



EDITORIAL

La sorprendente utilidad del conocimiento generado por mera curiosidad intelectual

Se cumple por estas fechas el octogésimo aniversario de la publicación en Harper's Magazine de un profundo [artículo](#) firmado por Abraham Flexner cuyo título (*The usefulness of useless knowledge*) hemos parafraseado en el titular de este texto. En el año 1929 Flexner, que era conocido por sus publicaciones sobre los estudios de medicina en Estados Unidos, se puso en contacto con los hermanos Caroline y Louis Bamberger, quienes habían amasado una enorme fortuna al vender su cadena de almacenes de New Jersey antes de que explotara la gran crisis económica del 29, y estaban considerando invertir parte de su patrimonio en una nueva Facultad de Medicina en la ciudad de New Ark.

Sin embargo, Flexner propuso a los Bamberger un proyecto mucho más ambicioso: crear en Estados Unidos un instituto dedicado a la investigación y no simplemente a la docencia de estudiantes de licenciatura. Logró convencerles para invertir cinco millones de dólares (de aquel tiempo) en lo que acabó llamándose Institute for Advanced Study (IAS). Y que, en vez de en New Ark, estuviese localizado en Princeton, junto a una gran universidad que contaba ya con una importante comunidad intelectual, bibliotecas e instalaciones.

El 20 de mayo de 1930 el IAS fue oficialmente creado, siendo Flexner designado como su primer director por los Bambergers. En el [memo-rándum](#) que presentó a la "Board of Trustees" escribió lo siguiente: "El Instituto debería ser pequeño y plástico (es decir, flexible); debería ser un paraíso donde los científicos puedan mirar el mundo y sus fenómenos como su laboratorio, sin ser perturbados por la corriente de lo inmediato; (...) Sus profesores deberían disfrutar de una completa libertad intelectual y estar absolutamente liberados de cualquier responsabilidad administrativa o preocupación burocrática".

En el IAS se amasa cada curso una mezcla nueva de ingenio gracias a sus miembros temporales, cuyo espectro va desde jóvenes doctores hasta distinguidos profesores visitantes quienes, típicamente, forman parte del Instituto durante un año, pero que pueden serlo hasta un periodo de cinco y volver luego en repetidas ocasiones a lo largo de su carrera. En la actualidad el IAS consta de cuatro escuelas (Matemáticas, Ciencias de la Naturaleza (Física Teórica), Historia y Ciencias Sociales) siendo las dos primeras las que iniciaron su andadura. Entre los profesores más destacados de su etapa inicial encontramos, entre otros, a Albert Einstein, Kurt Gödel, Hermann Weyl y John von Neumann.

Mi primera visita al IAS tuvo lugar cuando me incorporé como *Assistant Professor* a la Universidad de Princeton en el año 1974. Después, fui miembro del IAS durante el curso 1989-90 y profesor visitante en varias ocasiones. El Instituto prevalece en mi memoria como un lugar mágico, en el que podía colaborar con los matemáticos más creativos de cada momento y conversar con figuras míticas de mi formación matemática, como Arne Behrling, Atlee Selberg o André Weil. Y, aunque no conversar, sí ver en persona al mismísimo Kurt Gödel. Su impacto en mi carrera matemática ha sido muy importante.

Pude palpar de primera mano la utopía promovida por Flexner: el centro era un paraíso para los intelectuales, un espacio de libertad en el que los científicos podían desarrollar sus ideas sin ser perturbados por el mundanal ruido. Tras su estancia, no tenían que dar cuenta a nadie; su trabajo no tenía que estar dirigido a resolver grandes problemas, ni a cambiar el mundo, aunque en muchos casos, los avances obtenidos allí así lo hicieran. El diseño del primer ordenador moderno (el proyecto ENIAC) de von Neumann es, quizás, la mejor expresión de esa sorprendente utilidad del pensamiento motivado por la mera curiosidad intelectual que buscaba Flexner. Años después de lograr poner en marcha el Instituto, Flexner elaboró su pensamiento en el artículo publicado en Harper's Magazine, demostrando el gran valor utilitario que, a la postre, tiene la investigación motivada por la curiosidad. A continuación, reproducimos algunos fragmentos representativos del texto traducidos al castellano.

Antonio Córdoba, Director del ICMAT entre 2016 y 2019 y Catedrático Emérito de la Universidad Autónoma de Madrid

CONTENIDOS

| | |
|--|----|
| Editorial: Antonio Córdoba (UAM-ICMAT)..... | 1 |
| La utilidad del conocimiento inútil..... | 2 |
| Trimestre temático: Álgebra e información cuántica.. | 5 |
| Entrevista: Stefaan Vaes (KU Leuven)..... | 7 |
| Entrevista: Bárbara Kraus (Universidad de Innsbruck).. | 9 |
| She Does Maths: Isabel Fernández (Universidad de Sevilla)..... | 11 |
| Perfil: Luis Martínez Zoroa (ICMAT)..... | 12 |
| Entrevista: Jan Maas (Instituto de Ciencia y Tecnología de Austria)..... | 13 |
| Entrevista: Rafael Ramírez Uclés (Universidad de Granada)..... | 15 |
| Cuestionario ICMAT..... | 17 |
| Reseña científica: "Singular integrals in quantum euclidean spaces"..... | 20 |
| Reseña científica: "Sobre la <i>solucionabilidad</i> del problema de Dirichlet para operadores elípticos"..... | 21 |
| Cuéntame tu tesis: Bruno Vergara (ICMAT-UAM) | 22 |
| Noticias ICMAT..... | 24 |

La utilidad del conocimiento inútil

Por Abraham Flexner • Publicado en 1939

¿No es curioso que en un mundo repleto de odios irracionales que amenazan la civilización, un grupo de hombres y mujeres, viejos y jóvenes se separen de la corriente iracunda de la vida cotidiana para dedicarse a cultivar la belleza, a extender el conocimiento, a curar la enfermedad y a paliar el sufrimiento, olvidándose de los fanáticos que simultáneamente se dedican a propagar el dolor, la fealdad y el sufrimiento? El mundo siempre ha sido un lugar lamentable y confuso, pero los poetas, los artistas y los científicos han ignorado todos esos elementos que, de ser considerados, les paralizarían. Desde un punto de vista práctico, la vida intelectual y espiritual es, superficialmente, una forma de actividad inútil, a la que las personas se entregan porque buscan mayores satisfacciones de las que podrían obtener de otra forma. En este artículo me ocuparé de la cuestión de hasta qué punto la búsqueda de estas satisfacciones inútiles ofrece inesperadamente una fuente de utilidad inimaginable.

Oímos decir con reiteración tediosa que la nuestra es una era materialista, cuyas principales preocupaciones deberían ser la extensa distribución de bienes materiales y las oportunidades de este mundo. La protesta justificada de los estudiantes que,

por causas ajenas a su voluntad, se ven privados de oportunidades y de una buena parte de los bienes terrenales, les aleja de los estudios que sus padres realizaron, y les lleva al estudio, igualmente importante y no menos urgente, de problemas sociales, económicos, y gubernamentales. No tengo nada en contra de esta tendencia. El mundo en el que vivimos es el único sobre el cual nuestros sentidos pueden testificar. A menos que transformemos nuestro mundo a uno mejor y más justo, millones de personas vivirán entristecidas y amargadas sin que sus protestas puedan ser escuchadas. Durante muchos años he pedido que nuestras escuelas fuesen más conscientes del mundo en el que sus alumnos están destinados a pasar sus vidas. Ahora, a veces me pregunto si esa corriente no se ha vuelto demasiado fuerte, y si sería posible llevar una vida plena si el mundo se vaciara de las cosas inútiles que le dan un significado espiritual. En otras palabras, me pregunto si nuestra concepción de lo que es útil puede haberse vuelto demasiado estrecha como para poder adecuarse a las posibilidades errantes y caprichosas del espíritu humano.

Podemos considerar esta cuestión desde dos puntos de vista: el científico y el humanista o espiritual. Vayamos por el científico primero. Recuerdo una conversación que tuve hace algunos años con George Eastman sobre este tema. Eastman, un hombre viajado, sabio y gentil, sensible a la música y al arte, me había comentado que tenía la intención de dedicar su vasta fortuna a promover la educación sobre *temas útiles*. Me aventuré a preguntarle a quién consideraba el científico más útil del mundo. Él respondió instantáneamente: "Marconi". Lo sorprendí al decirle: "En cualquier placer que la radio o la conexión inalámbrica puedan haber agregado a la vida humana, la participación de Marconi fue prácticamente insignificante".

No olvidaré su asombro. Me pidió que explicara mi afirmación. Le respondí algo así: "Marconi fue un eslabón inevitable. El verdadero crédito de todo lo que se ha hecho en el campo de la tecnología inalámbrica pertenece a Clerk Maxwell, quien en 1865 realizó ciertos cálculos abstrusos sobre magnetismo y electricidad. Maxwell reprodujo sus ecuaciones abstractas en un tratado publicado en 1873. En la siguiente reunión de la Asociación Británica, HS Smith, profesor de Oxford, declaró que "ningún matemático puede leer estos volúmenes sin darse cuenta de que contienen una teoría que añade nuevos métodos y recursos a las matemáticas puras." Durante los siguientes quince años otros descubrimientos complementaron el trabajo teórico de Maxwell. Finalmente, en 1887 y 1888, el problema científico que aún quedaba por resolver —la detección y demostración de las ondas electromagnéticas que son portadoras de señales inalámbricas— fue resuelto por Heinrich Hertz, un trabajador del laboratorio de Helmholtz en Berlín. Ni a Maxwell ni a Hertz les preocupaba la utilidad de su trabajo, al contrario, tal pensamiento nunca pasó por sus mentes. No tenían ningún objetivo práctico. Así que, aunque el inventor de la radio en el sentido legal fue, por supuesto, Marconi, ¿qué inventó? Simplemente el último detalle técnico, principalmente el dispositivo receptor ahora obsoleto llamado *detector*".

Es posible que Hertz y Maxwell no inventaran nada, pero fue su trabajo teórico *inútil* el que fue aprovechado por un técnico astuto, y el que creó nuevos medios de comunicación, nuevos usos y nuevos entretenimientos, a través de los cuales otras

Imagen: Universidad de Princeton



Institute for Advanced Study (Universidad de Princeton)

personas, con méritos relativamente menores, han obtenido fama y han ganado millones. ¿Quiénes fueron realmente las personas útiles? No Marconi, sino Clerk Maxwell y Heinrich Hertz. Maxwell y Hertz fueron genios sin intención utilitaria. Marconi fue un inventor listo, sin pensamiento original pero con capacidad de acción.

La mención del nombre de Hertz recordó a Eastman las ondas hertzianas, y le sugerí que preguntase a los físicos de la Universidad de Rochester exactamente cuáles fueron las contribuciones de Hertz y Maxwell. Pero una cosa le podía afirmar: ellos hicieron su ciencia sin pensar en su posible uso. Y a lo largo de la historia de la ciencia la gran mayoría de descubrimientos realmente importantes, que después demostraron ser beneficiosos para la humanidad, se hicieron por hombres y mujeres motivados no por el deseo de hacer algo útil, sino por el mero deseo de satisfacer su curiosidad.

“¿Curiosidad?”, preguntó Eastman.

“Sí”, contesté. “La curiosidad es probablemente la característica más destacada del pensamiento moderno. No es algo nuevo. Se remonta a Galileo, Bacon y sir Isaac Newton, y su práctica debe estar absolutamente libre de obstáculos. Las instituciones educativas deberían dedicarse al cultivo de la curiosidad; cuanto menos se desvíen por considerar la aplicación inmediata, más probable es que contribuyan no solo al bienestar humano sino a la satisfacción, igualmente importante, del interés intelectual, que es la pasión dominante de la vida intelectual en los tiempos modernos”.

Al igual que Heinrich Hertz trabajó silenciosamente, pasando inadvertido en un rincón del laboratorio de Helmholtz en los últimos años del siglo XIX, numerosos científicos y matemáticos de todo el mundo lo han hecho durante varios siglos. (...)

Se pueden citar innumerables casos en el desarrollo de las matemáticas modernas. Por ejemplo, en los siglos XVIII y XIX el trabajo matemático más abstracto fue la creación de las geometrías no euclidianas. Su inventor, Gauss, reconocido por sus contemporáneos como un matemático distinguido, no se atrevió a publicar sus trabajos sobre este tema durante un cuarto de siglo. Pero sin estos trabajos que Gauss hizo en Gotinga habría sido completamente imposible, años después, formalizar la teoría de la relatividad y todos sus aspectos prácticos.

Otro ejemplo es lo que ahora se conoce como teoría de grupos. En su origen fue una teoría matemática abstracta e inaplicable, desarrollada por matemáticos cuya curiosidad e inquietud condujo a caminos extraños. Sin embargo, hoy esta disciplina es la base de la teoría cuántica de la espectroscopia, donde la usan a diario personas que no tienen idea de cómo surgió.

Por su lado, toda la teoría de la probabilidad fue descubierta por matemáticos cuyo interés real era racionalizar el juego. Aunque fallaron en este propósito práctico, proporcionaron la base científica de todos los tipos de seguros, y también a gran parte de la física del siglo XIX. (...)

No quiero decir que toda la investigación que se desarrolla tenga finalmente un uso práctico inesperado, ni que este posible uso práctico final sea su justificación real. Pretendo abogar por la abolición de la palabra “uso” y por la liberación del espíritu humano. Para asegurarnos de ello, tendremos que desperdiciar algunos preciosos dólares. Pero, lo que es infinitamente más importante, romperemos los grilletes de la mente humana, y la liberaremos para que pueda enfrentar las aventuras que en nuestros días, por un lado, han llevado a Hale, Rutherford, Einstein y sus

pares a millones y millones de millas en los reinos más profundos del espacio y, por otro lado, soltó la energía ilimitada aprisionada en el átomo. Lo que Rutherford y otros como Bohr y Millikan han hecho por pura curiosidad por comprender la construcción del átomo ha liberado fuerzas que pueden transformar la vida humana; pero este resultado práctico final e impredecible no fue la motivación de Rutherford, Einstein, Millikan, Bohr o cualquiera de sus pares. Dejados en paz. Ningún administrador debe dirigir la infraestructura y los medios con los que estas personas trabajarán. El despilfarro, lo admito nuevamente, parece ingente. Pero realmente no es así. Todo el derroche necesario para el desarrollo de la ciencia de la bacteriología no es nada, comparado con los beneficios que se han obtenido de los descubrimientos de Pasteur, Koch, Ehrlich, Theobald Smith, que nunca podrían haberse conseguido si la búsqueda de una hipotética aplicación hubiese permeado en sus mentes. Estos grandes artistas difundieron el espíritu de los laboratorios en los que seguían, simplemente, el camino de la propia curiosidad.

No estoy criticando a las instituciones en las que predomina el objetivo de la utilidad, como son las escuelas de ingeniería o derecho. No es infrecuente que cambien las tornas, y las dificultades prácticas que aparecen en la industria o en los laboratorios estimulen investigaciones teóricas, que luego pueden o no resolver esos problemas, pero más allá, también pueden abrir nuevas perspectivas, inútiles en este momento, pero cargadas de logros futuros, prácticos y teóricos.

La rápida acumulación de conocimiento *inútil*, o teórico, ha creado una situación en la que cada vez es más posible atacar con un enfoque científico problemas prácticos. No solo inventores, sino también científicos *puros* se han entregado a este deporte. Antes he mencionado a Marconi, un inventor, quien, aunque beneficiase a la raza humana, simplemente “tomó el ingenio de otros hombres”. Edison pertenece a la misma categoría. Pasteur era diferente. Fue un gran científico; aunque no era reacio a atacar problemas prácticos, como el estudio de la condición de las vidas francesas o los problemas de la elaboración de cerveza, no solo fue capaz de resolver la dificultad inmediata, sino también de sacar del problema práctico alguna conclusión teórica de gran alcance, *inútil* por el momento, pero que, de alguna manera imprevista, probablemente fue útil más adelante.

