

Observabilidad y monitoraje en sistemas poblacionales. Aplicaciones

Inmaculada López García

Departamento de Matemáticas
Universidad de Almería

Madrid, 11 de mayo de 2015

- 1 Introducción
- 2 Concepto de Observabilidad
 - Sistemas de observación lineales
 - Sistemas de observación no lineales
- 3 Diseño del sistema observador
- 4 Aplicaciones
 - Modelo de pesca con zona de reserva
 - Modelo Lotka-Volterra
 - Cadena trófica
 - Modelo en una población celular afectada por radiación
 - Modelos en procesos genéticos
- 5 Referencias

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *"a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso."*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *"a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso."*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *“a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso.”*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *“a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso.”*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *“a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso.”*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *“a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso.”*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

1. Introducción

Problema de monitoreaje en un ecosistema con varias poblaciones: cuando observando unas componentes queremos reconstruir el estado de todo el sistema en función del tiempo. $\Rightarrow$ Sistema auxiliar llamado *observador* cuya solución tiende a la del sistema de partida.

Concepto de observabilidad: *“a partir de la observación de una o varias variables se puede recuperar el proceso de estado de todas las variables de la población, de manera única, sin determinar un método constructivo para obtener dicho proceso.”*

Lee y Markus (1971): Condición general suficiente para la observabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

López y otros (2003,2004): Aplicación a varios modelos en poblaciones genéticas y a modelos evolucionarios dependientes de las frecuencias.

Varga y otros (2003): Se consideraron modelos Lotka-Volterra.

Shamandy y otros (2005): Observabilidad de ecosistemas simples.

Sundarapandian (2002): Se desarrolló un estudio geométrico del diseño de un observador local para sistemas no lineales.

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación lineales

Teoría clásica de observabilidad de sistema lineales (Kalman, 1960):

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $T \in \mathbb{R}^+$, consideramos el siguiente *sistema de observación*

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

Definición 1.

El sistema de observación (1)-(2) se dice que es observable en $[0, T]$, si (considerando soluciones en $[0, T]$)

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= Ax^1, \quad \dot{x}^2 = Ax^2 \\ Cx^1 &= Cx^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^1 = x^2.$$

Teorema 2. (Kalman, 1960)

El sistema (1)-(2) es observable $\Leftrightarrow \text{rango}[C \mid CA \mid CA^2 \mid \dots \mid CA^{n-1}]^T = n$.

Los modelos dinámicos de poblaciones importantes en ecología son no lineales.

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación no lineales

Dados m, n enteros positivos, suponemos que las siguientes funciones

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

son continuamente diferenciables y para algún $x^* \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $f(x^*) = 0$ y $h(x^*) = 0$.

Consideramos el siguiente *sistema de observación*

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

$$y = h(x) \tag{4}$$

donde h es la *función de observación*.

Definición 3

El sistema de observación (3)-(4) se dice que es localmente observable en el equilibrio x^* en $[0, T]$, si para cualesquiera dos soluciones x^1, x^2 de (3) definidas en $[0, T]$, inicialmente suficientemente cerca de x^* ,

$$h(x^1) = h(x^2) \Rightarrow x^1 = x^2.$$

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación no lineales

Dados m, n enteros positivos, suponemos que las siguientes funciones

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

son continuamente diferenciables y para algún $x^* \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $f(x^*) = 0$ y $h(x^*) = 0$.

Consideramos el siguiente *sistema de observación*

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

$$y = h(x) \tag{4}$$

donde h es la *función de observación*.

Definición 3

El sistema de observación (3)-(4) se dice que es localmente observable en el equilibrio x^* en $[0, T]$, si para cualesquiera dos soluciones x^1, x^2 de (3) definidas en $[0, T]$, inicialmente suficientemente cerca de x^* ,

$$h(x^1) = h(x^2) \Rightarrow x^1 = x^2.$$

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación no lineales

Dados m, n enteros positivos, suponemos que las siguientes funciones

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

son continuamente diferenciables y para algún $x^* \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $f(x^*) = 0$ y $h(x^*) = 0$.

Consideramos el siguiente *sistema de observación*

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

$$y = h(x) \tag{4}$$

donde h es la *función de observación*.

Definición 3

El sistema de observación (3)-(4) se dice que es localmente observable en el equilibrio x^* en $[0, T]$, si para cualesquiera dos soluciones x^1, x^2 de (3) definidas en $[0, T]$, inicialmente suficientemente cerca de x^* ,

$$h(x^1) = h(x^2) \Rightarrow x^1 = x^2.$$

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación no lineales

Para formular una condición suficiente para la observabilidad local consideramos la linealización del sistema de observación (3)-(4), mediante el cálculo de las Jacobianas

$$A := f'(x^*) \quad y \quad C := h'(x^*).$$

Teorema 4. (Lee y Markus, 1971)

Suponemos que

$$\text{rango}[C \mid CA \mid CA^2 \mid \dots \mid CA^{n-1}]^T = n. \quad (5)$$

Entonces el sistema de observación (3)-(4) es localmente observable cerca del equilibrio x^* .

2. Concepto de Observabilidad. Sistemas de observación no lineales

Para formular una condición suficiente para la observabilidad local consideramos la linealización del sistema de observación (3)-(4), mediante el cálculo de las Jacobianas

$$A := f'(x^*) \quad y \quad C := h'(x^*).$$

Teorema 4. (Lee y Markus, 1971)

Suponemos que

$$\text{rango}[C \mid CA \mid CA^2 \mid \dots \mid CA^{n-1}]^T = n. \quad (5)$$

Entonces el sistema de observación (3)-(4) es localmente observable cerca del equilibrio x^* .

3. Diseño del sistema observador

Veamos cómo el estado completo de un sistema puede ser estimado a partir de la observación de alguna/s de sus componentes.

Definición 5

Dado $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ el sistema dinámico descrito por

$$\dot{z} = G(z, y), \quad (z \in \mathbb{R}^n) \quad (6)$$

se dice que es un observador exponencial local para el sistema de observación (3)-(4) si el sistema (3)-(4),(6) satisface

- i) Si $x(0) = z(0)$, entonces $x(t) = z(t)$, for all $t \geq 0$.
- ii) Existe un entorno V del equilibrio x^* de $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $x(0), z(0) \in V$, $\lim_{+\infty} (z - x) = 0$ exponencialmente.

3. Diseño del sistema observador

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama “estable” o “Hurwitz” si todos sus autovalores tienen parte real negativa.

Criterio de Routh-Hurwitz para $n = 2$:

Sea $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ el polinomio característico de A . Entonces A es Hurwitz $\Leftrightarrow a_1, a_2 > 0$.

Criterio de Routh-Hurwitz para $n = 3$:

Sea $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ el polinomio característico de A . Entonces A es Hurwitz $\Leftrightarrow a_1, a_2, a_3 > 0$ y $a_1a_2 > a_3$.

Teorema 6. Sundarapandian (2002)

Si el sistema (3) es Lyapunov estable en el equilibrio, y existe una matriz K tal que la matriz $A - KC$ es estable o Hurwitz. Entonces el sistema definido por

$$\dot{z} = f(z) + K[y - h(z)] \quad (7)$$

es un observador exponencial local para el sistema de observación (3)-(4).

4. Aplicaciones: Modelo de pesca con zona de reserva

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las densidades de biomasa de la misma población de pescado dentro de una zona de pesca libre y zona de reserva, resp. en tiempo t , donde el crecimiento de la población es logístico en cada zona.

La subpoblación de pescado del área libre migra al área de reserva con tasa m_{12} . La tasa de migración inversa es m_{21} .

Sea E el *esfuerzo de la pesca* aplicado a la zona libre y q el coeficiente de capturabilidad.

Entonces la dinámica del sistema de la población se puede describir por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - m_{12} x_1 + m_{21} x_2 - q E x_1 \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + m_{12} x_1 - m_{21} x_2.\end{aligned}\tag{8}$$

Donde r_1 y r_2 son las tasas de crecimiento intrínseco, K_1 y K_2 las capacidades de carga en las zonas libre y de reserva, resp.

