$c, 19, 37, 71, 113, 131, 137, \cdots$
$3\widetilde{A}$	8	-1	1	$11, 17, 53, 67, 97, 101, \cdots$
$4\widetilde{A}$	6	0	1	$47, 59, 79, 107, 181, 197, \cdots$
$6\widetilde{A}$	8	1	1	$13, 23, 31, 41, 83, 109, \cdots$
$8\widetilde{A}$	6	$i\sqrt{2}$	-1	$7, 29, 61, 89, 179, \cdots$
$8\widetilde{B}$	6	$-i\sqrt{2}$	-1	$3, 5, 73, 151, 163, \cdots$

$L(\rho_{\widetilde{K}}, s)$ se prolonga en una función entera.

Grupos de Weil

$$C_K = \begin{cases} K^*, & \text{si } K \text{ es un cuerpo local} \\ \\ \mathbb{A}_K^*/K^*, & \text{si } K \text{ es un cuerpo global} \end{cases}$$

$L|K$ extensión finita y de Galois; K cuerpo local o global

$$W_{L|K} = C_L \rtimes \mathrm{Gal}(L|K), \quad \alpha_{L|K} \in H^2(\mathrm{Gal}(L|K), C_L)$$

$$W_K = \varprojlim_L W_{L|K}$$

$$W'_K = \begin{cases} W_K, & \text{si } K \text{ es arquimediano o es global} \\ \text{grupo de Weil-Deligne}, & \text{si } K \text{ es ultramétrico} \end{cases}$$

Grupo de Weil-Deligne (caso ultramétrico)

K local ultramétrico, $\quad \overline{W}_K = G_K, \quad G = \mathsf{GL}_{n,K}$

$$W_K \longrightarrow W_K^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\sim} K^* \xrightarrow{|\ |_v} \mathbb{R}_+^*, \qquad w \mapsto \|w\|$$

$$W_K' = \mathbb{C} \rtimes W_K, \qquad (a_1, w_1)(a_2, w_2) = (a_1 + \|w_1\| a_2, w_1 w_2)$$

$\varphi : W_K' \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) = \widehat{G}$ homomorfismo (admisible)

$${}^L\mathsf{GL}_{n,K} = \widehat{G} \rtimes G_K$$

$r :\ {}^L G \to \mathsf{GL}(m, \mathbb{C})$, holomorfa en la primera variable

Morfismos admisibles (caso ultramétrico)

$\varphi = \varphi(\rho, N) : W'_K = \mathbb{C} \rtimes W_K \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$, homomorfismo admisible:

(i) φ es contínuo y holomorfo en la primera variable.

(ii) $\varphi(\mathbb{C})$ consta de matrices unipotentes.

(iii) $\rho = \varphi|_{W_K}$, $\rho(W_K)$ consta de matrices semisimples.

(iv) $N \in \mathsf{M}(n, \mathbb{C})$ es un endomorfismo nilpotente tal que

$\rho(w) N \rho(w)^{-1} = \|w\| N$, para todo $w \in W_K$.

Funciones L locales y constantes locales

K cuerpo local ultramétrico; $q = \sharp\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$

$\mathrm{Fr} \in W_K, \quad \|\mathrm{Fr}\| = q^{-1}$

$\varphi = \varphi(\rho, N) : W_K' = \mathbb{C} \rtimes W_K \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \quad$ homomorfismo admisible

$V(N) = \ker(N)$

$r : \ {}^L G = \widehat{G} \rtimes G_K \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}), \quad$ holomorfa en la primera variable

$L(\varphi, r, s) := \det(1 - (r \circ \varphi)(\mathrm{Fr}) q^{-s}; V(N)^I)^{-1}$

$\varepsilon(\varphi, r, s) = \varepsilon(r \circ \varphi, s)$

Existen definiciones *ad hoc* en el caso arquimediano.