Ehrlich, fundamentalmente guiado por su curiosidad, se enfrentó ferozmente al problema de la sífilis y la estudió obstinadamente hasta que encontró una solución de uso práctico inmediato: la arsfenamina. Los descubrimientos de la insulina de Banting, para su uso en la diabetes, y del extracto de hígado de Minot y Whipple, para su uso en la anemia perniciosa, pertenecen a la misma categoría: ambos fueron realizados por científicos, que se dieron cuenta de que era el momento oportuno para emplear mucho del conocimiento *inútil* que había sido acumulado por personas indiferentes a su aplicación práctica.

Por tanto, debemos ser cautelosos al atribuir un cierto descubrimiento científico exclusivamente a una persona. Casi todos los descubrimientos tienen una historia larga y tortuosa. Alguien encuentra algo por aquí, otro un poco por allí. Más adelante, un tercer paso tiene éxito y así continua hasta que un genio junta las piezas y hace la contribución decisiva. La ciencia, como el Mississippi, comienza en un pequeño riachuelo en un bosque distante. Poco a poco, otras corrientes aumentan su volumen. Y así, el río rugiente que revienta los diques está formado por innumerables fuentes.

Aunque no puedo tratar este aspecto exhaustivamente, puedo decir que, durante los próximos doscientos años, la contribución de las escuelas profesionales probablemente no sea la formación de estudiantes que mañana serán ingenieros, abogados o médicos, sino más bien en el hecho de que, incluso siguiendo objetivos estrictamente prácticos, continúa creándose una enorme cantidad de actividad aparentemente *inútil*. De esta actividad *inútil* surgirán descubrimientos que pueden resultar infinitamente más importantes para la mente y el espíritu humano que el logro de los fines prácticos para los cuales se fundaron las escuelas. Las consideraciones anteriores muestran la abrumadora importancia de la libertad espiritual e intelectual. He hablado de ciencia experimental, de matemáticas, pero el mismo argumento es igualmente válido para la música, el arte y cualquier otra expresión del espíritu humano libre. El mero hecho de que brinden satisfacción a una sola alma, inclinada a su propia purificación y elevación, es toda la justificación que necesitan. Y al argumentar esto sin ninguna referencia, implícita o explícita, a la *utilidad*, quedan justificados todos los colegios, universidades e institutos de investigación. Una institución que libera generaciones sucesivas de almas humanas está totalmente fundada, independientemente de si cierto graduado hace o no una supuesta contribución útil al conocimiento humano. Un poema, una sinfonía, una pintura, una verdad matemática, un nuevo hecho científico... todos contienen en sí mismos todas las explicaciones que las universidades, colegios e institutos de investigación pueden requerir.

Esta argumentación que estoy tratando tiene en este momento un interés especial. Actualmente, en amplias regiones del mundo, especialmente Alemania e Italia, se está haciendo un esfuerzo para reprimir la libertad del espíritu humano. Las universidades se han reorganizado para convertirse en herramientas de quienes creen en la existencia de un credo político, económico o racial especial. Incluso de vez en cuando, en las pocas democracias que quedan, algún individuo irreflexivo cuestiona la crucial importancia de la libertad académica, absolutamente ilimitada. Sin embargo, el verdadero enemigo de la raza humana no es ese pensador intrépido e irresponsable, tenga o no la razón. El verdadero enemigo es quien intenta moldear el espíritu humano para que no se atreva a extender sus alas, como en el pasado se extendieron en Italia y Alemania, de la misma manera que en Gran Bretaña y Estados Unidos.

No estoy diciendo nada nuevo. Este propósito empujó a Von Humboldt a concebir y fundar la Universidad de Berlín cuando Napoleón conquistó Alemania. Es la misma idea que animó al presidente Gilman a fundar la Universidad Johns Hopkins, que después se convertiría en el modelo, en mayor o menor grado, para todas las universidades de este país. Es la idea a la que será fiel cualquier individuo que valore su alma inmortal, independientemente de las consecuencias que implique para sí mismo. Sin embargo, para justificar la libertad espiritual —ya sea en el ámbito de la ciencia o del humanismo— hay que ir mucho más allá de la originalidad, ya que implica una verdadera tolerancia a toda la gama de diferencias humanas. Echando un vistazo a la historia de la raza humana, ¿hay algo más estúpido o ridículo que las preferencias o desagradados fundados en la raza o la religión? ¿La humanidad quiere sinfonías, pinturas y verdades científicas? ¿O quiere sinfonías cristianas, pinturas cristianas y ciencia cristianas? ¿O sinfonías judías, pinturas ju-

días y ciencia judía? ¿O musulmana, egipcia, japonesa, china, estadounidense, alemana o rusa? ¿O contribuciones y expresiones comunistas o conservadoras de la riqueza infinita del alma humana?

Creo que entre las consecuencias más llamativas e inmediatas de la intolerancia extranjera, se puede citar el rápido desarrollo del Instituto de Estudios Avanzados, creado por Louis Bamberger y su hermana, Felix Fuld, en Princeton, Nueva Jersey. La idea de la fundación del Instituto nació en 1930. Su ubicación en Princeton es debida, en parte, al apego de los fundadores al Estado de Nueva Jersey, pero también, en lo que a mi juicio se refería, porque la Universidad de Princeton tenía una pequeña escuela de doctorado de gran calidad, con la que sería posible una estrecha cooperación. El Instituto tiene una deuda con la Universidad de Princeton que nunca podrá ser totalmente cubierta. En 1933 comenzó la actividad del Instituto, ya con una parte considerable de su personal. Entre sus miembros se encontraban eminentes científicos estadounidenses como los matemáticos Veblen, Alexander y Morse; los humanistas Meritt, Lowe y Miss Goldman; los publicistas y economistas Stewart, Riefler, Warren, Earle y Mitrany. A esto deberían sumarse académicos de igual calibre, que formaban parte de la Universidad de Princeton, la biblioteca de Princeton y sus laboratorios. Sin embargo, en los últimos seis años el Instituto de Estudios Avanzados ha contraído una deuda con Hitler, por traer al centro a matemáticos como Einstein, Weyl y von Neumann; Herzfeld y Panofsky en el campo de los estudios humanísticos, y una gran cantidad de jóvenes, influidos por este distinguido grupo, que ya están aumentando la fuerza del conocimiento en todos los campos.

En el Instituto no se sigue ningún protocolo estricto; no se trazan líneas separadoras entre profesores, miembros o visitantes. Los estudiantes y profesores de la Universidad de Princeton y los miembros del Instituto se mezclan libremente, hasta el punto de que es imposible distinguirlos. Se cultiva el aprendizaje por sí mismo. Los resultados —tanto para el individuo como para la sociedad— se dejan a su propio criterio. No se organizan claustros, no existen comités. Así, las mentes creativas disfrutaban de condiciones favorables para la reflexión, la comunicación y el intercambio de ideas. El matemático puede cultivar las matemáticas sin distracción; al igual que un humanista, un economista o un estudiante de política en sus campos. La extensión e importancia de la administración se ha minimizado. Las personas carentes de ideas, sin capacidad de concentración en sus ideas, no se sentirían en casa en el Instituto.

Esta mentalidad se ilustra perfectamente con una breve anécdota. Un catedrático de Harvard, que había recibido un estipendio para venir a Princeton, nos escribió preguntando cuáles eran sus deberes. Mi respuesta fue: "No tienes deberes, solo oportunidades".

No nos hacemos promesas de futuro, pero albergamos la esperanza de que esta búsqueda sin obstáculos del conocimiento inútil tendrá importantísimas consecuencias. Sin embargo, ni por un segundo defendemos la existencia del Instituto con este argumento. Existe simplemente como un paraíso para los intelectuales que, como los poetas y los músicos, se han ganado el derecho de hacer lo que quieran, y que, cuando se les permite hacerlo, alcanzan los mayores logros.

Traducción: Ágata A. Timón G-Longoria

TRIMESTRE TEMÁTICO: Álgebra e información cuántica

Las matemáticas que dan forma a la teoría cuántica de la información

En la década de 1930 el matemático John von Neumann desarrolló la teoría de las álgebras de operadores para resolver ciertos problemas en los que trabajaba sobre mecánica estadística, relacionados con el teorema espectral en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Desde entonces, esta teoría ha permitido conectar muchos otros campos de las matemáticas, y han resultado ser un lenguaje natural para analizar matemáticamente procesos de la física cuántica. En concreto, son importantes en el estudio de algunos aspectos de la teoría de información cuántica. “Las matemáticas son el lenguaje y la herramienta. Son necesarias para mostrar que las cosas funcionan, para predecir fenómenos o para entender mejor la teoría y llegar a los problemas fundamentales”, asegura Barbara Kraus, física de la Universidad de Innsbruck (Austria). En 2019, el ICMAT acogió un trimestre temático sobre este tema y pudimos hablar con algunos de los muchos expertos que pasaron por el centro, como la propia Kraus.

Ágata A. Timón G-Longoria. De marzo a junio de 2019 tuvo lugar en el ICMAT el programa temático “[Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information](#)”. El programa incluyó dos escuelas de investigación (con seis cursos de diez horas cada uno, impartidos por referencias del campo), dos *workshops*, un congreso, un programa de visitantes, una serie de seminarios semanales y un coloquio inaugural, pronunciado por Joachim Cuntz (WWU-Münster), una de las figuras más relevantes dentro del área de las álgebras de operadores. En total, más de 140 investigadores de 15 países acudieron al Instituto.

La relación entre las áreas enumeradas en el título del programa (álgebras de operadores, grupos y teoría de información cuántica) está siendo especialmente fructífera en estos últimos años, en los que el desarrollo del ordenador cuántico es una de las grandes promesas tecnológicas. En este dispositivo se integran nuevas y revolucionarias herramientas de procesamiento de la información, basadas en las particularidades de la cuántica.

Desde comienzos de los años 90 del siglo pasado, la teoría de la información cuántica explora las ventajas y limitaciones de la codificación en sistemas cuánticos de la información. “La física cuánti-

ca ofrece muchas posibilidades que no tenemos en la perspectiva clásica. En el contexto del procesamiento de información, es posible realizar ciertos procesos que no se pueden hacer de manera clásica, o que se pueden hacer de forma mucho más lenta”, asegura Barbara Kraus, investigadora del grupo *Teoría del entrelazamiento y teoría de información cuántica* de la Universidad de Innsbruck (Austria) y una de las protagonistas del programa temático.

Por su lado, la teoría de álgebras de operadores nació en la década de 1930, de manos del célebre matemático John von Neumann. “Para mí, lo más notable es que conecta con muchos otros campos de las matemáticas. Sus orígenes están ligados a la física matemática, en concreto, a la mecánica estadística. Pero ha ido avanzando y ahora tiene mucha más relación con la teoría de grupos y los sistemas dinámicos. El hecho de que actualmente haya tantas conexiones con la teoría de información cuántica hace que el tema sea muy rico”, señala Stefaan Vaes, catedrático de la KU Leuven (Bélgica) y otro de los asistentes al programa.

Aunque durante mucho tiempo estas dos teorías —de álgebras de operadores y la teoría cuántica— se desarrollaron de manera independiente, en la última década los espacios de operadores y los sistemas de operadores han demostrado ser herramientas muy útiles para abordar diferentes problemas en información cuántica, lo que ha conectado de nuevo ambos campos. “En un cierto sentido el lenguaje de la teoría de información cuántica es el lenguaje de las álgebras de operadores”, detalla Vaes. Esta relación se remonta a von Neumann, a su forma de expresar la mecánica cuántica, donde los observables (cantidades físicas que podemos medir en un sistema) son operadores en un espacio de Hilbert, que configuran por tanto un álgebra de von Neumann. “Para tratar con estos operadores se idearon todo tipo de métodos. Por otro lado, la teoría de la probabilidad clásica trata de comprender cuánta información pueden contener diversos canales de comunicación. Si tratamos con canales cuánticos tenemos que emplear nuevas herramientas, ya que apenas entendemos los principios básicos. El lenguaje para expresar la transmisión de información en estos canales es el lenguaje de las álgebras de operadores”, relata el investigador.

En estos años se han obtenido diversos resultados gracias a esta interacción: el uso de las técnicas de álgebra de operadores en la información cuántica ha sido crucial para resolver algunos problemas abiertos en la teoría de las desigualdades de Bell, los



Joachim Cuntz (WWU-Münster), una de las figuras más relevantes dentro del área de las álgebras de operadores, pronunció el coloquio inaugural



El programa temático contó con un variado programa de actividades. En la foto, asistentes al segundo congreso

juegos no locales y la teoría de canales cuánticos. De forma inversa, el uso de técnicas de información cuántica ha sido clave para avanzar en problemas relacionados con las desigualdades de Grothendieck no conmutativas, para encontrar nuevas relaciones entre espacios L_p no-conmutativos y para obtener diferentes perspectivas del llamado problema de inmersión de Connes, uno de los grandes problemas abiertos del área.

El problema de inmersión de Connes tiene relación con otras muchas áreas de las matemáticas. En la formulación original trata de entender si todas las álgebras de tipo II_1 (objetos muy complejos cuya clasificación está aún abierta) están realmente contenidas en la *ultra-potencia* de la más pequeña de dichas álgebras. “Esta conjetura parece muy técnica”, afirma Vaes. “Pero lo que realmente significa es que, en cierto modo, todas esas álgebras de von Neumann tienen una cierta aproximación finito-dimensional”, continúa el investigador. Este punto de vista, a su vez, permitió relacionar el problema con la teoría de grupos, conectándolo así con el tercer pilar sobre el que se asienta el congreso. En particular, el problema de la inmersión de Connes es equivalente a la construcción de ciertas normas en espacios relacionados con grupos discretos.

Estos prometedores avances han hecho de este campo un tema de interés para especialistas de diversas áreas, entre ellos, investigadores del ICMAT como Fernando Lledó (UC3M-ICMAT), Diego Martínez (UC3M-ICMAT) y Carlos Palazuelos (UCM-ICMAT). Los tres, junto con Cécilia Lancien (Université de Toulouse) y Julio de Vicente (UC3M), fueron los organizadores del programa temático “Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information”.

El objetivo principal de este programa temático de investigación es potenciar el estudio de álgebras de operadores y su relación con la teoría de grupos y con la información cuántica. Para ello, reunieron durante estos meses a muchos de los líderes del campo, junto a estudiantes de doctorado y jóvenes investigadores en matemática y física matemática, con intereses en campos aparentemente dispares como álgebra no conmutativa, sistemas dinámicos, grupos, análisis armónico, topología y teoría cuántica. De esta manera, “esperaban estimular la ya rica interacción entre estas áreas de las matemáticas, y el campo -relativamente joven- de la teoría de información cuántica”, aseguraban los organizadores en la web del programa.

¿Se han cumplido estos propósitos? “Las preguntas, colaboraciones y debates que se han generado entre investigadores de diferentes campos, sobre problemas abiertos comunes, demuestran que el programa ha sido un éxito”, afirma Fernando Lledó. Y el interés generado es indudable: entre muchos otros jóvenes investigadores de todo el mundo, quince estudiantes que desarrollan su labor en universidades norteamericanas acudieron al encuentro gracias a la financiación de la *National Science Foundation* de Estados Unidos.