4. Aplicaciones: Modelo de pesca con zona de reserva

De Dubey y otros (2003) retomamos las condiciones

$$\frac{r_2(r_1 - m_{12} - qE)^2}{K_2 m_{21}} < \frac{(r_2 - m_{21})r_1}{K_1} \quad (9)$$

$$(r_2 - m_{21})(r_1 - m_{12} - qE) < m_{12}m_{21} \quad (10)$$

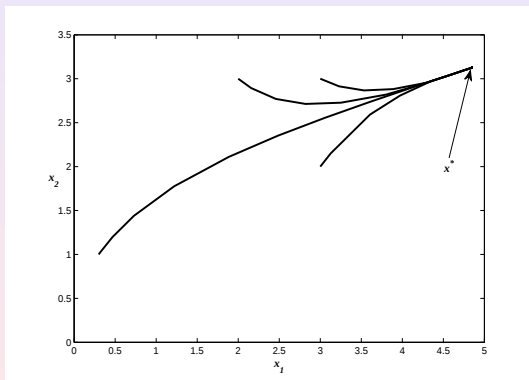
$$\frac{r_1 x_1^*}{K_1} > r_1 - m_{12} - qE, \quad (11)$$

que implican la existencia de un único equilibrio positivo $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Supondremos que se verifican las condiciones (9)-(11) a lo largo de esta sección.

4. Aplicaciones: Modelo de pesca con zona de reserva

Para una ilustración, consideramos el sistema (8) con los mismos parámetros que en Guiro y otros (2009). En esta figura podemos observar cómo diferentes trayectorias del modelo tienden al único equilibrio x^* .



Algunas soluciones del sistema (8)

4. Aplicaciones: Modelo de pesca con zona de reserva

Estimación del stock a partir de la biomasa pescada

Primero consideramos el problema de estimación del stock en el área de reserva a partir de la biomasa pescada en el área libre.

La función de observación es

$$y = h(x) = qE(x_1 - x_1^*).$$

Entonces

$$C := h'(x^*) = (\quad qE \quad 0 \quad),$$

y linealizando el modelo (8), para la Jacobiana del miembro derecho obtenemos

$$A := \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 \frac{x_1^*}{K_1} - m_{12} - qE & m_{21} \\ m_{12} & r_2 - 2r_2 \frac{x_2^*}{K_2} - m_{21} \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $\text{rank}[C|CA]^T = 2$. Así, por el Teorema de Lee y Markus el sistema es localmente observable cerca del equilibrio, y el estado del sistema completo (en particular el stock de la especie en el área de reserva) puede ser recuperada, observando la biomasa pescada por unidad de tiempo.

Consideramos los mismos parámetros que en Guiro y otros (2009):

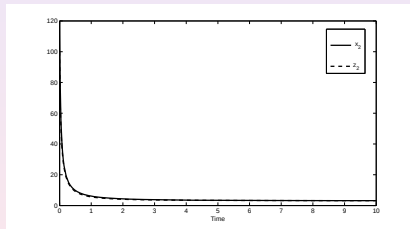
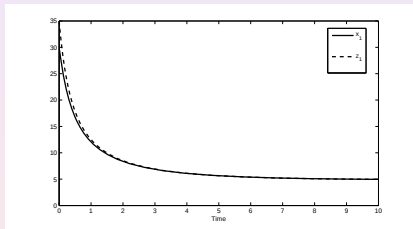
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.7x_1 \left(1 - \frac{x_1}{10}\right) - 0.2x_1 + 0.1x_2 - 0.25 \cdot 0.9x_1 \\ \dot{x}_2 &= 0.5x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2.2}\right) + 0.2x_1 - 0.1x_2.\end{aligned}\tag{12}$$

Ahora $x^* = (4.85, 3.12)$ y con $K := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, la matriz $A - KC$ es Hurwitz, por tanto por el Teorema de Sundarapandian (2002) tenemos el siguiente sistema observador

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 0.7z_1 \left(1 - \frac{z_1}{10}\right) - 0.2z_1 + 0.1z_2 - 0.25 \cdot 0.9z_1 \\ \dot{z}_2 &= 0.5z_2 \left(1 - \frac{z_2}{2.2}\right) + 0.2z_1 - 0.1z_2 + 10[y - 0.25 \cdot 0.9(z_1 - x_1^*)].\end{aligned}\tag{13}$$

Ejemplo

Si tomamos una condición inicial $x^0 := (30, 120)$ para el sistema (12), y análogamente, consideramos otra condición cercana, $z^0 = (35, 100)$ para el sistema observador (13), entonces la correspondiente solución z del observador tiende a la solución x del sistema original, como se muestra en la siguiente figura.



Solución del observador (13), convergiendo a la solución del sistema (12)

Observador para un sistema con “Exosistema”

Ahora, para la estimación de un cambio en los parámetros dinámicos de un ecosistema, recordamos que Sundarapandian también consideró la posibilidad de un “generator entrada” determinado por un sistema externo llamado *exosistema* $w' = s(w)$, en términos del cual podemos formar un sistema compuesto (no lineal) de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u(w)) \\ \dot{w} &= s(w) \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{14}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ son funciones diferenciables y $F(x^*, 0) = 0$, $u(w^*) = 0$, $s(w^*) = 0$. Aquí $u(w)$ se interpreta como un vector, dependiente del tiempo, de los parámetros del sistema original.

Para la construcción de un observador del sistema compuesto podemos aplicar el siguiente

Teorema 7. (Sundarapandian, 2002)

Suponemos que el sistema de observación (14) es Lyapunov estable en el equilibrio. Si existe una matriz K tal que la matriz $A - KC$ es Hurwitz, donde $A = F'(x^*, w^*)$ y $C = h'(x^*)$. Entonces el sistema dinámico definido por

$$\dot{z} = F(z, u(w)) + K[y - h(z)]$$

es un observador exponencial local para el sistema de observación (14).

Observador para un sistema con exosistema (cambio ambiental)

Esta dinámica estará descrita por ecuaciones diferenciales sencillas, asumiendo que, con constantes positivas conocidas α y δ , el sistema externo

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \alpha w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\delta w_1 ,\end{aligned}\tag{15}$$

describe un cambio periódico que afecta a los coeficientes de difusión entre las dos zonas, donde todos los c_{ij} -s son positivos,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - (m_{12} + c_{12} w_1) x_1 + (m_{21} + c_{21} w_1) x_2 - q E x_1 \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + (m_{12} + c_{12} w_1) x_1 - (m_{21} + c_{21} w_1) x_2 \\ \dot{w}_1 &= \alpha w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\delta w_1 ,\end{aligned}\tag{16}$$

Como el cero es un equilibrio Lyapunov estable del sistema (15), entonces se puede probar que $(x^*, 0)$ del sistema (16) es también Lyapunov estable. Con la misma observación

$$y = h(x) = qE(x_1 - x_1^*),$$

que en el ejemplo anterior y aplicando el Teorema de Sundarapandian (2002) para el sistema compuesto, podemos construir un observador para este sistema.