L **grupos** (caso global)

K cuerpo de números

$G = \mathsf{GL}_{n,K}$ (grupo algébrico $\overline{K}$-reductivo definido sobre K)

$\widehat{G} = \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ (grupo de Lie reductivo y conexo)

$$^{L}G = \widehat{G} \rtimes \mathsf{Gal}(\overline{K}|K), \qquad ^{L}G_v = \widehat{G}_v \rtimes \mathsf{Gal}(\overline{K}_v|K_v),$$

$r : {}^{L}G \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ rep. holomorfa en la primera variable

$\varphi : W_K \to G(\mathbb{C}) \simeq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ homomorfismo admisible

$\Phi(G(K))$ clases de equivalencia de homomorfismos admisibles

Funciones L aritméticas

K cuerpo de números

$\varphi : W_K = C_K \rtimes G_K \to G(\mathbb{C}) \simeq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$, homomorfismo admisible

$\varphi = (\varphi_v) \in \Phi(G(K))$

$r : {}^L G = \widehat{G} \rtimes G_K \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$, $r = (r_v)$

$$\begin{aligned} L(\varphi, r, s) &:= L(r \circ \varphi, s) = \textstyle\prod_v L(r_v \circ \varphi_v, s) \\ \varepsilon(\varphi, r) &:= \varepsilon(r \circ \varphi) = \textstyle\prod_v \varepsilon(r_v \circ \varphi_v) \end{aligned}$$

• Las funciones L aritméticas globales están asociadas a representaciones admisibles complejas del grupo de Weil global.

Conjeturas globales de Langlands $\quad K$ cuerpo de números

$\Pi(K) := \{\pi : \mathsf{GL}(n, \mathbb{A}_K) \longrightarrow \mathsf{GL}(\mathcal{A}) :$ automorfas y cuspidales$\}$

(?) Existe un grupo $\mathbf{G}_{\Pi(K)}$, algebraico y reductivo sobre $\mathbb{C}$, tal que las classes d'equivalencia de sus representaciones

$$\sigma : \mathbf{G}_{\Pi(K)} \longrightarrow \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$$

están en correspondencia biyectiva con los elementos isobáricos de $\Pi(K)$.

(?) Existe un morfismo $W_K \longrightarrow \mathbf{G}_{\Pi(K)}(\mathbb{C})$ con imagen Zariski-densa.

(?) El teorema de densidad de Chebotarev se generaliza en una ley de distribución de las classes de conjugación $[\sigma(\mathsf{Frob}_v)]$ en $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Representaciones ℓ-ádicas

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{GL}(n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad \text{homomorfismo contínuo}$$

Ejemplos

- Fijadas inmersiones $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Repr. de Artin = Repr. ℓ-ádicas con núcleo abierto

- El carácter ciclotómico ℓ-ádico

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{GL}(1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell^*, \quad \sigma(\zeta) = \zeta^{\chi_\ell(\sigma)}, \quad \zeta \in \mu_{\ell^\infty}$$

- $E/\mathbb{Q}$ curva elíptica

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\varprojlim_r E[\ell^r]), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^1_{et}(E \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

es un $G_{\mathbb{Q}}$-módulo.

- $X/\mathbb{Q}$ variedad proyectiva y no singular

La acción natural de $G_{\mathbb{Q}}$ en la cohomología ℓ-ádica

$$H^i_{et}(X \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

proporciona representaciones ℓ-ádicas.

Leyes de reciprocidad locales $(\ell \neq p)$

Existe una equivalencia de categorías

$$\{\text{WD-Representaciones de } W_{\mathbb{Q}_p} \text{ sobre } \overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ que son } \ell\text{-enteras}\}$$

$$\leftrightsquigarrow$$

$$\{\text{Representaciones } \ell\text{-ádicas de } G_{\mathbb{Q}_p}\}$$

$(r, N) \leftrightsquigarrow (\mathrm{Fr}^n\sigma \mapsto r(\mathrm{Fr}^n\sigma)\exp(t_\ell(\sigma)N))$

Observación. (Grothendieck) La acción de la inercia salvaje $(\ell \neq p)$ es localmente trivial.