Programa de actividades

El trimestre comenzó con una escuela dedicada a la clasificación de álgebras de operadores y la promediabilidad de grupos y espacios. Dentro de la misma, Joachim Cuntz, uno de los investigadores con más prestigio en el área, pronunció el coloquio inaugural “The ring of integers and C^* -algebras”, el 12 de marzo de 2019. En su charla habló de las C^* -álgebras, objetos que surgen, de forma natural, de las estructuras básicas formadas por los conjuntos de números naturales y de números enteros con sus operaciones de suma y multiplicación, pero que dan lugar a estructuras sorprendentemente ricas.

“Las C^* álgebras surgen siempre que hay alguna estructura topológica”, afirma Vaes. Del mismo modo, las álgebras de von Neumann aparecen de forma natural en cualquier área de las matemáticas donde aparezcan espacios de medida. “A mí me interesa la forma en la que surgen en la teoría de grupos y la teoría ergódica. Todos los grupos están codificados en álgebras de forma compleja, y todas las acciones de grupos y espacios medibles también. Yo investigo para entender cuáles de estos son isomorfos y cuáles no, y en el camino desarrollo nuevas herramientas”, explica.

Desde la década de los 30 del siglo pasado el campo ha crecido enormemente, y se han obtenido resultados clave, como [la clasificación de factores inyectivos](#), de Alain Connes y Uffe Haagerup. “Es un teorema de clasificación completo. Responde a preguntas formuladas por el propio von Neumann en la década de 1930”, asegura Vaes. “En 1976 Alain Connes lo resolvió para todos los casos menos uno, lo que le valió la medalla Fields. Diez años más tarde, a mediados de la década de 1980, Uffe Haagerup resolvió el caso restante. Actualmente se tratan de establecer resultados similares para C^* -álgebras nucleares”. Este fue el tema de uno de los cursos de la escuela.

Del 18 al 22 de marzo tuvo lugar el primer congreso del trimestre, del 6 al 10 de mayo se celebró la segunda escuela y del 13 al 17 de mayo, el segundo congreso. La guinda final del trimestre la puso el Congreso Internacional celebrado del 17 al 21 de junio. El comité científico del trimestre incluyó a grandes expertos internacionales en el campo: Pere Ara (Universitat Autònoma de Barcelona), Marius Junge (University of Illinois at Urbana-Champaign, EE. UU.), David Kerr (Texas A&M University, College Station, EE. UU.), Fernando Lledó (Universidad Carlos III de Madrid e ICMAT), Francesc Perera (Universitat Autònoma de Barcelona), Andreas Winter (Universitat Autònoma de Barcelona) y Mikael Rørdam (University of Copenhagen, Denmark).



La guinda final la puso el Congreso Internacional, celebrado del 17 al 21 de junio

ENTREVISTA: Stefaan Vaes

“Las álgebras de Von Neumann aparecen en cualquier área de las matemáticas donde haya alguna medida”

Entrevista a Stefaan Vaes (KU Leuven), participante en el programa temático Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information del ICMAT

Stefaan Vaes es catedrático en el Departamento de Matemáticas de la *KU Leuven* (Lovaina, Bélgica). Su investigación, centrada en álgebras de Von Neumann y grupos cuánticos, ha sido reconocida por el Consejo Europeo de Investigación (ERC, por sus siglas en inglés) con un proyecto *Starting Grant* (2008-2013) y un *Consolidator Grant* (2014-2019). Es miembro de la Real Academia de Ciencias belga, así como de la Sociedad Americana de Matemáticas. En 2010 fue uno de los ponentes invitados en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM), que tuvo lugar en Hyderabad (India). El mes de marzo de 2019 impartió el curso *Type III factors, free Araki-Woods factors and their (non-)classification* dentro de la primera escuela del programa temático *Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information*. Aprovechamos una pausa de las actividades para charlar sobre su trabajo.

Ágata A. Timón García-Longoria.

Ya ha visitado más veces el ICMAT, ¿cuál es su relación con el Instituto?

La primera vez que estuve fue poco después de la apertura del Centro. Fui profesor de un curso dentro de un programa temático similar al que se está desarrollando en este momento. Después he venido a conferencias y a otras escuelas. Siempre he tenido contacto cercano con los investigadores del ICMAT Javier Parcet y Fernando Lledó. Es estupendo tener un instituto como este en España; genera mucha actividad y ofrece muchas oportunidades. He contratado en mi universidad a varios estudiantes postdoctorales que recibieron su formación en este Instituto.

Su campo de investigación son las álgebras de operadores, ¿qué destacaría de esta área?

Para mí, lo más notable es que conecta con muchos otros campos de las matemáticas. Sus orígenes, en la década de 1930, están ligados a la física matemática, en concreto a la mecánica estadística. Pero ha ido avanzando y ahora tiene mucha más relación con la teoría de grupos y los sistemas dinámicos. El hecho de que actualmente haya tantas conexiones con la teoría de la información cuántica hace que el tema sea muy rico.

¿Qué resultado destacaría de todos estos años de investigación?

El principal resultado para mí es la [clasificación de los factores inyectivos](#), de Alain Connes y Uffe Haagerup. Es un teorema de clasificación completo. Responde a preguntas formuladas por

el propio John von Neumann en la década de 1930. En 1976 Alain Connes lo resolvió para todos los casos menos uno, lo que le valió la medalla Fields. Diez años más tarde, a mediados de la década de 1980, Uffe Haagerup resolvió el caso restante. Actualmente se tratan de establecer resultados similares para C^* -álgebras nucleares. Este es el tema de uno de los cursos de la escuela.

“Es estupendo tener un instituto en España como el ICMAT; genera mucha actividad y ofrece muchas oportunidades”

¿Cuál es la importancia de las álgebras de Von Neumann?

A mí me interesa la forma en la que surge en la teoría de grupos y la teoría ergódica. Todos los grupos están codificados en álgebras de von Neumann de forma compleja, y todas las acciones de grupos y espacios medibles, también. Mi investigación trata de entender cuáles de estos son isomorfos y cuáles no, y en el camino desarrollo nuevas herramientas. En el curso estamos hablando de las álgebras de von Neumann que provienen de la teoría de la probabilidad libre, para las que también estamos tratando de establecer resultados de clasificación. Para mí, es un objeto muy importante porque aparece de forma natural en cualquier área de las matemáticas donde haya alguna medida. Del mismo modo, las C^* -álgebras surgen siempre que hay alguna estructura topológica.

Al final, todo trata de clasificar: ¿por qué es tan valiosa la clasificación para los matemáticos?

Los matemáticos queremos vislumbrar el orden que aparece en estas estructuras. Queremos ver la imagen completa. Pero además, el interés va mucho más allá del resultado final y, muchas veces, son los métodos que se desarrollan para ello lo enriquecedor para las matemáticas.

“El lenguaje de la teoría de información cuántica puede usar el lenguaje de las álgebras de operadores”

En el caso específico de las álgebras de von Neumann, ¿cuáles serían las implicaciones de la clasificación?

Las álgebras de von Neumann están conectadas a otro problema propuesto por Alain Connes, que afirma que cada factor de tipo II.1 está realmente contenido en la llamada ultra-potencia del factor hiper-finito de tipo II.1. Esta conjetura parece muy técnica, pero lo que realmente significa es que, en cierto modo, todas esas álgebras de von Neumann tienen una especie de aproximación finita-dimensional. Y ese es un tema que conecta con los problemas en la teoría de información cuántica.

¿Cuál es la conexión entre las álgebras de von Neumann y la teoría de la información cuántica?

La teoría de información cuántica puede usar el lenguaje de las álgebras de operadores. Esto se remonta a von Neumann,

a la forma de expresar la mecánica cuántica, donde los observables son operadores en un espacio de Hilbert, que configuran un álgebra de von Neumann. Para tratar con estas clases se idearon técnicas totalmente nuevas. La teoría de la probabilidad clásica trata de comprender cuánta información pueden contener diversos canales de comunicación. Si tratamos con canales cuánticos tenemos que emplear nuevas herramientas, ya que apenas entendemos los principios básicos. El lenguaje para expresar la transmisión de información en estos canales es el lenguaje de las álgebras de operadores.

“Los grupos cuánticos codifican una forma compleja de simetría”

Usted también trabajó en el pasado en grupos cuánticos: ¿qué es un grupo cuántico?

Si entendemos los grupos como una forma de codificar la simetría, los grupos cuánticos codifican una forma más compleja de simetría. Son estructuras algebraicas más complejas que los grupos, de hecho los grupos son un caso especial.

¿Cuál es la motivación de esta nueva estructura?

Surge naturalmente en diferentes tipos de contextos. Por ejemplo, están muy conectados con lo que llamamos categorías tensoriales. Y el lenguaje de las categorías tensoriales se usa mucho en los aspectos más formales de los ordenadores cuánticos.



Imagen: ICMAT

Stefaan Vaes impartió uno de los cursos de la primera escuela del programa temático *Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information*

ENTREVISTA: Barbara Kraus

“El entrelazamiento nos permite hacer realidad la teleportación o la criptografía cuántica”

Entrevista a Barbara Kraus, investigadora de la Universidad de Innsbruck (Austria) y ponente en uno de los congresos del programa temático *Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information*

Bárbara Kraus es la responsable del grupo *Teoría del entrelazamiento y teoría de la información cuántica* de la Universidad de Innsbruck, Austria. Fue una de las ponentes del segundo congreso celebrado dentro del programa temático *Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information*, que se ha desarrollado en el ICMAT. Colaboradora habitual de investigadores españoles como Julio de Vicente (quien fue postdoc en su grupo) y David Pérez García, Kraus afirma que el área de la teoría de información cuántica goza de muy buena salud en Madrid. Tras su conferencia, “*Entanglement and symmetries of multipartite systems*”, pudimos hablar con ella.

Ignacio del Amo y Ágata A. Timón García-Longoria.

¿Qué es la teoría de la información cuántica y por qué es diferente de la teoría de la información clásica?

La teoría de la información cuántica combina la teoría de la información clásica con la física cuántica. La física cuántica ofrece muchas posibilidades que no tenemos en el contexto clásico. Normalmente uso esta metáfora: la información clásica es como un interruptor que está encendido o apagado, es un bit que puede valer 0 o 1; pero cuánticamente, este interruptor de luz podría estar encendido y apagado simultáneamente, no solo con una cierta probabilidad sino de forma efectiva, al mismo tiempo. Esto, que en física cuántica se llama *principio de superposición*, abre puertas a nuevas e interesantes posibilidades. Por ejemplo, en el contexto del procesamiento de la información, es posible realizar ciertos protocolos que no se pueden hacer de manera clásica, o que requieren mucho más tiempo. De esto trata la teoría de la información cuántica.

En el contexto cuántico, ¿cuál es el mecanismo físico que permite conservar la información y transferirla?

Los átomos o fotones individuales obedecen esta regla de superposición. Su comportamiento solo puede describirse con física cuántica, no es suficiente hacerlo con la clásica. Se pueden usar estos fenómenos de diferentes maneras para crear herramientas, como computadoras cuánticas o criptografías cuánticas, que emplean estas propiedades para operar de forma más segura o más rápida. Y también se puede usar la teoría, herramientas que se han desarrollado como la teoría del entrelazamiento, no solo para idear nuevas tecnologías, sino también en otros campos de la física como, por ejemplo, la física de la materia condensada.

¿Qué papel tienen las matemáticas en todo esto?

Son el lenguaje y la herramienta. Son necesarias para mostrar que las cosas funcionan, para predecir fenómenos, para enten-

der mejor la teoría y para llegar a los problemas fundamentales. En la teoría de información cuántica se unen la teoría de información clásica, las matemáticas y los experimentos. No sabemos si la física cuántica es la teoría correcta, podría pasar lo mismo que sucedió con la clásica. Hace cien años observaron que no era la teoría correcta para describir sistemas pequeños, y tuvieron que desarrollar la cuántica. Ahora, existen muchos experimentos que verifican las predicciones que se hicieron basadas en esta teoría. Es decir, por el momento la física cuántica no ha sido falseada por ningún experimento, y al contrario, ha sido verificada por muchas pruebas. Esta visión experimental tiene que ir mano a mano con las matemáticas, que son las que van construyendo la teoría. Las matemáticas son fundamentales, sin ellas no podríamos hacer nada.

“Las matemáticas son el lenguaje y la herramienta para describir el mundo cuántico”

Su investigación está basada en matemáticas pero también en ciencias de la computación y física. ¿Qué le parece especialmente estimulante en esa interacción?

Para empezar, aprendes un montón. Siempre me ha parecido muy interesante la manera en la que diferentes disciplinas enfocan un mismo problema desde diversos ángulos. Si estás bloqueada con un problema de información cuántica o teoría del entrelazamiento, y hablas con un/a matemático/a que venga de un campo totalmente diferente, verá la cuestión desde una perspectiva completamente distinta. Puede ser muy fructífero.

En concreto, usted investiga sobre el problema del entrelazamiento en un sistema de muchos cuerpos, ¿podría darnos una idea sobre ello?

El entrelazamiento es una correlación muy fuerte. Hemos hablado de un sistema simple en el que puede haber superposición: un átomo que está en un estado excitado y en el estado fundamental al mismo tiempo. Ahora tenemos dos sistemas, en los que se da también esta superposición, que provoca que estén fuertemente correlacionados. Imaginemos que tenemos dos dados, y creamos un entrelazamiento entre ellos, yo me quedo aquí en Madrid y mandamos el otro a Barcelona. Si tiro el dado puedo obtener cualquier número del 1 al 6 con la misma probabilidad. En Barcelona, sucederá igual. Pero lo que sucede con el entrelazamiento es que si yo lanzo el dado y obtengo un 2, sé que cuando tiren el dado en Barcelona también obtendrán un 2. Esto no sucede en la física clásica, lo cierto es que estos dados no existen, si no, los casinos tendrían serios problemas. Pero en la cuántica sí, lo que nos permite hacer cosas nuevas, por ejemplo, teleportación [es decir, mandar información de un lugar a otro sin que haya un canal de por medio] o criptografía cuántica.

“Siempre me ha parecido muy interesante la manera en la que diferentes disciplinas enfocan un mismo problema”

¿En qué problemas concretos trabaja usted?

Por un lado, trabajamos en teorías muy abstractas, como la teoría del entrelazamiento, en la que queremos entender mejor qué son esas fuertes correlaciones cuando tenemos más de dos sistemas. Para dos ya lo entendemos bastante bien, pero para más todavía hay muchas preguntas abiertas importantes en física de la materia condensada. También buscamos nuevas aplicaciones para los sistemas de muchos cuerpos. Por otro lado, trabajamos en computación cuántica. Queremos encontrar nuevos algoritmos que se puedan ejecutar de manera más rápida en pequeños ordenadores cuánticos.

¿Qué tipo de problemas es posible resolver solo mediante ordenadores cuánticos?

Un ejemplo simple sería la teleportación. No funciona de manera clásica, no es posible. Otra aplicación importante, que está relacionada, es la criptografía. La criptografía es algo que todos usamos todos los días para sacar dinero del cajero, comunicarnos por internet, etc. Por ahora no sabemos si los protocolos clásicos son seguros frente a la computación cuántica. Hay protocolos criptográficos que se basan en problemas que actualmente se tarda mucho en resolver. Pero no está matemáticamente probado que lleve mucho tiempo empleando computación cuántica. Creemos que lleva mucho tiempo, pero no podemos demostrarlo.

¿Y cómo se prueba que un sistema cuántico es seguro?

Si se usan fotones para transmitir la información, puede asegurarse que si alguien intenta obtener la información, se detecta la intromisión, y simplemente se aborta la comunicación.

¿En qué otras cuestiones está interesada en este momento?