Consideramos el sistema

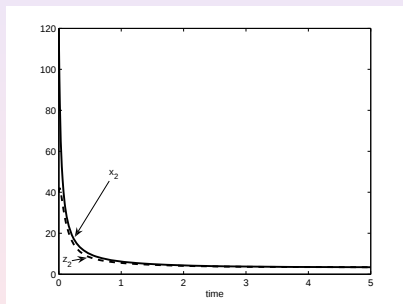
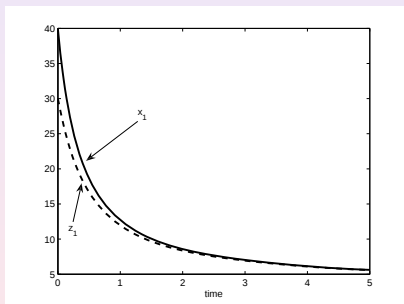
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 0.7x_1 \left(1 - \frac{x_1}{10}\right) - (0.2 + 0.2w_1)x_1 + (0.1 + 0.1w_1)x_2 - 0.25 \cdot 0.9x_1 \\
 \dot{x}_2 &= 0.5x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2.2}\right) + (0.2 + 0.2w_1)x_1 - (0.1 + 0.1w_1)x_2 \\
 \dot{w}_1 &= 1.3w_2 \\
 \dot{w}_2 &= -2.1w_1 .
 \end{aligned} \tag{17}$$

Ahora usando la matriz $K := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, obtenemos el siguiente observador

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= 0.7z_1 \left(1 - \frac{z_1}{10}\right) - (0.2 + 0.2w_1)z_1 + (0.1 + 0.1w_1)z_2 - 0.25 \cdot 0.9z_1 \\
 \dot{z}_2 &= 0.5z_2 \left(1 - \frac{z_2}{2.2}\right) + (0.2 + 0.2w_1)z_1 - (0.1 + 0.1w_1)z_2 + \\
 &\quad + [y - 0.225(z_1 - x_1^*)]10 \\
 \dot{w}_1 &= 1.3w_2 \\
 \dot{w}_2 &= -2.1w_1 .
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ejemplo

Para la solución del sistema compuesto (17), establecemos el valor inicial $(x^0, w^0) := (30, 120, 0.1, 0.1)$, y calculamos la solución del sistema observador (18) con valor inicial $z^0 := (40, 40)$. La siguiente figura muestra cómo el proceso de estado es aproximado por la solución del observador incluso en caso de un ambiente variable.



Solución del observador (18), convergiendo a la solución del sistema (17)

Consideramos el modelo de pesca inicial (8) y suponemos que los valores de referencia de ciertos parámetros abióticos cambian a valores constantes desconocidos. El efecto de este cambio se describe por un término aditivo pequeño (perturbación) $w \in \mathbb{R}$ en ciertos parámetros del modelo. Supongamos, por ejemplo, que una perturbación tiene lugar en las tasas de migración. Consideramos primero el sistema de pesca inicial completado con una ecuación trivial para el parámetro desconocido w ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - (m_{12} + c_1 w)x_1 + (m_{21} + c_2 w)x_2 - qEx_1 \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + (m_{12} + c_1 w)x_1 - (m_{21} + c_2 w)x_2 \\ \dot{w} &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas.

Observador para un sistema con exosistema (cambio ambiental)

Se puede probar que $(x^*, 0)$ del sistema (19) es Lyapunov estable. Con la misma observación

$$y = h(x) = qE(x_1 - x_1^*),$$

entonces

$$C := h'(x^*) = (\quad qE \quad 0 \quad 0 \quad),$$

y linealizando el modelo (19), para la Jacobiana del miembro derecho obtenemos

$$A := \begin{bmatrix} r_1 - 2r_1 \frac{x_1^*}{K_1} - m_{12} - qE & m_{21} & -c_1 x_1^* + c_2 x_2^* \\ m_{12} & r_2 - 2r_2 \frac{x_2^*}{K_2} - m_{21} & c_1 x_1^* - c_2 x_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $\text{rank}[C|CA|CA^2]^T = 3$ si $K_2 \neq 2x_2^*$ y $c_1 x_1^* \neq c_2 x_2^*$. Así, por el Teorema de Lee y Markus el sistema es localmente observable cerca del equilibrio, y aplicando el Teorema de Sundarapandian (2002) para el sistema compuesto, podemos construir un observador para este sistema.

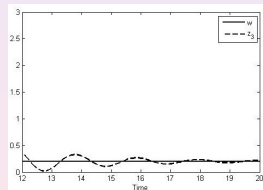
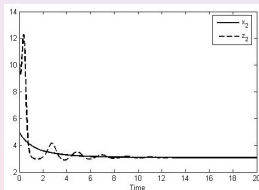
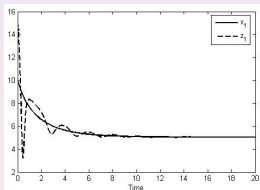
Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.7x_1 \left(1 - \frac{x_1}{10}\right) - (0.2 + 0.1w)x_1 + (0.1 + 0.3w)x_2 - 0.25 \cdot 0.9x_1 \\ \dot{x}_2 &= 0.5x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2.2}\right) + (0.2 + 0.1w)x_1 - (0.1 + 0.3w)x_2 \\ \dot{w} &= 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Ahora usando la matriz $K := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$, obtenemos el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 0.7z_1 \left(1 - \frac{z_1}{10}\right) - (0.2 + 0.1z_3)z_1 + (0.1 + 0.3z_3)z_2 - 0.25 \cdot 0.9z_1 \\ \dot{z}_2 &= 0.5z_2 \left(1 - \frac{z_2}{2.2}\right) + (0.2 + 0.1z_3)z_1 - (0.1 + 0.3z_3)z_2 \\ \dot{z}_3 &= 100[y - 0.25 \cdot 0.9(z_1 - 4.85)].\end{aligned}\tag{21}$$

Si suponemos que la perturbación ambiental corresponde al valor $w = 0.2$ y para la solución del sistema compuesto (20), establecemos el valor inicial $(x^0, w^0) := (10, 5, 0.2)$, y calculamos la solución del sistema observador (21) con valor inicial $z^0 := (15, 10, 0.3)$. La siguiente figura muestra cómo la solución z del observador aproxima la solución x del sistema original y también estima correctamente el parámetro “desconocido” w .



Solución del observador (21), convergiendo a la solución del sistema (20)

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Consideramos el modelo biológico 2-presas y 1-depredador $x' = f(x)$ determinado por el siguiente sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(a - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-b + b_{21}x_1 - b_{22}x_2 + b_{23}x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(c - c_{32}x_2 - c_{33}x_3)\end{aligned}\tag{22}$$

con $a, b, c, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} > 0$.

Es fácil comprobar que existe un equilibrio en el sentido matemático, cuya positividad depende de los parámetros.

Observación de las presas sin distinción:

Suponemos que observamos la cantidad total de presas de la población sin hacer distinción entre ellas, es decir,

$$y = h(x) = x_1 + x_3 - x_1^* - x_3^*.$$

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Entonces

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Linealizando el sistema Lotka-Volterra (22) obtenemos

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} -a_{11}x_1^* & -a_{12}x_1^* & 0 \\ b_{21}x_2^* & -b_{22}x_2^* & b_{23}x_2^* \\ 0 & -c_{32}x_3^* & -c_{33}x_3^* \end{pmatrix}.$$

Suponemos que en el estado de equilibrio la pérdida en la tasa relativa de crecimiento debida a la competición intra-específica es la misma para las dos poblaciones presa (Varga y otros, 2003):

$$a_{11}x_1^* = c_{33}x_3^*$$

(En particular, éste es el caso cuando no hay competición intra-específica en ninguna de las poblaciones presa).

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Entonces

$$\det[C|CA|CA^2]^T = -(a_{12}x_1^* + c_{32}x_3^*)^2 x_2^* (b_{21} - b_{23}).$$

Además suponemos que el crecimiento para el depredador en la tasa de crecimiento debida a su depredación de las especies presa 1 y 3 es diferente

$$b_{21} \neq b_{23}.$$

Entonces por el Teorema de Lee y Markus el sistema es localmente observable cerca del equilibrio: el estado completo del sistema se puede monitorar observando solamente las poblaciones presa sin distinción.

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

A continuación probamos que el sistema (3) es asintóticamente estable para un equilibrio $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

Definimos $V : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con U en el primer cuadrante positivo de $\mathbb{R}^3$:

$$V(x_1, x_2, x_3) := \alpha F\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right) + \beta F\left(\frac{x_2}{x_2^*}\right) + \gamma F\left(\frac{x_3}{x_3^*}\right) - (\alpha + \beta + \gamma)$$

donde

$$\alpha = \frac{b_{21}}{x_2^* x_3^* a_{12}}, \quad \beta = \frac{1}{x_1^* x_3^*}, \quad \gamma = \frac{b_{23}}{x_1^* x_2^* c_{32}}$$

y $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(z) = z - \ln z$.