Problema. En el caso $\ell = p$, G_p admite muchas más representaciones p-ádicas.

Representaciones p-ádicas de Rham

$[K:\mathbb{Q}]<\infty$, $\quad \rho: G_K \to \mathsf{GL}(V) \simeq \mathsf{GL}(h,\mathbb{Q}_p)$

B_{dR} cuerpo de períodos p-ádicos de $G_{\mathfrak{p}} = \mathsf{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}})$

es completo por una valoración discreta; su cuerpo residual es $\mathbb{C}_p$

en él actúa $\mathsf{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}})$

$D_{dR}(V) := (B_{dR} \otimes_{K_{\mathfrak{p}}} V)^{G_{\mathfrak{p}}}$; en general: $\dim_{K_{\mathfrak{p}}} D_{dR}(V) \leq h$

Definición. ρ es de Rham $\Leftrightarrow$ $\dim_{K_{\mathfrak{p}}} D_{dR}(V) = h$.

Propiedades. $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{GL}(V)$, V subcociente $H^i_{et}(X \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(j)$

1. ρ es no ramificada fuera de un conjunto finito de primos.

2. $\rho_\lambda = \rho_{|D_\lambda}$, $\lambda|\ell$, es de Rham.

3. ρ es pura de peso $w = i - j$: existe un conjunto finito de primos S tal que, para todo $p \notin S$, cada valor propio α de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ satisface que

$$|\iota\alpha|_\infty = p^{w/2}, \quad \text{para todo } \iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

Las propiedades $1, 2$ se resumen diciendo que ρ es geométrica.

La conjetura de Fontaine-Mazur (1993)

(?) Dada una representación de Galois ℓ-ádica

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V), \quad \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V \leq \infty,$$

que sea geométrica, existen una variedad proyectiva y lisa $X/\mathbb{Q}$ y enteros $i \geq 0$, j, tales que ρ es isomorfa a un subcociente de

$$H^i_{et}(X \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(j).$$

En particular, ρ es pura de peso entero $w = i - j$.

"Las representaciónes de Galois ℓ-ádicas geométricas proviene de la geometría aritmética."

¿De dónde provienen todas estas variedades algebraicas aritméticas?

Variedades de Shimura (ejemplos)

(Resultados de Eichler, Shimura, Langlands,...)

F totalmente real, $\quad n = [F : \mathbb{Q}]$, $\quad \mathcal{O}_F$ anillo de enteros

$D \in \mathrm{Br}_2(F)$ álgebra de cuaternios totalmente indefinida

$\mathcal{O}_D \subseteq D$ un orden maximal

G grupo algebraico definido por $\mathcal{O}_D^*$: $\quad G(\mathbb{Q}) = D^*$

$\Gamma \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ subgrupo compacto y abierto, suficientemente pequeño

$\Gamma_\infty \subseteq G(\mathbb{R})$ subgrupo compacto

$\Delta = d_F d_D$

• $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma_\infty\Gamma$ es unión de un número finito de espacios analíticos, compactos, no singulares, de dimensión n.

• Existe un esquema $X(D,\Gamma) \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, propio y liso, tal que

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\Gamma_\infty\Gamma \xrightarrow{\sim} X(D,\Gamma)(\mathbb{C}).$$

• $\zeta(X(D,\Gamma),s) \approx \prod L(\pi,r,s-n/2)^{(m,\Gamma)}$

en donde π recorre todos los constituyentes de $\mathcal{A}$, los exponents son casi todos iguales a cero y r es una representación concreta de ${}^LG$.

• Si $n=1$, la función $\zeta(X(D,\Gamma),s)$ admite una prolongación analítica y satisface una ecuación funcional.