Otro tema relevante actualmente es verificar el procesamiento de los ordenadores cuánticos. Hay muchos grupos trabajando en el desarrollo del ordenador cuántico, y ya son lo suficientemente grandes para resolver problemas mucho más rápido de lo que lo hacen los ordenadores clásicos, e incluso tareas que no se podían abordar hasta ahora. Pero claro... ¿cómo podemos verificar los resultados? Tenemos que encontrar formas de comprobar los ordenadores cuánticos.

Aparte de los mencionados, ¿qué otros retos considera especialmente importantes en este campo?

Uno de ellos es ir más allá de la visión clásica. Otro sería resolver un conjunto de problemas fundamentales de física de la

materia condensada que aún no tienen respuesta. Son campos muy distintos, pero se pueden usar herramientas de la teoría de la información cuántica para investigar los sistemas de muchos cuerpos. Todos estos temas están relacionados de alguna manera. Si obtienes un resultado en un campo, puedes usarlo en otro.

Otra de las dificultades que hay que sortear para fabricar ordenadores cuánticos operativos es el tamaño, ¿puede explicarnos esto?

Sí. Necesitas un sistema cuántico lo suficientemente grande como para procesar la información. Pero si tienes objetos muy pequeños, como son los átomos, y tienes que controlarlos de manera muy precisa, no puedes simplemente apilarlos hasta conseguir el material que necesitas. Se tiene que hacer de manera que tus átomos no interactúen con otros fotones que pueda haber alrededor, hace falta aislar y manipular el sistema con mucho cuidado. Para ello se requieren sistemas muy limpios, es decir, que no contengan impurezas y estén bien aislados de cualquier alteración desde el exterior.

Otra cuestión es la decoherencia cuántica, ¿de qué trata?

Si los átomos interactúan con otros elementos del entorno, esto provoca la llamada decoherencia. Esto significa que el átomo pierde el estado de superposición, lo que hace que no contenga la información de una manera tan clara, por lo que en el procesamiento este error se extenderá y se obtendrá un resultado confuso.

“Tenemos que encontrar formas de verificar el funcionamiento de los ordenadores cuánticos”

¿Cómo cree que afectará la computación cuántica al futuro?

Hay aplicaciones muy obvias, como simulaciones que nos permitirán saber mucho más de los sistemas de materia condensada. Pero se puede ir mucho más allá, supongo que lo veremos en los próximos años.



Imagen: ICMAT

Barbara Kraus fue una de las ponentes del segundo congreso celebrado dentro del programa temático Operator Algebras, Groups and Applications to Quantum Information

SHE DOES MATH: Isabel Fernández



Isabel Fernández participó como ponente en el congreso BYMAT del ICMAT

Campos de investigación:

Geometría diferencial, análisis geométrico, problemas variacionales relacionados con el área, superficies de curvatura media constante.

Laura Moreno Iraola. [Isabel Fernández](#) (Universidad de Sevilla) siempre tuvo predilección por la geometría, por ello, al terminar la carrera, solicitó una beca de iniciación a la investigación en el Departamento de Geometría de la Universidad de Granada, donde estudió y más tarde realizó la tesis. Desde entonces, sigue colaborando de manera asidua con sus miembros. Desde 2007 es profesora del Departamento de Matemática Aplicada I de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática de la Universidad de Sevilla, donde compagina la docencia con la investigación en las áreas de análisis geométrico y geometría diferencial. Su especialidad es el estudio de superficies que minimizan área (*superficies mínimas* o de curvatura media constante) o que presentan alguna propiedad especial relativa a su curvatura.

Las superficies mínimas son aquellas que tienen curvatura media cero. Surgen al buscar las superficies que, entre todas las que tienen la misma curva de contorno, abarcan la menor área posible. Desde el punto de vista físico, se corresponden con películas de jabón, elementos geométricos cuyo estudio fue introducido por el físico Joseph Plateau. Fernández ha investigado estas superficies en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y en otros espacios homogéneos. Aunque se enmarcan dentro del campo de la geometría, en su estudio se utilizan también técnicas de otras áreas de las matemáticas, como ecuaciones en derivadas parciales, teoría de la medida, o geometría algebraica.

Actualmente, Fernández estudia un tipo más general de superficies, las llamadas superficies de Weingarten, que son “aquellas en las que existe una relación entre su curvatura media y su curvatura de Gauss”, explica la investigadora.

Fernández, también secretaria del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS) y miembro de la Junta de Gobierno de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), puede presumir de haber sido la primera mujer española invitada a dar una conferencia en un Congreso Internacional de Matemáticos (ICM), el mayor evento internacional celebrado en el campo de las matemáticas. Su artículo “Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space”, escrito junto a su

Isabel Fernández (Linares, Jaén, 1979) es desde 2007 profesora en la Universidad de Sevilla, donde combina su actividad docente con la investigación en el área de geometría diferencial. Su resultado más importante hasta la fecha es la resolución del *problema de Bernstein* en el espacio de Heisenberg, junto a su colaborador y amigo Pablo Mira, con la que clasificaron completamente las superficies mínimas que son grafos enteros en dicho espacio. Este resultado la convirtió en la primera mujer española invitada a dar una conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM), el evento matemático más importante a nivel internacional, en su XXVI edición, celebrada en Hyderabad (India) en 2010. En la actualidad, también miembro de la Junta de Gobierno de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), y secretaria del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS). Fernández acudió el pasado mes de mayo al ICMAT para impartir una de las conferencias plenarias del congreso BYMAT (Bringing Young Mathematicians Together).

colaborador y amigo Pablo Mira y publicado en 2009 en la revista *Transactions of the American Mathematical Society*, fue el que la hizo merecedora de ello. En él, los géometras describían la resolución de llamado *problema de Bernstein* en el espacio de Heisenberg, en el que clasificaban por completo las superficies mínimas que son grafos enteros en este espacio. “Nos invitaron y fue algo totalmente inesperado, igual que la repercusión que aquello tuvo más tarde”, comenta Fernández. “La experiencia fue increíble. Fue un honor estar invitados a dar una conferencia en el congreso de matemáticas más importante a nivel mundial”, apunta. Fernández y Mira impartieron la conferencia “Constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Thurston geometries” en el [ICM celebrado en Hyderabad \(India\)](#) durante el mes de agosto de 2010.

Desde hace unos años, Fernández también participa de manera muy activa en actividades de divulgación. Sobre todo, imparte charlas de manera habitual y, actualmente colabora en la obra de teatro científico “[Científicas: pasado, presente y futuro](#)”, que ya ha destacado en diferentes concursos, como [Ciencia en Acción](#), donde consiguieron el primer premio de la modalidad ‘Puesta en Escena’ de la XIX edición, celebrada en 2018. La iniciativa, que ya ha sido vista por más de 10.000 escolares de 30 localidades diferentes, ha recibido, asimismo, el premio Universidad de Sevilla a la Divulgación Científica 2019. “Fue idea de Francisco Vega, un compañero de la Universidad de Sevilla, técnico de laboratorio. Él tiene una hija a la que le pidieron en el colegio realizar un trabajo sobre científicos, entonces se percató de que la niña no conocía mujeres científicas porque en sus libros siempre aparecían hombres, y si se mencionaba a alguna mujer, eran siempre las mismas, como Marie Curie”, comenta la investigadora. A él se le ocurrió, por lo tanto, mostrar referentes de mujeres científicas y el fomento de vocaciones de niños y niñas a través del teatro porque pensó que así los más pequeños absorberían mejor las historias. “Contactó conmigo y con otras cuatro compañeras de la universidad (Clara Grima, Adela Muñoz, M^a José Rodríguez y M^a Carmen Romero) y nos pareció un proyecto estupendo”, explica Fernández. “Al principio de la obra, cada una interpretamos a una científica del pasado, yo soy Hipatia y el resto da vida a Hedy Lamarr, Rosalind Franklin, Marie Curie y Ada Lovelace. Al final de la historia salimos nosotras presentándonos y les contamos a los espectadores quiénes somos y en qué consiste nuestro trabajo. La idea es poner ejemplos más reales y cercanos, para que los más jóvenes se den cuenta de que no tienes que ser un genio para dedicarte a la ciencia”, comenta.

“Supongo que dedicarme a las matemáticas me viene de familia”

Luis Martínez (Murcia, 1994) ha crecido entre matemáticos, aunque no se decantó por esta disciplina hasta finalizar el doble grado en Matemáticas e Ingeniería Física en la Universidad Politècnica de Catalunya. Tras ello, se especializó en matemáticas, a través del *Master's program in Mathematics* en la Universidad de Bonn (Alemania), lo que después le condujo al ICMAT. El pasado mes de septiembre comenzó su tesis sobre la ecuación cuasi-geostrófica bajo la supervisión de Diego Córdoba (ICMAT-UAM) gracias a beca del Consejo Europeo de Investigación (ERC, por sus siglas en inglés) que recibió el investigador, lo que él ve como una oportunidad para abrirse camino en la investigación y descubrir una nueva ciudad.

Imagen: Luis Martínez Zorúa



Luis Martínez Zorúa

Raquel G. Molina. Luis Martínez comenzó hace unos meses su tesis en el ICMAT. Bajo la tutela de Diego Córdoba, director científico del Proyecto Severo Ochoa del centro y ganador de una prestigiosa ERC Advanced Grant, el estudiante predoctoral dedicará los próximos años a la investigación de la ecuación cuasi-geostrófica, que modeliza el flujo de aire en las capas bajas de la atmósfera, y tiene aplicaciones al estudio de la formación de frentes de aire frío y caliente.

Su relación con las matemáticas empezó a temprana edad. Hijo, nieto y sobrino de matemáticos, fue una promesa en este campo desde muy joven. “Supongo que me viene de familia”, admite Martínez. Participó tres veces en la Olimpiada Matemática Española, y el último año logró la sexta posición, lo que le permitió viajar a Argentina para asistir a la Olimpiada

Internacional. Sin embargo, no se decantó por esta disciplina hasta finalizar sus estudios de doble grado en Matemáticas e Ingeniería Física en la Universidad Politècnica de Catalunya (UPC). “No tenía muy claro si prefería dedicarme a las matemáticas o a la física, así que opté por este grado para hacer las dos”, reconoce.

Al terminar la carrera se desplazó a Bonn (Alemania), donde se especializó en matemáticas a través del *Master's program in Mathematics*. “En comparación con la formación en España, allí había más variedad de asignaturas, lo cual también tiene una parte negativa ya que te especializas menos”, comenta el estudiante de doctorado. Ahora, se muestra ilusionado con la posibilidad de cambiar de aires. “Es la primera vez que visito Madrid, ni siquiera he estado en el Retiro”, admite Martínez.

“La investigación siempre me ha parecido divertida porque suponía un reto”, afirma el estudiante, optimista ante la perspectiva de comenzar una investigación más “real” que las que había llevado a cabo hasta ahora. Hasta este momento, apenas sabía nada de dinámica de fluidos, el área en el que se engloba su doctorado. Fue su madre quien le recomendó el proyecto. “Me pareció muy interesante, y mi director de tesis es un investigador fenomenal, así que decidí aprovechar esta gran oportunidad”. De su formación en el ICMAT espera muchas cosas. “Me parece muy gratificante estar un tiempo intentado hacer algo y lograr que finalmente salga”, reflexiona Martínez.

¿Y en un futuro cómo se ve? “Más allá de estar en un proyecto que me guste, no tengo expectativas a largo plazo”. Aunque de momento no le quita el sueño, reconoce que la investigación es un campo donde es difícil lograr estabilidad y tranquilidad. “De aquí a seis años, no sé dónde voy a estar, pero me gustaría conseguir una plaza fija en España”, reconoce, deseoso de mantener el contacto con su familia y amigos. De momento, se dedicará con entusiasmo a su tesis hasta agosto de 2023.

ENTREVISTA: Jan Maas

“El transporte óptimo es una herramienta poderosa en finanzas matemáticas”

Entrevista a Jan Maas, ponente invitado de la segunda conferencia BYMAT

Jan Maas es experto internacional en ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, transporte óptimo y análisis estocástico. Actualmente trabaja en el Instituto de Ciencia y Tecnología de Austria, y visitó Madrid para impartir una de las conferencias plenarias de la segunda edición del congreso *Bringing Young Mathematicians Together* (BYMAT), que tuvo lugar en mayo de 2019 en el ICMAT. Tras su ponencia charlamos un rato con él en el exterior del edificio, aprovechando el día soleado.

Imagen: Jan Maas



Jan Maas visitó el ICMAT para impartir una de las charlas de BYMAT

Ignacio del Amo

¿Qué es un proceso estocástico?

Es un concepto matemático que describe cualquier fenómeno sujeto a aleatoriedad. Muy a menudo depende del tiempo y del espacio, pero siempre hay algún componente aleatorio. Puede ser la naturaleza estocástica intrínseca del problema, la incertidumbre del observador o el ruido o la perturbación presentes en el sistema.

¿Podría darnos algunos ejemplos de la vida real?

Estos fenómenos están en todas partes. Un ejemplo sería el movimiento turbulento alrededor del ala de un avión. Otro ejemplo clásico son las finanzas: las tasas de interés, por ejemplo, se modelan usando movimientos brownianos o ecuaciones diferenciales estocásticas. Otro ejemplo es la dinámica de poblaciones. Y básicamente en todas partes donde hay ruido: meteorología, predicción del clima...

“Los fenómenos estocásticos están en todas partes”

¿Cómo se estudian matemáticamente estos procesos?

Muy a menudo se describen mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. La teoría nació en los años 40 del siglo pasado con los trabajos de Kiyoshi Itô. Recientemente ha habido muchos desarrollos, por ejemplo, la *teoría de caminos difíciles* de Terry Lyons o la *teoría de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas*. También es muy nueva la *teoría de estructuras de regulari-*

dad desarrollada por Martin Hairer (recibió la Medalla Fields por ello), que puede manejar señales aleatorias en el espacio y el tiempo. En este campo se da una interacción entre la teoría de la probabilidad y otras áreas de las matemáticas, a veces hay ideas provenientes de la geometría y del análisis.

“El transporte óptimo es una herramienta para comprender otros problemas”

Usted también investiga en transporte óptimo, ¿qué tipo de problemas tratan?

El problema clásico es, dada una distribución inicial de algún material, ¿cómo debe transportarlo de manera que vaya de ciertos puntos iniciales a determinados puntos finales, de tal manera que se minimice el coste total del transporte? Es un viejo problema que se remonta al siglo XVIII, propuesto por Gaspard Monge. De forma más reciente, en los años 40 del siglo pasado, Leonid Kantorovich formuló el problema con un lenguaje moderno. Hoy en día no se trata tanto de estudiar el transporte directamente, sino de utilizar el transporte óptimo como una herramienta para comprender otros problemas. En cierto sentido, el transporte óptimo nos ofrece una forma de definir distancias entre medidas de probabilidad, de manera que se adapte muy bien a la geometría en el espacio subyacente, haciendo emerger la geometría del espacio dado como medidas de probabilidad en ese espacio. Esto es útil tanto en problemas de estadística aplicada, como también para describir ecuaciones de evolución como ecuaciones en derivadas parciales. También se puede utilizar el transporte óptimo para obtener más información sobre el espacio subyacente.

“En ciencia de datos y aprendizaje automático hay una gran expectación en torno a las ideas del transporte óptimo”

Esto tiene aplicaciones en la industria, claro.

Sí, absolutamente. Aplicaciones a problemas de planificación (evidentes por la definición) y a la economía. En finanzas matemáticas se ha convertido en una herramienta bastante poderoso

sa en los últimos años. También en ciencia de datos y aprendizaje automático hay una gran expectación en torno a las ideas del transporte óptimo.

¿Cuáles son los principales desafíos y los problemas abiertos en estas áreas?