Se demuestra que si $(x_1, x_2, x_3) \neq (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$,

$$V(x_1, x_2, x_3) > 0 \quad \text{y} \quad V'(x_1, x_2, x_3) < 0.$$

Luego V es una función de Lyapunov para el sistema en el equilibrio y así éste es globalmente asintóticamente estable en el cuadrante positivo.

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Por tanto, una solución del sistema (22) converge a la solución que buscamos, desde cualquier estado inicial. Nuestro objetivo será encontrar la solución del sistema observador que converja más rápido que el resto a la nuestra, para mejorar así la estimación.

Consideramos el modelo 2-presas y 1-depredador determinado por el siguiente sistema diferencial

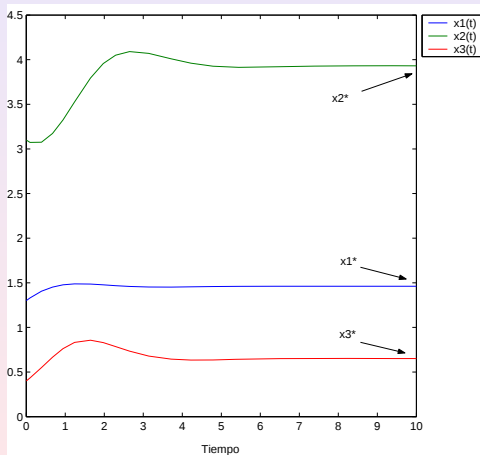
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(2 - 1.1x_1 - 0.1x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-1 + x_1 - 0.2x_2 + 0.5x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(3.6 - 0.8x_2 - 0.7x_3) \\ y = h(x) &= x_1 + x_3 - x_1^* - x_3^*\end{aligned}$$

para el que observamos la cantidad total de presas.

Este sistema posee un equilibrio positivo: $x^* = (1.4608, 3.9307, 0.6506)$

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Si tenemos el anterior modelo al haber encontrado una función de Lyapunov se verifica que es asintóticamente estable y por tanto si suponemos que la condición inicial es $x_0 = (1.3, 3.1, 0.4)$, la solución del sistema se representa como sigue



4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

La matriz A tiene todos sus autovalores con parte real negativa, luego es Hurwitz $\Rightarrow$ Se puede estimar la velocidad de la convergencia de una solución al equilibrio, que es de orden exponencial, así $K = 0$ sería una matriz tal que $A - KC$ es Hurwitz y el propio sistema sería un observador (Teorema de Sundarapandian).

Pero nuestro propósito será mejorar la estimación de la solución, buscando una matriz K que se aproxime antes que otra solución del sistema original a la nuestra.

Para ello hay que tener en cuenta los módulos de las partes reales de los autovalores de estas matrices ya que intervienen directamente en la velocidad de la convergencia, que es exponencial.

Bastará encontrar K tal que $A - KC$ tenga autovalores con parte real negativa superior en módulo al de la parte real negativa de los autovalores de A .

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Para $K^{3 \times 1}$ con coeficientes $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$ obtenemos que la matriz $A - KC$ verifica las condiciones de Routh-Hurwitz y por tanto es Hurwitz, siendo además las partes reales de sus autovalores superiores en módulo a las de la matriz A .

Por el Teorema 2 podemos construir el sistema observador

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1(2 - 1.1z_1 - 0.1z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_2(-1 + z_1 - 0.2z_2 + 0.5z_3) \\ \dot{z}_3 &= z_3(1.6 - 0.8z_2 - 0.7z_3) + 2(y - z_1 - z_3)\end{aligned}$$

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Ejemplo (Gómez y otros, 2008). Consideramos el siguiente modelo 2-presas y 1-depredador con la presencia de una perturbación ambiental desconocida w :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(2 + 0.1w - 1.1x_1 - 0.1x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-1 - 0.3w + x_1 - 0.2x_2 + 0.5x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3(3.6 + w - 0.8x_2 - 0.7x_3) \\ \dot{w} &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

El sistema tiene un equilibrio $x^* = (1.4608 \ 3.9307 \ 0.6506 \ 0)$.

Para estimar ambas componentes (x, w) del sistema (23), sup. que observamos

$$y = h(x) := (x_1 - x_1^*, x_3 - x_3^*).$$

Como $\text{rank}[C|CA|CA^2|CA^3]^T = 4 \Rightarrow$ El sistema es localmente observable cerca del equilibrio.

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Considerando

$$K := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}^T$$

la matriz $A - KC$ es estable y por tanto por el Teorema de Sundarapandian podemos construir el siguiente sistema observador

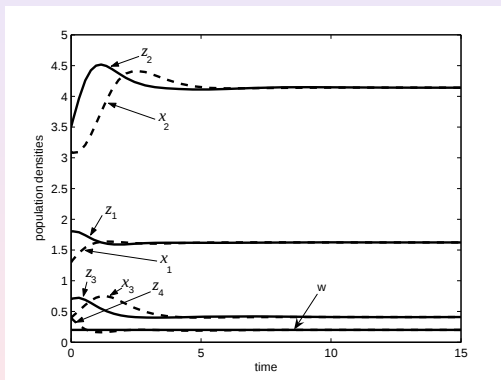
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1(2 + 0.1z_4 - 1.1z_1 - 0.1z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_2(-1 - 0.3z_4 + z_1 - 0.2z_2 + 0.5z_3) \\ \dot{z}_3 &= z_3(3.6 + z_4 - 0.8z_2 - 0.7z_3) \\ \dot{z}_4 &= [y - (z_1 - x_1^*, z_3 - x_3^*)](1, 0.1)\end{aligned}\tag{24}$$

4. Aplicaciones: Modelo Lotka-Volterra

Perturbación ambiental: $w = 0.2$

Condición inicial $(x_0, w_0) := (1.3 \ 3.1 \ 0.4 \ 0.2)$, cerca del equilibrio del sistema (23).

Otra condición inicial cercana, $z_0 := (1.8 \ 3.5 \ 0.7 \ 0.4)$ para el sistema observador (24).



4. Aplicaciones: Cadena trófica

- Componentes de una cadena trófica terrestre típica:
 - recurso, el nivel trófico 0 (energía solar y nutrientes inorgánicos), el cual es incorporado por
 - una población de plantas, el primer nivel trófico (productor), que se transfiere a
 - una población de animales herbívoros, el segundo nivel trófico (consumidor primario).
- En una cadena trófica, los herbívoros pueden ser consumidos por una población de depredadores, el tercer nivel trófico (consumidor secundario), que puede ser seguido por otra población superior de depredadores (consumidor terciario). En este trabajo, por simplicidad técnica sólo vamos a estudiar cadenas tróficas del tipo recurso - productor - consumidor primario.
- Tipos de cadenas tróficas según los posibles tipos de nivel 0 (energía o nutrientes):
 - cadenas abiertas (sin reciclaje natural): $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$.
 - cadenas cerradas (con reciclaje): los individuos muertos de las especies 1 y 2 son reciclados en nutrientes con tasas respectivas $0 < \beta_1 < 1$ y $0 < \beta_2 < 1$.