Uno de los principales desafíos del análisis estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas son las cuestiones relacionadas con la universalidad, es decir, pasar de una descripción microscópica de un sistema aleatorio a una descripción macroscópica, y mostrar que esta no es sensible a los detalles de los modelos subyacentes. En el transporte óptimo creo que es difícil mencionar un único gran problema abierto, pero yo personalmente estoy interesado en las aplicaciones a problemas provenientes de la teoría de la información cuántica. En este caso no consideramos distribuciones de probabilidad, sino matrices de densidad. Es una dirección prometedora, sería interesante tener más aplicaciones en esa área.

“Me interesan las aplicaciones del transporte óptimo a problemas de teoría de la información cuántica”

Además de este, ¿en qué otros problemas está trabajando actualmente?

Estoy tratando de traspasar los límites del transporte óptimo continuo al discreto. Muchos de los ejemplos se corresponden con lo que debería suceder, pero a veces el límite del transporte discreto viene dado por algo más complicado. En general, si haces matemáticas discretas sueles trabajar con objetos más fáciles, en el sentido de que requiere menos esfuerzo definirlos rigurosamente, pero son más difíciles de manejar que en el caso continuo, porque muchas fórmulas que son ciertas en el límite continuo, no se mantienen en el nivel discreto. Además, en el nivel continuo, a menudo hay varias formas equivalentes de ver un problema. Por ejemplo, en transporte óptimo hay un problema estático y un problema dinámico que son el mismo en el entorno continuo, pero no en el mundo discreto. Por lo tanto, no se tienen tantas herramientas, y es más difícil enfrentar el problema.

Traducción y edición: Ágata Timón García-Longoria



ENTREVISTA: Rafael Ramírez Uclés

“La principal dificultad en el aula de matemáticas es la gran diversidad que hay”

Entrevista a Rafael Ramírez Uclés, investigador en didáctica de las matemáticas y profesor en la Universidad de Granada

Rafael Ramírez Uclés es miembro del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Allí imparte clases en el Grado en Educación Primaria y en los másteres en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas y en Didáctica de la Matemática. Aparte, es investigador en la misma institución en las áreas de enseñanza y aprendizaje de la geometría: sentido espacial y de talento matemático. Ramírez impartió la conferencia plenaria “Enrich the mathematical talent” en el congreso de jóvenes investigadores BYMAT que tuvo lugar durante el mes de mayo en el ICMAT.

Laura Moreno Iraola

¿En qué consiste la línea de investigación en didáctica de las matemáticas en la que trabaja?

Trabajamos en diferentes áreas, en concreto, yo me he especializado en la investigación sobre alumnado con altas capacidades matemáticas y cómo atender sus necesidades educativas. Sobre todo, nos ocupamos de la parte de habilidades de visualización que, como expliqué en un [artículo](#) publicado en la sección del ICMAT ‘Café y Teoremas’, de El País, consisten en el desarrollo y dominio del sentido espacial para comprender mejor el mundo que nos rodea. Aplicado a las matemáticas, este enfoque consiste en enseñar geometría más allá de las fórmulas y memorización de términos y apreciar la geometría que nos rodea. También es posible comprender conceptos matemáticos de una manera más sencilla a través de la visualización, con la que conectamos nuestra percepción del mundo con las ecuaciones que lo explican.

Por otro lado, junto con un grupo de la Universidad de Valencia, estamos estudiando cómo estos chicos y chicas con altas capacidades en matemáticas entienden las demostraciones. Por último, estudio el *pensamiento funcional* del alumnado de educación primaria con altas capacidades como vía para tratar de introducir el álgebra.

¿Sus conclusiones se aplican de forma efectiva al aula?

Por supuesto, nos interesa que se traslade todo el material de investigación a los procesos de enseñanza y ver qué resultados

da. Por ejemplo, enseñamos a nuestro alumnado de magisterio y máster de Secundaria y Bachillerato técnicas para que ellos, como futuro profesorado, tengan recursos a la hora de atender a personas con alta capacidad y que puedan diseñar tareas que favorezcan el sentido espacial.

“Matemáticas no es una asignatura que no gusta, por lo menos, en primaria”

¿Responden ustedes a las demandas que tiene el profesorado? ¿Cuáles diría que son los principales problemas a los que se enfrenta a la hora de enseñar matemáticas?

La principal dificultad que yo encuentro es la gran diversidad que hay actualmente en las aulas españolas. En una clase de 25 alumnos y alumnas puedes encontrarte desde chicos y chicas con desfase curricular, a otros con altas capacidades o, simplemente, que tienen diferentes niveles de aprendizaje. En otros países, según mi experiencia, esto no pasa. Por ejemplo, el año pasado estuve en Boston (EE. UU.) visitando varios colegios y descubrí que allí suele haber dos profesores por aula y, además, tienen la mitad de alumnos y alumnas que aquí, es una estrategia que se podría adoptar en España. El profesorado necesita más recursos y formación para poder atender a esa diversidad.

¿Y en la metodología? ¿Cree que las matemáticas se podrían enseñar de una manera distinta?

Desde mi punto de vista, no sería necesario si se dotara al profesorado de más recursos, materiales y formación específica para atender a la diversidad de la que hablaba anteriormente. Los docentes están bien formados y no creo que las matemáticas sean una asignatura que no gusta, por lo menos, en primaria. La dificultad comienza en secundaria, pero porque los problemas y los temas que se tratan cuestan y, quizás, no estamos acostumbrados a que las cosas requieran un esfuerzo.

“El currículum en matemáticas está bien organizado y da orientaciones metodológicas adecuadas”

Entonces, ¿piensa que el currículum de las asignaturas de matemáticas está bien adaptado?

Sí, si lo miras con detalle, puedes comprobar que está bien organizado y da orientaciones metodológicas adecuadas.

Hay gente que lamenta la enorme diferencia que hay entre las matemáticas que se enseñan en el colegio o instituto y las del grado e investigación, ¿por qué existe esta brecha?

Porque el currículum va avanzando en contenidos de manera progresiva y en secundaria, por ejemplo, se entiende que no

es necesario que los chicos y chicas hagan demostraciones ni utilicen un lenguaje formal, por su nivel de maduración. En secundaria importa más que sepan resolver problemas y que entiendan que las matemáticas son funcionales. Cada etapa debe ir cubriendo muy bien lo que se ha de aprender, enseñar los conceptos de una manera adecuada, que los alumnos entiendan el significado de lo que están estudiando, sus usos y aplicaciones para que al llegar a niveles más superiores, cuando se hace un uso más específico y formal de las matemáticas, no haya dificultades.

¿Hasta qué punto cree que es enriquecedor para un investigador la divulgación y el contacto con otras ramas como, por ejemplo, la enseñanza no universitaria?

La divulgación es muy importante. Es indudable que el investigador tiene que escribir artículos en revistas científicas de impacto y darle salida a su investigación, compartirla con los miembros de su comunidad. Pero, por otro lado, con la divulgación haces llegar tu trabajo a un público más general, puedes hacer que haya una sociedad interesada por la ciencia, en nuestro caso, por las matemáticas, y, por lo tanto, esta va a ser una sociedad que va a evolucionar más. Merece la pena el esfuerzo que hacen muchos investigadores por transformar conceptos tan complicados con los que trabaja para que lo entienda un público general, algo que también hay que valorar.



Imagen: ICMAT

Rafael Ramírez ofreció en BYMAT una charla sobre didáctica de las matemáticas, campo en el que es especialista

CUESTIONARIO ICMAT

Conoce a varios de los participantes en la sesión de pósteres que tuvo lugar en el congreso BYMAT 2019

La segunda edición del congreso de jóvenes investigadores BYMAT, organizado el pasado mes de mayo en el ICMAT, incluía en su programa varias novedades respecto a la anterior edición. Entre ellas, una [sesión de pósteres](#) que dio a los participantes la oportunidad de compartir sus investigaciones, la mayoría perteneciente a sus tesis doctorales, con el resto de asistentes, procedentes de instituciones de todo el mundo. Hamzah Bakhti (Universidad Mohammed V de Rabat, Marruecos), María de Gádor Cabrera Padilla (Universidad de Almería), Emily Quintero (Universidad de Alcalá) y Jeyms Villanueva-Cantillo (Universidad de Cádiz) fueron algunos de los investigadores e investigadoras que expusieron sus primeros pasos en la investigación a sus colegas.

Ignacio del Amo y Laura Moreno Iraola

Hamzah Bakhti

Institución: Universidad Mohammed V de Rabat (Marruecos) y Universidad de Ciencias Aplicadas de Kiel (Alemania).

Posición: Estudiante de doctorado en el área de matemática aplicada.

Director de tesis: Lahcen Azrar (Universidad Mohammed V de Rabat, Marruecos)

Supervisor: Mohammed Es-Souni (Instituto de Materiales y Ciencias de la Tecnología, IMST, y Universidad de Ciencias Aplicadas de Kiel, Alemania).

¿Cuál es el tema de tu tesis doctoral? Estoy trabajando en matemática aplicada a diversos campos como ciencias de materiales y biología. En concreto, con mis colaboradores trato de obtener modelos matemáticos que describan diferentes fenómenos y de realizar simulaciones con los que poder entenderlos. En mi póster, explico cómo aplicamos las matemáticas al estudio de las enfermedades cardiovasculares.

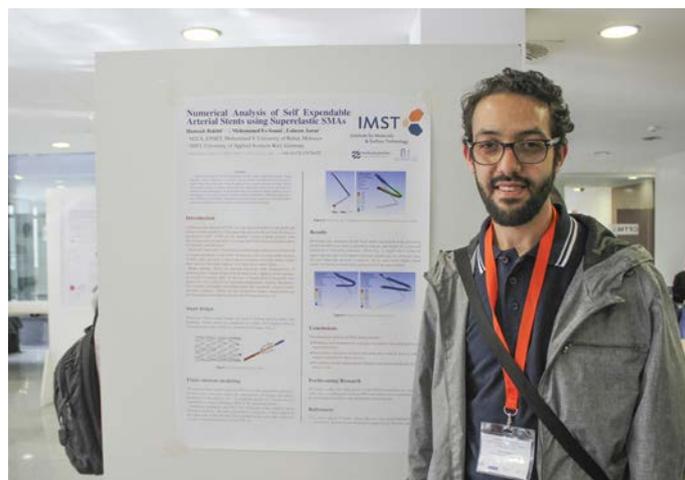
En los laboratorios de la Universidad de Ciencias Aplicadas de Kiel (Alemania), donde me encuentro realizando una estancia, llevamos a cabo investigaciones experimentales, es decir, primero simulamos diferentes problemas reales y más tarde los comprobamos y comparamos con los resultados numéricos.

¿Hacia dónde te gustaría que se encaminara tu carrera profesional?

Aún no lo tengo muy claro, ya que en Marruecos la única salida es ser profesor de universidad, mientras que en Europa puedes combinar la investigación y la docencia y también hay muchas empresas contratando matemáticos.

¿Cómo ha sido vivir un congreso de jóvenes investigadores como BYMAT?

Una experiencia muy enriquecedora. Estuve también la primera edición y ya me sorprendió el buen ambiente que hubo, pero



Hamzah Bakhti

esta segunda ha sido incluso mejor. Me parece una iniciativa muy buena, ya que reúne a jóvenes matemáticos de todas partes del mundo, el año pasado hice muchos amigos con los que he podido reencontrarme esta edición. Además, el ambiente que hay en el campus es inmejorable y Madrid me encanta. Estoy deseando que BYMAT continúe organizando congresos u otras actividades a los que pueda asistir.

María de Gádor Cabrera Padilla

Institución: Universidad de Almería.

Posición: Estudiante de doctorado en el área de análisis funcional.

Director de tesis: Antonio Jiménez Vargas (Universidad de Almería).

Supervisores: Moisés Villegas (Universidad de Cádiz) y Javier Alejandro Chávez (Universidad de Oklahoma, EE. UU.).



María de Gádor Cabrera Padilla

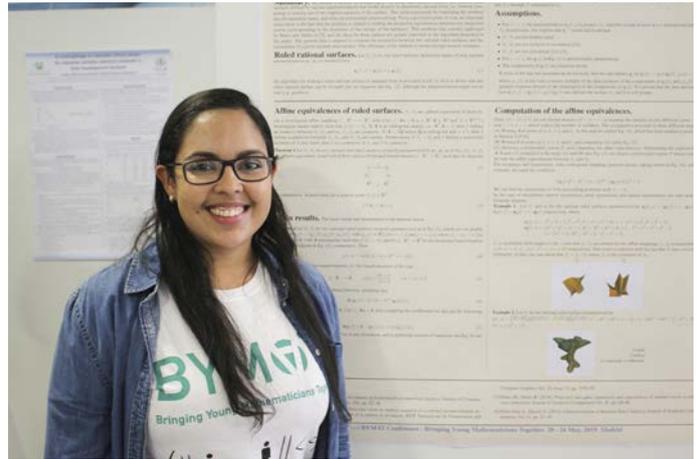
¿Cuál es el tema de tu tesis doctoral? Estudio teoría de dualidad para ideales de operadores de Lipschitz. En concreto, trabajo en la investigación doctoral del matemático Alexandre Grothendieck y en su *Résumé de Sao Paulo*, en el cual se relacionaba el dual topológico del producto tensorial entre espacios de Banach con espacios de operadores lineales y continuos. Nosotros hemos adaptado esa teoría a funcionales lipschitzianos que presenten propiedades de ideal diferentes a las dadas para operadores lineales y continuos.

¿Hacia dónde te gustaría que se encaminara tu carrera profesional?

Me gustaría seguir en el mundo de la investigación, como científica postdoctoral, y, si fuera posible, compaginarlo con la docencia universitaria.

¿Cómo ha sido vivir un congreso de jóvenes investigadores como BYMAT?

Estuve el año pasado y he repetido porque estoy encantada de encontrarme con otros jóvenes investigadores y de hablar con todos ellos sobre sus investigaciones, ya que eso enriquece también nuestros trabajos, aunque sean de otras áreas. He encontrado a gente que estudia problemas muy parecidos a los míos y hemos establecido muy buena relación y seguimos en contacto.



Emily Quintero

Emily Quintero

Institución: Universidad de Alcalá (UAH).

Posición: Profesora en Venezuela y estudiante de doctorado en el área de algoritmos simbólicos y numéricos y aplicaciones a curvas y superficies.

Director de tesis: Juan Gerardo Alcázar Arribas (Universidad de Alcalá).

¿Cuál es el tema de tu tesis doctoral? Mi investigación consiste en hallar equivalencias afines entre dos variedades algebraicas. En estos momentos estamos centrados en las equivalencias entre dos superficies regladas racionales. La idea es crear un algoritmo que diga si dos superficies dadas son equivalentes y, además, que las calcule. Comenzamos investigando simetrías de una superficie reglada y, a lo largo de este año, hemos podido generalizar el trabajo para equivalencias afines generales entre dos superficies regladas cualesquiera. La entrada del algoritmo son dos superficies regladas y la salida son las equivalencias afines de ellos. Lo interesante del problema es que es de \mathbb{R}^3 , pero con el método que nosotros empleamos, bajamos la dimensión y así encontramos funciones birracionales de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , que calculándolas nos llevarán a las equivalencias afines entre esas dos superficies.



La sesión de póster fue una de las novedades que incluía la segunda edición de BYMAT



Imagen: ICMAT

Los y las asistentes expusieron a sus colegas sus primeros pasos en la investigación

¿Hacia dónde te gustaría que se encaminara tu carrera profesional?

Actualmente trabajo como profesora en Venezuela y he obtenido una beca de la Fundación Carolina para realizar mi doctorado en España, por lo tanto, me gustaría seguir en el mundo de la investigación y, si es posible, compatibilizarlo con la docencia.

¿Cómo ha sido vivir un congreso de jóvenes investigadores como BYMAT?

Me parece que es una oportunidad muy buena para que los estudiantes podamos presentar nuestro trabajo y, al mismo tiempo, conocer qué están haciendo nuestros compañeros. El año pasado participé dando una charla y este año con la sesión de póster. El ambiente es muy agradable y me ha sorprendido la calidad de los trabajos.

Jeyms Villanueva-Cantillo

Institución: Universidad de Cádiz y Universidad Simón Bolívar (Colombia).

Posición: Estudiante de doctorado en el área de estadística e investigación operativa en Cádiz y profesor de universidad y secundaria en Colombia.

Director de tesis: Manuel Muñoz Márquez (Universidad de Cádiz).

¿Cuál es el tema de tu tesis doctoral? El cálculo de valores críticos para la selección de variables y análisis envolvente de datos (DEA), una técnica introducida hace alrededor de 40 años, pero aún sin un criterio que defina qué variables se incorporan al modelo. Por ejemplo, en un análisis de regresión, se tienen los valores para las variables y así decidir cuáles entran y cuáles no, pero para esta técnica no existen esos valores críticos.

¿Hacia dónde te gustaría que se encaminara tu carrera profesional?

He estado durante estos últimos años vinculado a la docencia y, tras el doctorado, me gustaría centrarme más en la investigación, pero continuar en la universidad.

¿Cómo ha sido vivir un congreso de jóvenes investigadores como BYMAT?

La experiencia ha sido inmejorable, he aprendido mucho en las sesiones de estadística, por ejemplo, sobre cuestiones de redes neuronales, codificación, etc. En general, el encuentro me ha permitido tener una visión más global sobre las matemáticas; en Colombia las ciencias y las matemáticas, en especial, no tienen tanto empuje como aquí. Conocer a gente tan diferente, que trabaja en tantas áreas de las matemáticas es lo que más me ha gustado. Es el primer año que he venido y me ha sorprendido en este aspecto.

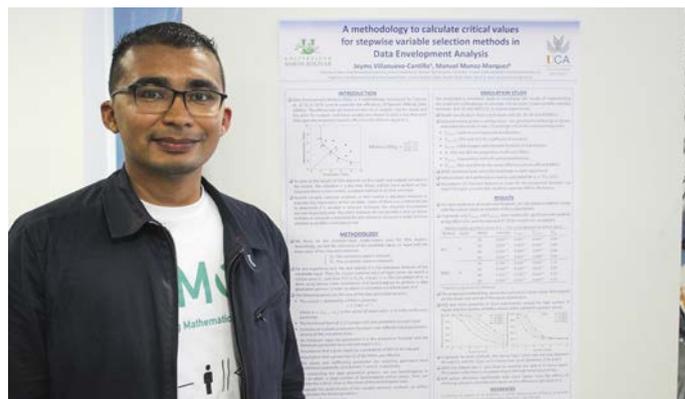


Imagen: ICMAT

Jeyms Villanueva-Cantillo

RESEÑA CIENTÍFICA: Singular integrals in quantum euclidean spaces

Título original: “Singular integrals in quantum euclidean spaces”.

Autores: Adrián M. González-Pérez (KU Leuven, Bélgica), Marius Junge (University of Illinois at Urbana, EE.UU.) y Javier Parcet (ICMAT)

Fuente: *Memoirs of the American Mathematical Society*

Fecha publicación: aceptado, pendiente de publicación

Uno de los giros más dramáticos en nuestra comprensión del mundo físico se produce en 1925, cuando Heisenberg demostró que se pueden deducir fenómenos cuánticos desde las ecuaciones de la física de Newton si interpretamos las variables que dependen del tiempo como matrices infinitas. John von Neumann propuso modelizar las matrices de Heisenberg como operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert. Las álgebras de von Neumann son una *forma no conmutativa o cuántica de la teoría de la medida* y proporciona un marco matemático riguroso para la mecánica matricial. El Programa de von Neumann responde a la necesidad de “cuantizar las matemáticas” para completar las nociones clásicas/relativistas de medida y geometría. Es un reto científico de extraordinaria magnitud que ha trascendido a las contribuciones del propio von Neumann. Así, hoy podemos hablar de *geometría no conmutativa, probabilidad cuántica, espacios de operadores, grupos cuánticos...* Más allá de su relevancia matemática, existen conexiones con la física teórica en teoría de cuerdas, teoría cuántica de campos o información cuántica. Esto justifica la necesidad de desarrollar el Programa de von Neumann en otras direcciones, el análisis armónico es una de tales direcciones.

En 1980, Alain Connes introduce la *geometría no conmutativa* [5] como extensión de la geometría diferencial sobre “variedades no conmutativas” en el lenguaje de las álgebras de operadores introducidas por von Neumann. Los arquetipos de variedad no conmutativa son los *toros cuánticos* y los *espacios Euclídeos cuánticos*. Dada Θ una matriz real antisimétrica $n \times n$, el toro n -dimensional asociado se define (vagamente) como el álgebra generada por operadores unitarios u_1, u_2, \dots, u_n que satisfacen las relaciones canónicas de conmutación $u_j u_k = \exp(2\pi i \Theta_{jk}) u_k u_j$. Cuando $\Theta=0$, los u_j son los caracteres primarios $x \rightarrow \exp(2\pi i x)$ y el álgebra asociada la de las funciones (suaves, continuas, acotadas...) sobre el n -toro clásico $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Cuando Θ no se anula, el álgebra es no conmutativa y la denominamos toro cuántico. Los espacios Euclídeos cuánticos admiten una definición similar, el álgebra de Heisenberg-Weyl es el modelo más conocido. Connes introdujo en [4] operadores pseudodiferenciales en toros cuánticos con objeto de extender el teorema del índice de Atiyah-Singer en este contexto. La profundidad del enfoque de Connes se ha confirmado posteriormente con el teorema de Gauss-Bonnet para toros cuánticos [6, 7] y una teoría sólida de operadores elípticos. En sus 40 años de historia, la geometría no conmutativa también ha desarrollado conexiones con la teoría de números y la teoría de cuerdas [12].

La teoría de operadores pseudodiferenciales se remonta a mediados de los años 60 con el trabajo de Kohn, Nirenberg y Hörmander [9]. La idea es usar la transformada de Fourier para representar operadores diferenciales $L = \sum_{|\alpha| \leq m} \alpha(x) \partial_x^\alpha$ que se pueden invertir salvo un término de error. Los operadores pseudodiferenciales se pueden interpretar como integrales singulares. La teoría de Calderón-Zygmund [3] —paradigma del análisis armónico moderno— permite así dar estimaciones tipo p -Sobolev de los términos de aproximación y error, lo que lleva a los resultados más profundos de la teoría. Desafortunadamente, el trabajo de Connes y sus colaboradores no incluye esta clase de estimaciones debido a profundas obstrucciones para desarrollar la teoría de integrales singulares sobre espacios L_p no conmutativos, definidos sobre álgebras de von Neumann.

En el trabajo reseñado se establecen el núcleo de la teoría de integrales singulares y el cálculo pseudodiferencial sobre los modelos de la geometría no conmutativa: las formas cuánticas de toros y espacios Euclídeos. Los últimos —también conocidos como deformaciones de

Moyal en física teórica o como álgebras CCR en probabilidad cuántica— incluyen el álgebra de Heisenberg-Weyl determinada por la posición y el momento en mecánica cuántica. Los resultados presentados sobre operadores pseudodiferenciales van más allá del trabajo de Connes, gracias a una nueva forma de la teoría de Calderón-Zygmund en dichas álgebras, que desarrollamos en el mismo trabajo y que incluye de manera crucial núcleos generales que no son de convolución. Esto nos permite deducir acotación L_p y estimaciones p -Sobolev para símbolos regulares, exóticos y prohibidos en los rangos esperados. En L_2 generalizamos también los teoremas de Bourdaud y Calderón-Vaillancourt [1, 2] para símbolos exóticos y prohibidos. Todo ello establece las formas cuánticas de los resultados más celebrados de la teoría de operadores pseudodiferenciales [13]. Como aplicación de nuestros métodos, demostramos regularidad L_p de soluciones de las primeras EDPs elípticas en álgebras de von Neumann.

Por último, cabe mencionar que la teoría de Calderón-Zygmund no conmutativa tiene precedentes en el trabajo de los autores con interesantes conexiones en teoría geométrica de grupos y funciones operator-Lipschitz. No obstante, a diferencia de los resultados anteriores [8, 10], este es el primer modelo que funciona en álgebras puramente no conmutativas. Esto es, álgebras que no contienen copias de espacios métricos doblantes en forma de producto tensorial o producto cruzado. Recientemente, parte de los autores han desarrollado en [11] una *forma algebraica de la teoría de Calderón-Zygmund* que es válida en álgebras de von Neumann generales equipadas con un proceso de Markov que satisface condiciones estrictamente algebraicas.

Referencias:

- [1] G. Bourdaud, Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels. *Comm. PDEs* 13 (1988), 1059-1083.
- [2] A.P. Calderón and R. Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 69 (1972), 1185-1187.
- [3] A.P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.* 88 (1952), 85-139.
- [4] A. Connes, C^* -algèbres et géométrie différentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris* 290 (1980), 599-604.
- [5] A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press Inc. 1994.
- [6] A. Connes and H. Moscovici, Modular curvature for noncommutative two-tori. *J. Amer. Math. Soc.* 27 (2014), 639-684.
- [7] A. Connes and P. Tretkoff, The Gauss-Bonnet theorem for the noncommutative two torus. *Noncommutative geometry and related topics*. Johns Hopkins Univ. Press. 2011, 141-158.
- [8] J. Parcet, Pseudo-localization of singular integrals and noncommutative Calderón-Zygmund Theory. *J. Funct. Anal.* 256 (2009), 509-593.
- [9] L. Hörmander, Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), 501-517.
- [10] M. Junge, T. Mei and J. Parcet, Smooth Fourier multipliers on group von Neumann algebras. *Geom. Funct. Anal.* 24 (2014), 1913-1980.
- [11] M. Junge, T. Mei, J. Parcet and R. Xia, Algebraic Calderón-Zygmund theory. Preprint 2019.
- [12] N. Seiberg and E. Witten, String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Physics* 09 (1999) 32.
- [13] E.M. Stein, *Harmonic Analysis*. Princeton Univ. Press. 1993.

RESEÑA CIENTÍFICA: Sobre la *solucionabilidad* del problema de Dirichlet para operadores elípticos

Título original: “Perturbations of elliptic operators in 1-sided chord-arc domains. Part I: Small and large perturbation for symmetric operators”.

Autores: Juan Cavero (ICMAT), Steve Hofmann (Universidad de Missouri, EE UU) y José María Martell (ICMAT).

Fuente: *Transactions of the American Mathematical Society*, 371 (2019), no. 4, 2797-2835.

Fecha publicación (online): 2019.

Link: <https://www.ams.org/journals/tran/2019-371-04/S0002-9947-2018-07536-5/>

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) permiten modelar fenómenos que provienen de las ciencias naturales, sociales o económicas. Un ejemplo son las ecuaciones que definen la evolución de procesos de difusión (como el calentamiento de un cuerpo sólido al que se le aplica una fuente de calor). En este tipo de problemas se buscan soluciones a la ecuación, asociada a un operador diferencial, definida en cierta región, prescribiendo los valores que toma la solución de la ecuación en la frontera o borde de esa región (es decir, el *dato en la frontera*). Hallar la solución a una ecuación diferencial, conociendo el dato de la frontera, es lo que se denomina resolver el *problema de Dirichlet* asociado al operador diferencial considerado.

El problema de Dirichlet fue planteado originalmente para la *ecuación de Laplace* –paradigma de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico–, y actualmente puede resolverse para muchos otros operadores diferenciales. En su resolución es clave la clase de datos que consideramos en la frontera. Para la ecuación de Laplace, con datos continuos y con soluciones que son continuas hasta el borde de la región, el conocido *criterio de Wiener* caracteriza la clase de regiones en las que se puede resolver dicho problema de Dirichlet.

Sin embargo, más allá del operador de Laplace resulta interesante estudiar el mismo problema para operadores más generales, como los elípticos de *tipo divergencia*, donde los coeficientes pueden variar con la posición. Además, la situación se vuelve más complicada cuando se estudian problemas en los que los datos en la frontera presentan peores comportamientos. Por ejemplo, podemos plantear el problema de Dirichlet- L^p (con $1 < p < \infty$) donde los datos en la frontera pertenecen a L^p , el espacio de funciones cuya potencia p es integrable, y en el que las soluciones buscadas coinciden con sus datos en la frontera, en un sentido de acercamiento a la misma en regiones que son conos generalizados (es decir, de forma *no-tangencial*). En esta formulación se permiten por tanto datos en la frontera que ya no son necesariamente continuos y que incluso pueden poseer singularidades. En casos como este, o aún más generales, ¿se puede establecer qué condiciones hacen falta para asegurar que el problema de Dirichlet- L^p tenga soluciones en el sentido anterior?

Existen diferentes métodos para aproximarse a esta cuestión. En el artículo “*Perturbations of elliptic operators in 1-sided chord-arc domains*”, Juan Cavero (ICMAT), Steve Hofmann (Universidad de Missouri, EE UU) y José María Martell (ICMAT) parten de un operador dado sobre el que ya se sabe cómo resolver el problema de Dirichlet- L^p (con cierto p , $1 < p < \infty$), y se estudia cuánto podemos modificar el operador en cuestión, de manera que seamos capaces resolver un problema de Dirichlet similar para el nuevo operador. Es decir, se trata de determinar qué *perturbaciones* del operador original siguen admitiendo soluciones al problema de Dirichlet.

En este artículo, Cavero, Hofmann y Martell han trabajado en dominios irregulares, que son *abiertos* y *conexos por caminos* y cuya frontera tiene *codimensión 1*. Suponiendo, en un sentido cuantitativo o invariante por reescalamiento, todas estas condiciones, han determinado ciertas condiciones que han de cumplir los operadores para garantizar la *solucionabilidad* buscada. En concreto, las condiciones son sobre la diferencia de los coeficientes del operador original y el perturbado, donde ambos son operadores simétricos reales. En el caso en que la discrepancia entre los coeficientes sea suficiente pequeña (en el sentido de cierta *medida de Carleson*), han demostrado que resolver problema de Dirichlet- L^p para el operador original se traduce en resolver el mismo problema (con el mismo valor p) para el operador perturbado. Más en general, para discrepancias grandes entre los coeficientes, lo que demuestran es que resolver problema de Dirichlet- L^p para el operador original permite resolver el problema de Dirichlet- L^q para otro valor $q \in (1, \infty)$ que no es necesariamente p .

Estos resultados extienden la teoría anterior de Fefferman-Kenig-Pipher [3] y Milakis-Pipher-Toro [5, 6], que consideraba dominios con un cierto grado de regularidad. Ahora, Cavero, Hofmann y Martell emplean un método alternativo que permite considerar dominios más generales.

En el trabajo en cuestión se proporcionan algunas aplicaciones en las que se pueden establecer consecuencias geométricas a partir de la resolución del problema Dirichlet- L^p . Por ejemplo, si una perturbación simétrica de operadores con coeficientes con cierto control sobre su regularidad, como el *laplaciano*, tiene la propiedad de que se puede resolver el problema de Dirichlet- L^p para algún $p \in (1, \infty)$, entonces la teoría de perturbación establece que es posible resolver el problema de Dirichlet- L^q para algún otro $q \in (1, \infty)$. Esto, junto al trabajo de J. Azzam, S. Hofmann, J. M. Martell, K. Nyström y T. Toro [2], permite establecer que el dominio ha que tener un exterior abierto en sentido cuantitativo y por tanto su frontera tiene cierto grado de regularidad (es *uniformemente rectificable*). Como puede observarse, se consigue obtener información geométrica sobre la región en la que es posible resolver un problema de Dirichlet.