4. Aplicaciones: Cadena trófica

- x_0 : cantidad que varía con el tiempo del recurso presente en el sistema,
- x_1 : en función del tiempo, la biomasa (o densidad) del productor (especies 1),
- x_2 : en función del tiempo, la biomasa (o densidad) del consumidor primario (especies 2),
- Q : suministro del recurso considerado constante en el modelo,
- $\alpha_0 x_0$: velocidad a la cual una unidad de biomasa de la especie 1 consume el recurso, y se asume que este consumo aumenta la biomasa de esta especie con tasa k_1 ,
- $\alpha_1 x_1$: velocidad a la cual una unidad de biomasa de la especie 2 consume la biomasa de la especie 1, convirtiéndola en biomasa con tasa k_2 .
- Se supone que ambas poblaciones de planta y animal decrecen exponencialmente en ausencia del recurso y otras especies, con tasas respectivas de decrecimiento (parámetros de Malthus) m_1 y m_2 .
- Entonces con parámetros del modelo

$$Q, \alpha_0, \alpha_1, m_1, m_2 > 0; k_1, k_2 \in]0, 1[; \beta_1, \beta_2 \in [0, 1[,$$

para la cadena trófica establecemos el siguiente modelo dinámico (Shamandy, 2005):

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= Q - \alpha_0 x_0 x_1 + \beta_1 m_1 x_1 + \beta_2 m_2 x_2 \\ \dot{x}_1 &= x_1 (-m_1 + k_1 \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 (-m_2 + k_2 \alpha_1 x_1).\end{aligned}\tag{25}$$

4. Aplicaciones: Cadena trófica

- Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida en términos del miembro derecho del sistema (25):

$$f(x) = f(x_0, x_1, x_2) := \begin{bmatrix} Q - \alpha_0 x_0 x_1 + \beta_1 m_1 x_1 + \beta_2 m_2 x_2 \\ x_1(-m_1 + k_1 \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_2) \\ x_2(-m_2 + k_2 \alpha_1 x_1) \end{bmatrix}.$$

- En Shamandy (2005): el sistema (25) tiene un único equilibrio $x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*) > 0 \Leftrightarrow$ el suministro del recurso es suficientemente grande, es decir,

$$Q > Q_2 := \frac{m_1 m_2}{\alpha_1 k_1 k_2} - \frac{\beta_1 m_1 m_2}{\alpha_1 k_2} \quad (26)$$

A lo largo de esta sección se supone que se verifica la condición (26).

4. Aplicaciones: Cadena trófica

- Para el caso de la observación de una única variable de estado, se probó la observabilidad local del sistema (25) en Shamandy (2005).
- Se supone que del vector de estado x , sólo se observa la cantidad de recurso x_0 del sistema (25) que varía en el tiempo, es decir, la función de observación es

$$h(x) := x_0 - x_0^*. \quad (27)$$

Por tanto la linealización de la función de observación es

$$C := h'(x^*) = (1, 0, 0).$$

4. Aplicaciones: Cadena trófica

- Linealizando el sistema dinámico (25) en el único equilibrio positivo x^* :

$$A := f'(x^*) = \begin{bmatrix} -\alpha_0 x_1^* & -\alpha_0 x_0^* + \beta_1 m_1 & \beta_2 m_2 \\ k_1 \alpha_0 x_1^* & 0 & -\alpha_1 x_1^* \\ 0 & k_2 \alpha_1 x_2^* & 0 \end{bmatrix}.$$

- Para la construcción del observador local para el sistema de observación considerado, se necesita una matriz $H = \text{col}(h_1, h_2, h_3)$ tal que $A - HC$ sea Hurwitz.
Según el criterio de Hurwitz (ver Chen y otros (2004)), en términos del polinomio característico normado de $A - HC$, tenemos la siguiente condición:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \text{ es Hurwitz} \Leftrightarrow$$

$$a_0, a_1, a_2 > 0 \text{ and } a_2 \cdot a_1 > a_0.$$

Teorema 8.

Suponemos que se verifica la desigualdad $Q > \frac{m_1 m_2}{\alpha_1 k_1 k_2}$ y la matriz

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se escoge tal que $h_1 > \max \left\{ \frac{m_1 x_1^*}{m_2 x_2^*}, \frac{\alpha_0 x_0^*}{\beta_2 k_2} \right\}$. Entonces el sistema dinámico definido por

$$\dot{z} = f(z) + H[y - h(z)]$$

es un observador exponencial local para el sistema (25) con observación h definida en (27).

4. Aplicaciones: Cadena trófica

Ejemplo Para un ejemplo numérico se considera el siguiente conjunto de parámetros:

$$Q := 10; \alpha_0 := 0.3; \alpha_1 := 0.1; \beta_1 := 0.2;$$

$$\beta_2 := 0.3; m_1 := 0.1; m_2 := 0.4; k_1 := 0.5; k_2 := 0.5.$$

En este caso el sistema (25) tiene un equilibrio positivo $x^* = (4.52, 8, 5.78)$, y con la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se verifican las condiciones del Teorema de Sundarapandian (2002).

4. Aplicaciones: Cadena trófica

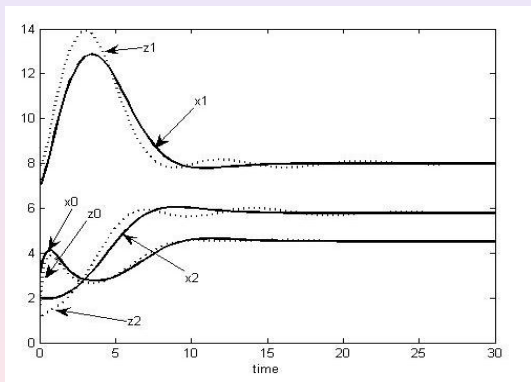
Por tanto, el siguiente debe ser un sistema observador:

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= 10 - 0.3z_0z_1 + 0.2 \cdot z_1 + 0.3 \cdot 0.4z_2 + 2.8[y - (z_0 - x_0^*)] \\ \dot{z}_1 &= z_1(-0.1 + 0.5 \cdot 0.3z_0 - 0.1z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_2(-0.4 + 0.5 \cdot 0.1z_1) + 1[y - (z_0 - x_0^*)].\end{aligned}\tag{28}$$

De hecho, consideramos $x(0) := (3, 7, 2)$ la condición inicial para el sistema (25), cerca del equilibrio, y análogamente, $z(0) := (1.3, 7.9, 1)$ otro valor inicial cercano para el sistema observador (28).

4. Aplicaciones: Cadena trófica

La siguiente figura muestra que la correspondiente solución $\mathbf{z}$ tiende a la solución $\mathbf{x}$ del sistema original, proporcionando una bastante buena estimación asintótica del proceso de estado.



Soluciones del sistema (25) y (28)

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Consideramos un modelo dinámico que describe la interacción entre las poblaciones de células sanas y células irradiadas de un órgano bajo el efecto de una radiación constante. Sea $x_1(t)$ el número de células sanas, y $x_2(t)$ el número de células irradiadas en el momento t . Para esta situación, retomamos el siguiente modelo (Freedman y Pinho, 2008):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_0}\right) - \Delta x_1 + px_2, & x_1(0) &\geq 0 \\ \dot{x}_2 &= \Delta x_1 - px_2 - \delta x_2, & x_2(0) &\geq 0.\end{aligned}\tag{29}$$

En este sistema se supone que el crecimiento de las células sanas es logístico como en Sachs y otros(1992) y Andronov y otros (1973).

El número de células radiadas con cromosomas rotos se representan por Δx_1 , donde $\Delta > 0$ es la tasa de radiación determinada por el correspondiente protocolo, $p > 0$ es la tasa por la que las células irradiadas se recombinan en células sanas, $\delta > 0$ es la tasa de erosión de las células irradiadas, y finalmente, $r > 0$ es el parámetro de Malthus y $K_0 > 0$ la capacidad de carga para la población celular sana.

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Para este sistema, Freedman y Pinho (2008) probaron que el sistema deja invariante el ortante no negativo. Además, probaron que el sistema (29) tiene un equilibrio trivial $(0, 0)$, y un equilibrio “matemático” $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, con

$$x_1^* = \frac{K_0[r(p + \delta) - \Delta\delta]}{r(p + \delta)}, \quad x_2^* = \frac{K_0\Delta[r(p + \delta) - \Delta\delta]}{r(p + \delta)^2} \quad (30)$$

Obviamente $x^* > 0$ si y sólo si,

$$\Delta < \frac{r(p + \delta)}{\delta}. \quad (31)$$

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

La matriz Jacobiana en el equilibrio dado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ es,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r\bar{x}_1}{K_0} - \Delta & p \\ \Delta & -p - \delta \end{pmatrix}, \quad (32)$$

lo que para $\bar{x} = (0, 0)$ implica el siguiente resultado:

Teorema 9. (Freedman y Pinho, 2008)

- a) $x^* > 0$ si y sólo si el equilibrio $(0, 0)$ es inestable.
- b) Si $x^* > 0$, x^* es globalmente asintóticamente estable con respecto a $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- c) El sistema (29) persiste (uniformemente) si y sólo si se verifica (31). En otro caso la población celular se extingue.