En las cuestiones anteriores las técnicas que se usan requieren incluir como hipótesis que la región satisfaga cierta noción de conectividad fuerte. Sin esta hipótesis no se sabe si los resultados de perturbación anteriores son válidos, lo que presenta un reto interesante en el campo. Recientemente, J. Azzam, S. Hofmann, J. M. Martell, M. Mourougolou y X. Tolsa han presentado una caracterización de las regiones en las que se puede resolver el problema de Dirichlet- L^p , para algún $p \in (1, \infty)$ para el operador de Laplace. Esta caracterización geométrica involucra que la frontera sea regular, es decir, que sea uniformemente rectificable (como puede verse en [4]) así como una condición de accesibilidad a porciones de la frontera mediante caminos no-tangenciales. Este artículo [1], aún en proceso de revisión por pares, propone un resultado óptimo, pues ninguna de las condiciones impuestas puede ser eliminada.

Referencias:

- [1] J. Azzam, S. Hofmann, J. M. Martell, M. Mourgoglou, and X. Tolsa. Harmonic measure and quantitative connectivity: geometric characterization of the L^p -solvability of the Dirichlet problem. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1907.07102>
- [2] J. Azzam, S. Hofmann, J. M. Martell, K. Nyström, and T. Toro. A new characterization of chord-arc domains. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 19(4):967–981, 2017.
- [3] R. A. Fefferman, C. E. Kenig, and J. Pipher. The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations. Ann. of Math. (2), 134(1):65–124, 1991.
- [4] S. Hofmann, P. Le, J. M. Martell, and K. Nyström. The weak-property of harmonic and p -harmonic measures implies uniform rectifiability. Anal. PDE., 10(3):513–558, 2017.
- [5] E. Milakis, J. Pipher, and T. Toro. Harmonic analysis on chord arc domains. J. Geom. Anal., 23(4):2091–2157, 2013.
- [6] E. Milakis, J. Pipher, and T. Toro. Perturbations of elliptic operators in chord arc domains. Harmonic analysis and partial differential equations, Contemp. Math., 612:143–161, 2014.

CUÉNTAME TU TESIS: Bruno Vergara

Título de la tesis: “Weighted inequalities in Fluid Mechanics and General Relativity: Carleman estimates and cusped traveling waves”.

Autor: Bruno Vergara (ICMAT-UAM)

Director: Alberto Enciso (ICMAT)

Fecha de entrega: 16 de julio de 2019

Raquel G. Molina. Bruno Vergara (18 de febrero 1991, Valparaíso, Chile) sostiene que los cuatro años que ha dedicado al desarrollo de su tesis doctoral sobre ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) han sido altamente satisfactorios, y destaca que le han permitido colaborar con investigadores de primer nivel. Gracias a ellos, y especialmente a su director de tesis, Alberto Enciso (ICMAT), “ha podido aprender en qué consiste la actividad investigadora más allá de las propias técnicas matemáticas”, afirma el joven matemático. Define la investigación como un proceso lleno de momentos complicados, con estancamientos y altibajos, pero con una progresión continua.

Su tesis “Weighted inequalities in Fluid Mechanics and General Relativity: Carleman estimates and cusped traveling waves” está dividida en dos partes en las que se analizan soluciones singulares de ecuaciones en derivadas parciales enmarcadas en dos contextos diferentes: la Relatividad General y la Mecánica de Fluidos. En la primera parte, trata de generalizar un resultado conocido de la Relatividad General, las estimaciones clásicas de Morawetz, al caso de ondas con potenciales críticamente singulares y construir así nuevas desigualdades de Carleman. En la segunda, se centra en las ecuaciones de la mecánica de fluidos, en concreto, en la ecuación de Whitham para ondas en la superficie de un fluido. Vergara, junto a su director de tesis, ha conseguido probar la convexidad de las soluciones singulares de esta ecuación, de la que no se tenían resultados parciales.

Vergara afirma que “cada problema ha requerido la combinación de ideas ya conocidas con otras nuevas”. Por ejemplo, ha utilizado estimaciones con pesos singulares y crecimiento *ad-hoc* para controlar un potencial críticamente singular. Otra idea novedosa es una estrategia para encontrar soluciones singulares a EDPs en baja regularidad. Para ello, ha recurrido a la construcción de una solución aproximada empleando una mezcla de análisis asintótico fino cerca de las singularidades con estimaciones asistidas por ordenador.

Actualmente, el matemático se encuentra en la Universidad de Zúrich (Suiza), con una plaza como investigador postdoctoral, y afirma que le gustaría seguir ligado al mundo académico en el futuro.

A continuación, presenta su trabajo doctoral.

La influencia de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) es tal que se puede afirmar que no hay rama de las ciencias que no las utilice: las ecuaciones de Maxwell son la piedra angular de la teoría electromagnética; las ecuaciones de Navier-Stokes, el fundamento de la hidrodinámica; la ecuación de Schrödinger, el sustento de la revolución cuántica en la física; la ecuación de Black-Scholes, la base de los cálculos financieros que durante la primera década de este siglo fueron claves en el derrumbe de la economía. El éxito de las ecuaciones diferenciales parciales, con aplicación también en diversas ramas de la matemática teórica, radica en su capacidad de modelar una enorme diversidad de fenómenos físicos, biológicos, químicos, de la ingeniería, de la economía, etcétera.

Una pregunta fundamental en la teoría es saber si un sistema dado de ecuaciones en derivadas parciales tiene soluciones con *singularidades*, esto es, puntos con un comportamiento diferente al resto, donde las cosas no transcurren de manera *suave*. Asimismo, en los modelos en los que la *geometría ambiente* presenta algún tipo de singularidad, resulta interesante entender el efecto que esta tiene en las soluciones. En mi tesis, las singularidades aparecen de dos formas diferentes. Por un lado, a través de ecuaciones de ondas geométricas con *potenciales críticamente singulares*, motivadas por *problemas de frontera* en cierto tipo de espacio-tiempos de la teoría de la relatividad general. Por otro, mediante el estudio de ondas en mecánica de fluidos, con el análisis del perfil de una *onda viajera*, periódica y de altura máxima, la cual exhibe singularidades en forma de cúspides que son asintóticamente de la forma $\sqrt{|x|}$.

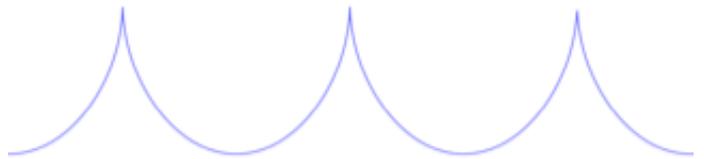
La principal característica de las primeras EDPs mencionadas es que se pueden escribir como una parte regular más un potencial *fuertemente singular* que depende de la distancia al borde de una variedad lorentziana $(n+1)$ -dimensional. Dichos potenciales, los cuales escalan como el *operador de Laplace-Beltrami*, se denominan *críticamente singulares* y por lo general son difíciles de tratar con métodos estándar que solo permiten obtener estimaciones en $L_{loc}^{(n+1)/2}$. Ecuaciones de ondas con singularidades críticas aparecen de manera natural en el contexto de los espacio-tiempos de tipo *anti-de Sitter* (AdS) de la física teórica, en particular, al estudiar *problemas de Cauchy* con datos en el *infinito conforme*. En el modelo simplificado de un dominio cilíndrico en el *espacio de Minkowski*, esto lleva a considerar un potencial que diverge como el inverso del cuadrado de la distancia al borde del cilindro y cuya intensidad juega un papel similar a la masa de los campos modelados por la EDP en AdS.

Para probar propiedades de unicidad en estas ecuaciones de ondas geométricas resulta necesario desarrollar nuevas estimaciones de *tipo Carleman* con pesos óptimos adaptados a la geometría de la singularidad en el borde. En términos generales, *observabilidad* es sinónimo de unicidad cuantitativa, es decir, define una noción de *continuación única* en la que los datos de Cauchy prescritos en la frontera controlan una energía significativa de la solución. El principal resultado de esta parte nos dice que basta con medir la derivada normal en el borde (el *dato Neumann*) durante un tiempo lo suficientemente largo, que sólo depende de la geometría ambiente y de la intensidad del potencial, para obtener información sobre la energía H^1 (con pesos) de las soluciones.

De manera muy relacionada con lo anterior, una cuestión interesante es la construcción de un análogo lorentziano del *laplaciano fraccionario*. La relación entre *operadores covariantes* en *variedades conformemente compactas* de tipo Einstein y las *potencias fraccionarias del laplaciano* ha despertado un gran interés tanto en *geometría riemanniana* como en EDPs *elípticas no-locales*. Uno de los resultados de mi trabajo doctoral ha sido

extender esta relación a variedades lorentzianas, probando que las potencias fraccionarias del *operador de ondas estándar* (en el espacio plano) se pueden construir como *operadores de Dirichlet-Neumann* asociados con ecuaciones de ondas en el *semi-espacio de AdS*. Estos espacio-tiempos asintóticamente AdS juegan un papel fundamental en cosmología debido a su conexión con la conjetura AdS/CFT de la teoría de cuerdas, de forma que esta construcción no solo es interesante desde el punto de vista matemático, sino que comparte cierta conexión con algunas preguntas de la física teórica.

En la segunda parte estudiamos la ecuación de Whitham, que sirve como modelo unidimensional para el estudio de ondas superficiales en el agua, dentro de la mecánica de fluidos. Este modelo de ecuación *dispersiva no-local* admite soluciones en forma de ondas solitarias así como soluciones singulares. En este último, la ecuación se popularizó debido a una conjetura sobre la existencia de ondas viajeras extremas con cúspides de la forma $\sqrt{|x|}$. A través de un delicado argumento de *bifurcación global*, Ehrnström y Wahlén probaron en 2016 que, efectivamente, la ecuación de Whitham presenta soluciones en forma de ondas viajeras de altura máxima con cúspides de regularidad $C^{1/2}$. Este comportamiento singular se produce por el balance entre dos cosas: el término lineal dado por un *operador inhomogéneo débilmente dispersivo* que gobierna la ecuación y la no-linealidad, que en este caso es cuadrática como en la ecuación de Euler de la que se deriva.



Onda viajera de la ecuación de Whitham que se comporta asintóticamente con cúspide en $x=0$

La convexidad de las soluciones de altura máxima de Whitham es el núcleo central de la última parte de mi tesis. De manera similar al famoso caso de las ondas de agua de Stokes para la ecuación de Euler, se había conjeturado que las ondas de forma extrema del modelo de Whitham tenían un perfil convexo entre picos consecutivos. En el caso de Stokes, la convexidad fue probada en 2004, casi dos décadas después de la demostración de existencia de ondas con esquinas de 120° . En la ecuación de Whitham, la forma del operador lineal no-local hace que la prueba de la convexidad siga una estrategia completamente diferente a la de la conjetura de Stokes. La demostración se basa en un método de punto fijo que mezcla análisis asintótico fino cerca de las cúspides con estimaciones asistidas por ordenador (*computer assisted proofs*) para construir soluciones aproximadas.

Todos estos resultados de la investigación plasmados en la tesis nos abren nuevos caminos. ¿Se pueden hacer afirmaciones sobre la observabilidad de las ecuaciones de onda en espacios de tipo asintóticamente AdS? ¿Cuál es la regularidad óptima? ¿Qué ocurriría al cambiar el modelo cilíndrico por otro dominio convexo? En la segunda parte, correspondiente a dinámica de fluidos, la flexibilidad de la técnica utilizada en la prueba de la convexidad también nos ha permitido analizar la cuestión de la unicidad global en el modelo de Whitham. Sería interesante estudiar otros modelos con baja regularidad y probar la existencia de soluciones de EDPs con cúspides o esquinas. Muchas de estas cuestiones están conectadas entre sí y, en cualquier caso, nos encaminan a seguir ampliando nuestro conocimiento sobre soluciones singulares de EDPs.

Resultados

Alberto Enciso (ICMAT) recibe una *Consolidator Grant* del Consejo Europeo de Investigación

“Analysis of geometry-driven phenomena in fluid mechanics, PDE’s and spectral theory”, el proyecto de Alberto Enciso, Científico Titular del CSIC en el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), ha recibido una de las 301 *Consolidator Grants* que el Consejo Europeo de Investigación (ERC) ha concedido en la última convocatoria. Supone la única subvención de este tipo concedida en esta ocasión a un investigador español en el campo de las matemáticas.

Durante cinco años y con un presupuesto de 1,8 millones de euros, el investigador estudiará nuevas propiedades de las ecuaciones en derivadas parciales y su aplicación a la física. “Para ser capaces de desentrañar los fenómenos que tienen lugar en la naturaleza, debemos recurrir a ideas innovadoras, y cada vez más potentes, que nos permitan entenderlos y describirlos”, comenta Enciso, quién en 2015 obtuvo una *Starting Grant* del ERC.

El proyecto se centra en tres áreas. En primer lugar, en la formación de singularidades en mecánica de fluidos, donde tratará de entender cómo un fluido desarrolla puntos de comportamiento explosivo o patológico, como ocurre al romper una ola. Por otro lado, estudiará las propiedades geométricas en las ecuaciones diferenciales no solo de la mecánica de fluidos, con énfasis en fluidos en equilibrio, sino también de la mecánica cuántica. En este sentido, tratará de entender la evolución de los condensados de Bose-Einstein, también llamados *superfluidos*. Por último, trabajará en la teoría espectral, que describe matemáticamente las frecuencias fundamentales de vibración de los objetos y que regula, por ejemplo, el sonido de un tambor.

Investigadores del ICMAT ponen punto final a una conjetura de Chern

La llamada conjetura de Chern ha sido uno de los problemas abiertos más importantes en el área de la topología simpléctica durante más de 20 años. En 2015 fue [resuelta](#) para espacios de dimensión cinco por Francisco Presas, Científico Titular del CSIC en el ICMAT, Roger Casals, entonces estudiante de doctorado de Presas y ahora profesor en la universidad de Davis en California, y Dishant M. Pancholi, del Chennai Mathematical Institute (India). Tan solo un par de meses después de que *Annals of Mathematics* –una de las revistas científicas más prestigiosas en el campo de las matemáticas– aceptara su resultado, otro grupo de matemáticos de la Universidad de Stanford anunció una demostración del caso general.

En su trabajo, el grupo de Stanford fue capaz de generalizar el llamado disco *overtwisted* –bien conocido en dimensión 3– para resolver el problema. El artículo de 2015 de Presas se basaba en otro modelo de controlador, introducido por el matemático Klaus Niederkrugger en el año 2005, el *plastikstufe*. Además de esta, había hasta siete definiciones alternativas de controladores universales, introducidas en los 15 años anteriores. Sin embargo, no se sabía cuál era la relación entre esas antiguas nociones y la general propuesta por Borman, Eliashberg y Murphy, hasta hace poco. “Tras dos años de trabajo, conseguimos demostrar que todas las definiciones alternativas de controlador universal son equivalentes a la definición introducida por los investigadores de Stanford”, afirma Presas. El [artículo](#) en el que incluyen esta demostración, publicado en 2019 en el *Journal of the American Mathematical Society*, ha supuesto un punto final a la resolución de la conjetura de Chern, y, además, ha validado el trabajo de muchos matemáticos del área en los últimos 20 años.