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

La matriz Jacobiana en el equilibrio dado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ es,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r\bar{x}_1}{K_0} - \Delta & p \\ \Delta & -p - \delta \end{pmatrix}, \quad (32)$$

lo que para $\bar{x} = (0, 0)$ implica el siguiente resultado:

Teorema 9. (Freedman y Pinho, 2008)

- a) $x^* > 0$ si y sólo si el equilibrio $(0, 0)$ es inestable.
- b) Si $x^* > 0$, x^* es globalmente asintóticamente estable con respecto a $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- c) El sistema (29) persiste (uniformemente) si y sólo si se verifica (31). En otro caso la población celular se extingue.

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Supondremos $x^* > 0$.

Caso 1. Asumimos que observamos el número total de células,

$$h(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - x_1^* - x_2^*. \quad (33)$$

Caso 2. Sólo observamos las células irradiadas. Entonces la función de observación viene dada por

$$h(x_1, x_2) := x_2 - x_2^*. \quad (34)$$

Teorema 10

Si para $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, se verifican las desigualdades

$$(i) \quad k_2 > \max \{r, \delta\} \quad (ii) \quad k_1 > p + 2 \left(\delta + \frac{rk_2}{\Delta} \right)$$

entonces con la correspondiente elección de h , para los sistemas (29)-(33) y (29)-(34), un observador local viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= rz_1 \left(1 - \frac{z_1}{K_0} \right) - \Delta z_1 + pz_2 + k_1[y - h(z)] \\ \dot{z}_2 &= \Delta z_1 - pz_2 - \delta z_2 + k_2[y - h(z)]. \end{aligned}$$

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Supondremos $x^* > 0$.

Caso 1. Asumimos que observamos el número total de células,

$$h(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - x_1^* - x_2^*. \quad (33)$$

Caso 2. Sólo observamos las células irradiadas. Entonces la función de observación viene dada por

$$h(x_1, x_2) := x_2 - x_2^*. \quad (34)$$

Teorema 10

Si para $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, se verifican las desigualdades

$$(i) \quad k_2 > \max \{r, \delta\} \quad (ii) \quad k_1 > p + 2 \left(\delta + \frac{rk_2}{\Delta} \right)$$

entonces con la correspondiente elección de h , para los sistemas (29)-(33) y (29)-(34), un observador local viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= rz_1 \left(1 - \frac{z_1}{K_0} \right) - \Delta z_1 + pz_2 + k_1[y - h(z)] \\ \dot{z}_2 &= \Delta z_1 - pz_2 - \delta z_2 + k_2[y - h(z)]. \end{aligned}$$

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Supondremos $x^* > 0$.

Caso 1. Asumimos que observamos el número total de células,

$$h(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - x_1^* - x_2^*. \quad (33)$$

Caso 2. Sólo observamos las células irradiadas. Entonces la función de observación viene dada por

$$h(x_1, x_2) := x_2 - x_2^*. \quad (34)$$

Teorema 10

Si para $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, se verifican las desigualdades

$$(i) \quad k_2 > \max \{r, \delta\} \quad (ii) \quad k_1 > p + 2 \left(\delta + \frac{rk_2}{\Delta} \right)$$

entonces con la correspondiente elección de h , para los sistemas (29)-(33) y (29)-(34), un observador local viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= rz_1 \left(1 - \frac{z_1}{K_0} \right) - \Delta z_1 + pz_2 + k_1[y - h(z)] \\ \dot{z}_2 &= \Delta z_1 - pz_2 - \delta z_2 + k_2[y - h(z)]. \end{aligned}$$

4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

Ejemplo. Para una ilustración establecemos

$\Delta := 2$, $r := 2.1$, $K_0 := 100$, $p := 1$, $\delta := 0.1$ En este caso $x^* > 0$ y es globalmente estable. Además, hemos llegado a las condiciones de observabilidad para los dos casos estudiados. Por otra parte, para estos valores de los parámetros, las condiciones (i) y (ii) del Teorema 8 se satisfacen:

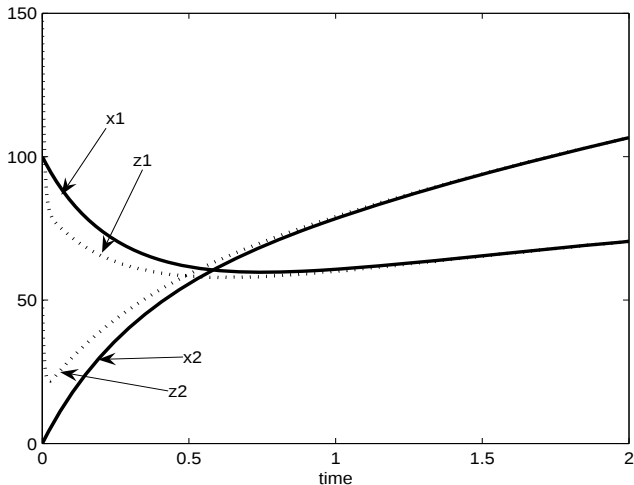
$$k_2 > 2.1 \quad , \quad k_1 > 1 + 2(0.1 + 1.05k_2).$$

Por tanto, con $K := \text{col}(150, 50)$ obtenemos el siguiente sistema observador:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 2.1z_1 \left(1 - \frac{z_1}{100}\right) - 5z_1 + z_2 + 150(y - h(z)) \\ \dot{z}_2 &= 5z_1 - z_2 - 0.1z_2 + 50(y - h(z)).\end{aligned}\tag{35}$$

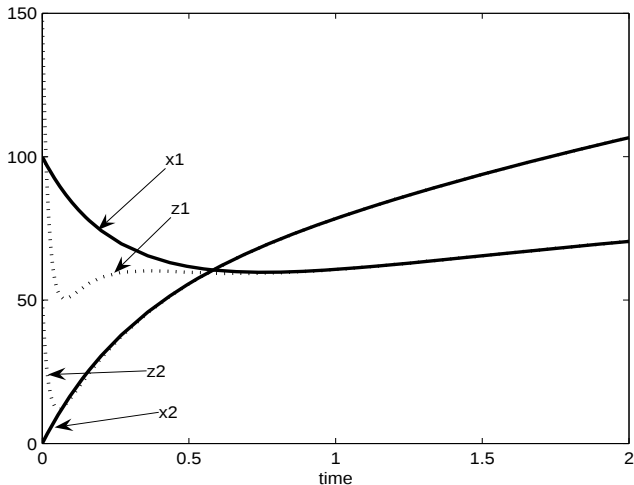
4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

En esta figura podemos ver que el sistema observador (35) asintóticamente recupera la solución original del sistema original en el Caso 1.



4. Aplicaciones: Modelo en una población celular afectada por radiación

En esta figura podemos ver que el sistema observador (35) asintóticamente recupera la solución original del sistema original en el Caso 2.



Conclusiones en el Modelo de radiación celular

- 1 Usando resultados sobre la existencia de un equilibrio asintóticamente estable en un modelo de radiación celular, se han obtenido condiciones suficientes para la observabilidad local y el diseño de un observador, correspondientes a diferentes situaciones de observación.
- 2 Podemos estimar la población de células sanas y la de las células irradiadas, cuando observamos el número total de células. De manera análoga, a partir de la observación de las células irradiadas podemos recuperar el número de células sanas.
- 3 En ambos casos, mediante una elección apropiada de los dos parámetros auxiliares, podemos llegar a una convergencia bastante rápida de la estimación asintótica.
- 4 Para una terapia eficiente las decisiones deberían ser tomadas en base a la información de la respuesta de las células al protocolo de radiación aplicado. Obviamente se trata de un problema tratado técnicamente, y en la literatura hay varios métodos para monitorizar *en vivo* y evaluar las poblaciones de células expuestas a radiación, métodos basados tradicionalmente en tomografía computerizada e imágenes de resonancia magnética, etc. La metodología para monitorizar basada en la construcción de un sistema observador sugerida puede contribuir a un desarrollo más a fondo de la metodología para monitorizar la respuesta de poblaciones de células expuestas a radiación.
- 5 Finalmente, la metodología que ofrecemos puede ser extendida fácilmente a otros modelos de radiación celular también.

Conclusiones en el Modelo de radiación celular

- 1 Usando resultados sobre la existencia de un equilibrio asintóticamente estable en un modelo de radiación celular, se han obtenido condiciones suficientes para la observabilidad local y el diseño de un observador, correspondientes a diferentes situaciones de observación.
- 2 Podemos estimar la población de células sanas y la de las células irradiadas, cuando observamos el número total de células. De manera análoga, a partir de la observación de las células irradiadas podemos recuperar el número de células sanas.
- 3 En ambos casos, mediante una elección apropiada de los dos parámetros auxiliares, podemos llegar a una convergencia bastante rápida de la estimación asintótica.
- 4 Para una terapia eficiente las decisiones deberían ser tomadas en base a la información de la respuesta de las células al protocolo de radiación aplicado. Obviamente se trata de un problema tratado técnicamente, y en la literatura hay varios métodos para monitorizar *en vivo* y evaluar las poblaciones de células expuestas a radiación, métodos basados tradicionalmente en tomografía computerizada e imágenes de resonancia magnética, etc. La metodología para monitorizar basada en la construcción de un sistema observador sugerida puede contribuir a un desarrollo más a fondo de la metodología para monitorizar la respuesta de poblaciones de células expuestas a radiación.
- 5 Finalmente, la metodología que ofrecemos puede ser extendida fácilmente a otros modelos de radiación celular también.

Conclusiones en el Modelo de radiación celular

- 1 Usando resultados sobre la existencia de un equilibrio asintóticamente estable en un modelo de radiación celular, se han obtenido condiciones suficientes para la observabilidad local y el diseño de un observador, correspondientes a diferentes situaciones de observación.
- 2 Podemos estimar la población de células sanas y la de las células irradiadas, cuando observamos el número total de células. De manera análoga, a partir de la observación de las células irradiadas podemos recuperar el número de células sanas.
- 3 En ambos casos, mediante una elección apropiada de los dos parámetros auxiliares, podemos llegar a una convergencia bastante rápida de la estimación asintótica.
- 4 Para una terapia eficiente las decisiones deberían ser tomadas en base a la información de la respuesta de las células al protocolo de radiación aplicado. Obviamente se trata de un problema tratado técnicamente, y en la literatura hay varios métodos para monitorizar *en vivo* y evaluar las poblaciones de células expuestas a radiación, métodos basados tradicionalmente en tomografía computerizada e imágenes de resonancia magnética, etc. La metodología para monitorizar basada en la construcción de un sistema observador sugerida puede contribuir a un desarrollo más a fondo de la metodología para monitorizar la respuesta de poblaciones de células expuestas a radiación.
- 5 Finalmente, la metodología que ofrecemos puede ser extendida fácilmente a otros modelos de radiación celular también.

Conclusiones en el Modelo de radiación celular

- 1 Usando resultados sobre la existencia de un equilibrio asintóticamente estable en un modelo de radiación celular, se han obtenido condiciones suficientes para la observabilidad local y el diseño de un observador, correspondientes a diferentes situaciones de observación.
- 2 Podemos estimar la población de células sanas y la de las células irradiadas, cuando observamos el número total de células. De manera análoga, a partir de la observación de las células irradiadas podemos recuperar el número de células sanas.
- 3 En ambos casos, mediante una elección apropiada de los dos parámetros auxiliares, podemos llegar a una convergencia bastante rápida de la estimación asintótica.
- 4 Para una terapia eficiente las decisiones deberían ser tomadas en base a la información de la respuesta de las células al protocolo de radiación aplicado. Obviamente se trata de un problema tratado técnicamente, y en la literatura hay varios métodos para monitorizar *en vivo* y evaluar las poblaciones de células expuestas a radiación, métodos basados tradicionalmente en tomografía computerizada e imágenes de resonancia magnética, etc. La metodología para monitorizar basada en la construcción de un sistema observador sugerida puede contribuir a un desarrollo más a fondo de la metodología para monitorizar la respuesta de poblaciones de células expuestas a radiación.
- 5 Finalmente, la metodología que ofrecemos puede ser extendida fácilmente a otros modelos de radiación celular también.

Conclusiones en el Modelo de radiación celular

- 1 Usando resultados sobre la existencia de un equilibrio asintóticamente estable en un modelo de radiación celular, se han obtenido condiciones suficientes para la observabilidad local y el diseño de un observador, correspondientes a diferentes situaciones de observación.
- 2 Podemos estimar la población de células sanas y la de las células irradiadas, cuando observamos el número total de células. De manera análoga, a partir de la observación de las células irradiadas podemos recuperar el número de células sanas.
- 3 En ambos casos, mediante una elección apropiada de los dos parámetros auxiliares, podemos llegar a una convergencia bastante rápida de la estimación asintótica.
- 4 Para una terapia eficiente las decisiones deberían ser tomadas en base a la información de la respuesta de las células al protocolo de radiación aplicado. Obviamente se trata de un problema tratado técnicamente, y en la literatura hay varios métodos para monitorizar *en vivo* y evaluar las poblaciones de células expuestas a radiación, métodos basados tradicionalmente en tomografía computerizada e imágenes de resonancia magnética, etc. La metodología para monitorizar basada en la construcción de un sistema observador sugerida puede contribuir a un desarrollo más a fondo de la metodología para monitorizar la respuesta de poblaciones de células expuestas a radiación.
- 5 Finalmente, la metodología que ofrecemos puede ser extendida fácilmente a otros modelos de radiación celular también.

4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Observabilidad para sistemas en la genética de poblaciones:

Observabilidad Local de Sistemas No Lineales con variedad invariante

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones continuamente diferenciables, definimos un **sistema de observación** como

$$\dot{x} = f \circ x \quad (36)$$

$$y = h \circ x \quad (37)$$

Definición. Supongamos que M es una subvariedad regular k -dimensional localmente positivamente invariante para (36) en x^* (equilibrio del sistema). Diremos que el sistema de observación (36)-(37) es **localmente observable** (en M) en el punto x^* si existe $\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad:

Dados $z^i \in M$, con $\|z^i - x^*\| < \epsilon$ ($i \in \{1, 2\}$) y,

$$\dot{x}^i(t) = f(x^i(t)) \quad (t \in [0, T])$$

$$x^i(0) = z^i \quad (i \in \{1, 2\})$$

$$h(x^1(t)) = h(x^2(t)) \quad (t \in [0, T])$$

entonces $z^1 = z^2$ (consecuentemente $x^1(t) = x^2(t)$ ($t \in [0, T]$)).

4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Observabilidad del modelo estratégico de la selección

Consideramos una población con alelos $A_1, \dots, A_n$ con N posibles fenotipos “puros” o estrategias de comportamiento identificadas con los vértices del simplex standard Δ_N .

Para cada genotipo $A_i A_j$, sea $S_{ij} \in \Delta_N$ el fenotipo de un cigoto A_{ij} .

Para cada vector de estado alélico $p \in \Delta_n$, el **fenotipo medio de la población** es

$$S(p) := \sum_{i,j=1}^n p_i p_j S_{ij}.$$

Para cada $p \in \Delta_n$, el **fenotipo efectivo (o potencial) del alelo A_i** es el vector

$$S^i(p) := \sum_{j=1}^n p_j S_{ij} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Sea ahora $p(t)$ el **vector de frecuencia alélica** en la población adulta en el tiempo t . Entonces el modelo continuo (de tipo estándar) que regula nuestra dinámica es

$$\dot{p}_i = p_i [S^i(p) - S(p)] A S(p); \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (38)$$

4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Observabilidad del modelo estratégico de la selección

Resultado con **condiciones suficientes** para que el modelo sea **localmente observable en el equilibrio** p^* en López y otros (2004):

Si consideramos la dinámica estratégica observando el fenotipo medio de la población, la función de observación viene dada por

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad h(p) := S(p) - S(p^*) \quad (39)$$

Si los fenotipos efectivos en el equilibrio de la dinámica, $S^i(p^*)$ son linealmente independientes, entonces el sistema de observación (38)-(39) es localmente observable en el equilibrio p^* .

4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Ejemplo (López y otros, 2008). Consideramos un sistema de tres alelos con dominancia cíclica $A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$, donde los homocigotes exhiben fenotipos puros representados por los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$S_{11} := e_1, \quad S_{22} := e_2, \quad S_{33} := e_3.$$

Entonces la estructura de dominancia está representada por la hipermatriz

$$[S_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_2 \\ e_3 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Consideramos ahora la dinámica (38) con la siguiente matriz de juego: fijamos un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y definimos

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 & -1 \\ -1 & -\varepsilon & 1 \\ 1 & -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Ahora la familia parametrizada de sistemas correspondientes a (38) es

$$\dot{p}_i = p_i \cdot (S^i(p) - S(p)) \cdot A(\varepsilon) S(p) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (42)$$

4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Fijamos $\varepsilon := 0.5$. Este sistema tiene un equilibrio positivo $p^* := (1/3, 1/3, 1/3)$ que es asintóticamente estable (López y otros, 2008) y la imagen fenotípica del equilibrio o fenotipo mixto p^* , es $S^* := S(p^*) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Se considera como observación:

$$h(p) := S(p) - S(p^*). \quad (43)$$

Para las matrices de linealización obtenemos

$$L = \begin{pmatrix} -0.0185185 & 0.314815 & -0.12963 \\ -0.12963 & -0.0185185 & 0.314815 \\ 0.314815 & -0.12963 & -0.0185185 \end{pmatrix} \text{ y } C = 2 \begin{pmatrix} S^{*1} & S^{*2} & S^{*3} \end{pmatrix},$$

donde S^{*1} , S^{*2} , S^{*3} son los fenotipos efectivos en el equilibrio:

$$\begin{aligned} S^{*1} &= S^1(p^*) = (2/3, 0, 1/3), \\ S^{*2} &= S^2(p^*) = (1/3, 2/3, 0), \\ S^{*3} &= S^3(p^*) = (0, 1/3, 2/3), \end{aligned}$$

los cuales son vectores linealmente independientes. Por tanto el sistema de observación es localmente observable cerca del equilibrio. Además

$$C = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

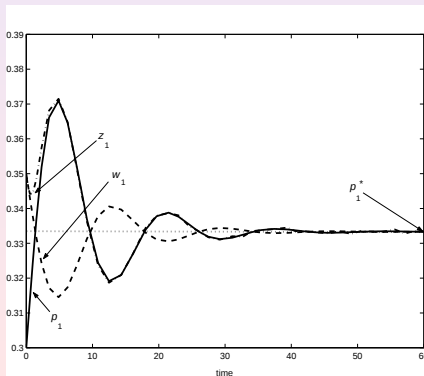
4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos

Para $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz $L - KC$ es estable y por el T. de Sundarapandian, un observador exponencial local para el sistema de observación (42)-(43) sería:

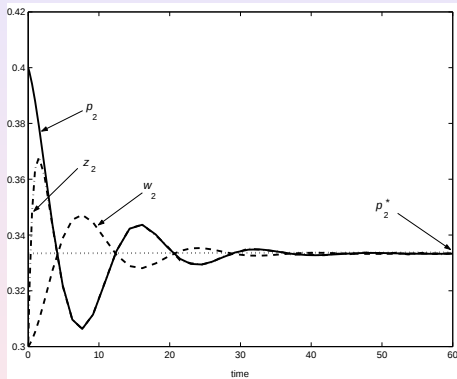
$$\dot{z}_i = z_i(S^i(z) - S(z))AS(z) + K[S(p) - S(z)] \quad (i \in \{1, 2, 3\}). \quad (44)$$

Condición inicial para el sistema original (42): $p_0 = (0.3 \ 0.4 \ 0.3)$

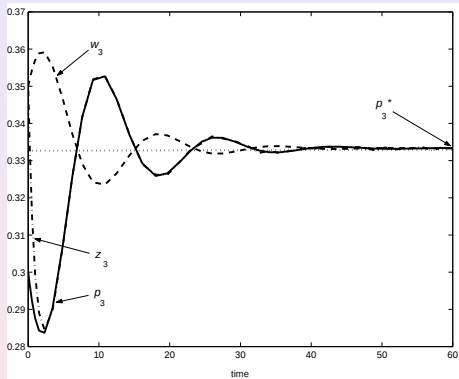
Condición inicial para el sistema observador (44): $z_0 = (0.35 \ 0.35 \ 0.3)$.



4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos



4. Aplicaciones: Modelos en procesos genéticos



- Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I. and Maier, A.G., 1973. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halstead Press, New York.
- Chen, Ben M.; Lin, Zongli; Shamesh, Yacov A., 2004. *Linear Systems Theory. A Structural Decomposition Approach*. Birkhauser, Boston.
- Dubey B, Chandra P, Sinha P (2003) A model for fishery resource with reserve area. *Nonlinear Analysis Real World Appl* 4:625-637.
- H. I. Freedman and S. T. R. Pinho. Persistence and Extinction in a Mathematical Model of Cell Population Affected by Radiation, *Periodica Mathematica Hungarica*, **56**, (2008), 1, 25-35.
- Gámez, M.; López, I. and Molnár, S., 2008. Monitoring environmental change in an ecosystem. *Biosystems*, **93**, 211-217.
- Gámez, M.; López, I.; Garay, J.; Varga, Z., 2009. Observation and control in a model of a cell population affected by radiation. *Biosystems*, **96**, 172-177.
- M. Gámez, I. López, Z. Varga and J. Garay, 2012. Stock estimation, environmental monitoring and equilibrium control of a fish population with reserve area. *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, **22** (3) , 751-766.
- Guiro, A., Iggidr, A., Ngom, D. and Touré, H. 2009. On the stock estimation for some fishery systems, *Review in fish biology and fisheries*, **19**, 313-327.
- Kalman, R.E., Falb, P.L., Arbib, M.A., (1969). *Topics in Mathematical Systems Theory*. McGraw-Hill, New York.
- Lee, E.B. and Markus, L., 1971. *Foundations of Optimal Control Theory*. New York-London-Sydney : Wiley.

- López, I., (2003). Observabilidad y controlabilidad en modelos de evolución (Tesis doctoral). *Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería*.
- I. López, M. Gámez, R. Carreño. Observability in dynamic evolutionary models, *BioSystems*, **73**, (2004), 99-109.
- I. López, M. Gámez, J. Garay and Z. Varga. Monitoring in a Lotka-Volterra model, *BioSystems*, **87**, (2007), 1, 68-74.
- López, I.; Gámez, M.; Varga, Z., (2008). Observer design for phenotypic observation of genetic processes. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 9, 290-302.
- A. Shamandy, Monitoring of trophic chains (2005). *Biosystems* 81, No. 1, 43-48.
- Sachs, Chen, P.L., R.K., Hahnfeldt, P. and Hlatky, L.R., 1992. DNA damage caused by ionizing radiation. *Math. Biosci.* **112**, 271-303.
- Sachs, R.K., Hlatky, L.R. and Hahnfeldt, P., 2001. Simple ODE models of tumor growth and anti-angiogenic or radiation treatment. *Math. Comput. Model* **33**, 1297-1305.
- V. Sundarapandian. Local observer design for nonlinear systems. *Mathematical and computer modelling* **35**, (2002), 25-36.
- Z. Varga, On observability of Fisher's model of selection (1992). *Pure Mathematics and Applications. Ser. B. Vol. 3, No 1*, 15-25.
- Z. Varga, A. Scarelli, A. Shamandy. State monitoring of a population system in changing environment, *Community Ecology*, **4**, (2003), 73-78.