Imagen: ICMAT



Alberto Enciso ha obtenido un segundo ERC Grant en 2019

Imagen: OESTA



Francisco Presas, uno de los autores de los trabajos sobre la conjetura de Chern, celebró el pasado mes de diciembre su 45 cumpleaños con un congreso en su honor en el ICMAT

Los algoritmos que coordinan un pelotón de drones

Hoy en día los drones se emplean en numerosos contextos: en tareas de rescate tras una catástrofe, en labores de vigilancia de áreas oceánicas (por ejemplo, para monitorizar la dispersión de plásticos), para transportar cargas pesadas o grabar eventos deportivos. Muchas de estas acciones no se pueden desarrollar con una sola aeronave, sino que es necesario un conjunto de ellas que actúen de manera coordinada. El proyecto "Decentralized strategies for cooperative robotic swarms", de [Leonardo Colombo](#), investigador del ICMAT, ha conseguido 300.000 euros de la Fundación "la Caixa", dentro de su programa [Postdoctoral Junior Leader](#), para desarrollar este aspecto durante los próximos tres años.

Colombo pretende desarrollar las herramientas matemáticas que mejoren la coordinación y colaboración entre robots dinámicos. El principal desafío específico del estudio es diseñar nuevos algoritmos de control de formaciones descentralizadas, aplicados al movimiento coordinado de drones de cuatro rotores. "En concreto, deberán ejecutar misiones cooperativas para el transporte de objetos", explica el científico.

Imagen: ICMAT



Leonardo Colombo

Matemáticas para hacer más seguro el coche autónomo

Más allá de los retos científicos y tecnológicos que supone la conducción automática en un entorno complejo e imprevisible, los científicos también se tienen que enfrentar a otras cuestiones relacionadas con su implementación: analizar los riesgos de este nuevo tipo de automoción, diseñar la comunicación entre la máquina y el humano, estudiar el impacto que tendrá en la economía y en ciertos sectores industriales, entre otros aspectos. De todo esto se ocupa el proyecto "[Trustonomy: Building Acceptance and Trust in Autonomous Mobility](#)", en el que participa David Ríos, investigador del ICMAT y director de la [Cátedra AXA-ICMAT en Análisis de Riesgos Adversarios](#).

La iniciativa ha recibido 3,9 millones de euros del programa H2020 de la Unión Europea. El objetivo principal del proyecto es, como indica su título, crear aceptación y confianza en la movilidad autónoma. Ríos se encargará de generar modelos de análisis de riesgos que permitan predecir y responder ante los peligros específicos vinculados a esta forma de movilidad emergente. El proyecto, que comenzó el 1 de mayo de 2019

y finalizará el 30 de abril de 2022, propondrá mejoras en los algoritmos que dirigen la conducción autónoma. En él participan, además del ICMAT, otras 15 organizaciones de diferentes países europeos.



Imagen: Trustonomy

El proyecto Trustonomy tiene como objetivo principal crear aceptación y confianza en la movilidad autónoma

Un nuevo proyecto Marie Curie de la Unión Europea para estudiar la transformada de Fourier

El investigador del ICMAT Javier Ramos ha recibido una de las becas del [programa Marie Curie de la Unión Europea](#) para estudiar el llamado problema de restricción de la transformada de Fourier, que trata de entender cómo se comporta la transformada de Fourier restringida a conjuntos de medida cero. Ramos analiza el caso particular de funciones que cumplen una serie de propiedades, denominadas L^p . Su objetivo es "determinar para qué valores de p es posible restringir la transformada de Fourier de funciones en L^p a cierto tipo de superficies". La restricción es de por sí muy sorprendente, ya que no podemos asegurar continuidad de la transformada de Fourier salvo para el caso de $p=1$.

En su proyecto, "A multilinear approach to the restriction problem with applications to geometric measure theory, the Schrödinger equation and inverse problems", el investigador propone utilizar estimaciones multilineales con la dependencia óptima en la transversalidad para deducir estimaciones lineales, que son una forma cuantitativa de probar que la restricción es posible.

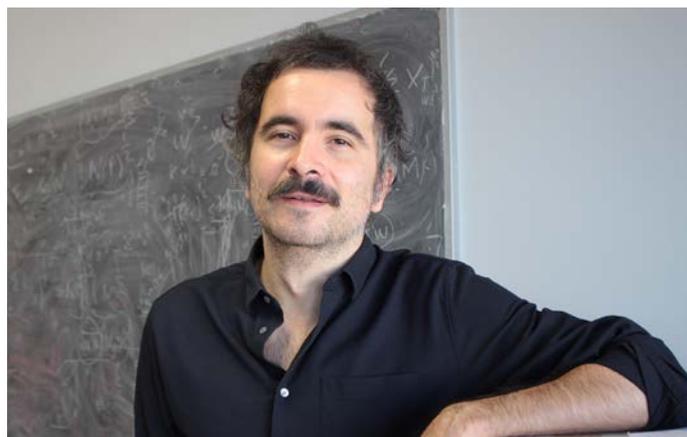


Imagen: ICMAT

Javier Ramos

Las tesis de M^a Ángeles García Ferrero y Carlos Mudarra, desarrolladas en el ICMAT, reciben dos de los Premios Vicent Caselles 2019

Carlos Mudarra, investigador postdoctoral del ICMAT, y M^a Ángeles García Ferrero, investigadora postdoctoral en el Instituto Max Planck de Matemáticas de Leipzig (Alemania), ambos antiguos estudiantes de doctorado del Instituto, han sido reconocidos con el [Premio de Investigación Matemáticas Vicent Caselles 2019](#) de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Fundación BBVA. Estos premios, otorgados a investigadores e investigadoras menores de 30 años que se

encuentran en las primeras etapas de su carrera, tienen como objetivo distinguir a jóvenes “cuyo trabajo doctoral sea pionero e influyente en la investigación internacional en matemáticas para servirles de estímulo y favorecer su continuación”, según recoge la [nota de la Fundación BBVA](#).

El jurado de los Premios ha destacado de García Ferrero, quien realizó su doctorado bajo la supervisión de Alberto Enciso (ICMAT-CSIC), que “sus resultados más destacables aportan una teoría completa de aproximación para soluciones de ecuaciones parabólicas y su aplicación al estudio de puntos calientes y superficies isotermas”. De Mudarra, antiguo estudiante de doctorado de Daniel Azagra (ICMAT-UCM), se resalta que “en su tesis doctoral ha resuelto problemas relevantes de aproximación y extensión diferenciable de funciones convexas en espacios de Banach”.

El investigador del ICMAT David Pérez García, Premio Fundación Banco Sabadell a las Ciencias e Ingeniería

La [Fundación Banco Sabadell ha distinguido](#) a David Pérez García, investigador del ICMAT y catedrático en de Universidad Complutense de Madrid (UCM), con el III Premio Fundación Banco Sabadell a las Ciencias y la Ingeniería, en el que colabora el BIST (Barcelona Institute of Science and Technology). El jurado, presidido por el economista Andreu Mas-Colell, ha reconocido sus contribuciones a la información cuántica, espacios de Banach y teoría de operadores. Pérez-García y su equipo trabajan en el desarrollo de una nueva teoría de la información, combinando las ideas del matemático Shannon, de cómo comprimir, corregir y tratar la información con la física cuántica. El premio es uno de los reconocimientos científicos más importantes de nuestro país. Está dotado con 50.000 euros y tiene como objetivo reconocer la trayectoria de jóvenes investigadores.

Imagen: María Ángeles García Ferrero



María Ángeles García Ferrero

Imagen: Fundación BBVA



Carlos Mudarra

Imagen: Universidad Complutense de Madrid



David Pérez García

Congresos, escuelas y programas temáticos

ICMAT reúne a los mayores expertos internacionales en ordenadores cuánticos

Los ordenadores cuánticos han dejado de ser una tecnología prometedora del futuro y parece que empiezan a alcanzar hitos reales. Esta nueva era de la computación requiere el desarrollo de fundamentos físicos y matemáticos novedosos como los que trata el Laboratorio Ignacio Cirac del ICMAT. Dentro de este proyecto, y en colaboración con los Institutos de Física Teórica, Física Fundamental y la Universidad del País Vasco, se ha organizado el congreso internacional sobre Simulación y Computación Cuántica (QSC2019) que congregó en el centro del 14 al 18 de octubre a los mayores expertos mundiales de la materia.

Como ponentes internacionales, destacó la participación de John Martinis, jefe del grupo experimental de Google que está construyendo un ordenador cuántico. También asistió Frank Wilhelm-Mauch, coordinador del proyecto OpenSuperQ, que pretende construir un ordenador cuántico en Europa usando tecnología de circuitos superconductores. El QSC2019 es la guinda a todo un trimestre que el ICMAT ha dedicado a la teoría de la información cuántica. El principal precursor, Pérez-García, coordina, junto con Ignacio Cirac -director del Instituto Max Planck de Óptica Cuántica y Premio Príncipe de Asturias-, el Laboratorio del Instituto que lleva su nombre.

¿Cómo se aplican los métodos geométricos a las ciencias naturales?

Tanto la física teórica como la ingeniería se nutren de diversos métodos geométricos. Esta rama de las matemáticas tiene aplicaciones a la mecánica cuántica, la relatividad y la cosmología, las teorías de campo, la termodinámica, la mecánica clásica y de fluidos, la simulación numérica de sistemas físicos, entre otras. El ICMAT cuenta con un número significativo de especialistas en este campo, que se han unido para organizar durante estos meses el programa temático de investigación "[Current trends in Geometric methods in Natural Sciences](#)". Comenzó el pasado 2 de septiembre y se extendió hasta el 20 de diciembre de 2019.

El programa incluyó tres actividades principales: la conferencia inaugural [XXVIII Fall Workshop on Geometry and Physics](#) (celebrada del 2 al 6 de septiembre), la [Escuela GESTA](#) (del 10 al 13 de diciembre) y el [Workshop on Geometric Methods in Symplectic Topology](#) (del 16 al 20 de diciembre), que fue el evento de clausura del trimestre temático, además de la celebración del 45 cumpleaños de Francisco Presas, investigador del ICMAT y experto en topología simpléctica.



John Martinis, jefe del grupo experimental de Google que está construyendo un ordenador cuántico, durante su charla



El programa temático "Current Trends in Geometric Methods in Natural Sciences" del ICMAT comenzó con la conferencia inaugural XXVIII Fall Workshop on Geometry and Physics

Espacios de Banach: pieza clave del análisis funcional

El congreso “[Banach spaces and Banach lattices](#)”, que tuvo lugar del 9 al 13 de septiembre en el ICMAT, reunió a especialistas de todo el mundo en espacios de Banach, espacios vectoriales dotados de una norma que permite medir vectores (y por lo tanto distancias entre elementos del espacio). Un espacio de Banach es además completo, lo que quiere decir que cualquier sucesión infinita de vectores que se van acercando entre sí cada vez más convergen a un único punto límite del espacio.

El congreso estuvo formado por cuatro minicursos, seis conferencias plenarias, charlas cortas y sesiones de póster diarias.

Imagen: ICMAT



El congreso “Banach spaces and Banach lattices” estuvo formado por cuatro minicursos, seis conferencias plenarias, charlas cortas y sesiones de póster

El futuro de la mecánica de fluidos

El ICMAT acogió en el mes de junio la primera escuela de verano en mecánica de fluidos, que reunió en el centro a expertos internacionales con unos 50 estudiantes interesados en el área. Se impartieron seis cursos de tres horas, en los que se introdujeron temas de gran interés en la investigación actual, como el estudio de soluciones débiles para las ecuaciones de Navier-Stokes, la singularidad y la simetría en las ecuaciones en dos dimensiones de fluidos incompresibles y la pérdida de regularidad en soluciones de estas ecuaciones, entre otros.

Escuela JAE de Matemáticas 2019

[La Escuela JAE de Matemáticas 2019](#) celebrada del 10 al 21 de junio en el ICMAT congregó a 70 estudiantes de los últimos años de grado y máster en Matemáticas. Los participantes recibieron formación en temáticas que suelen quedar fuera de los currículum académicos y que son de especial relevancia en la investigación actual, como métodos geométricos aplicados a la robótica, topología de variedades complejas, combinatoria o pruebas asistidas por ordenador aplicadas al análisis matemático.



Imagen: ICMAT

Escuela JAE de Matemáticas 2019

Imagen: ICMAT

ICMAT
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

**SUMMER SCHOOL ON
FLUID MECHANICS
AT THE ICMAT**

24 - 28 June 2019
Madrid

Speakers

- Peter Constantin (Princeton University)
- Tristan Buckmaster (Princeton University)
- Gianluca Crippa (Universität Basel)
- Francisco Gancedo (Universidad de Sevilla)
- Javier Gómez-Serrano (Princeton University)
- Yao Yao (School of Mathematics, Georgia Tech)

Accommodation grants for students until **15 May 2019** and registration until **14 June 2019** at <https://www.icmat.es/es/events/conferences/summer-school-on-fluids-mechanics>

Organisers
Ángel Castro (ICMAT)
Diego Córdoba (ICMAT)

El ICMAT acogió en el mes de junio la primera escuela de verano en mecánica de fluidos

Divulgación

¿Cuántos métodos para multiplicar conoces?

El último libro de la colección “Miradas matemáticas”, *Los secretos de la multiplicación*, está firmado por Raúl Ibáñez, profesor de la Universidad del País Vasco y divulgador. El texto se adentra en la historia de la humanidad, en concreto de las matemáticas, a través de los métodos empleados por las diferentes civilizaciones para multiplicar números. El origen de esta operación, hoy tan familiar y sencilla, se remonta a la prehistoria, y su evolución está totalmente ligada a los sistemas de numeración.



Imagen: Raúl Ibáñez

El matemático y divulgador Raúl Ibáñez es el autor de 'Los secretos de la multiplicación', noveno número de la colección 'Miradas Matemáticas'

Además de numerosas anécdotas y nociones históricas, el libro incluye propuestas para poner en práctica los conocimientos presentados. "Son una serie de actividades didácticas con una importante componente creativa, con el objetivo de entender mejor, con mayor profundidad y desde otras perspectivas lo estudiado en el texto, e incluso, aprender más", comenta Ibáñez.

El certamen de educación científica Ciencia en Acción cumple 20 años

200 experiencias divulgativas invadieron la localidad alicantina de Alcoy del 4 al 6 de octubre como parte de la XX edición de Ciencia en Acción (CeA), una feria y concurso de educación científica con el que colabora el ICMAT desde sus primeras ediciones. "De estos años, destacaría el interés de los profesores y profesoras en conseguir que su alumnado participe de forma activa en CeA. Han comprobado que esta iniciativa es un crisol de nuevas vocaciones científicas. Aún recuerdo una frase de uno de los alumnos de las primeras ediciones: "hemos descubierto que nos gusta descubrir", aseguraba Rosa María Ros, directora del proyecto desde sus inicios.



La feria y concurso de educación científica Ciencia en Acción celebró su XX edición en Alcoy (Alicante)

¿Cuántos colores hacen falta para colorear un mapa?

El ICMAT celebró, junto a otros centros del CSIC, la Noche Europea de l@s Investigador@s, con una actividad conjunta en Medialab-Prado (Madrid), que tuvo lugar el 27 de septiembre. El Instituto dirigió el taller "Mapas y mates", en el que se presentó una cuestión de apariencia sencilla pero que intrigó a los matemáticos durante décadas: el problema de los cuatro colores. El problema trata de encontrar el mínimo número de colores que se pueden asignar a los países de un mapa político, de tal forma que no existan dos con el mismo color que compartan frontera. En el taller se introdujeron la teoría de grafos, la topología, las demostraciones asistidas por ordenador y otros conceptos relacionados con este problema matemático.

Jezabel Curbelo, profesora en la Universidad Autónoma de Madrid y miembro del ICMAT, y Marco Castrillón, profesor de la Universidad Complutense de Madrid, fueron los encargados de desarrollar la actividad, con el apoyo de la Unidad de Cultura Científica del ICMAT.



'Mapas y mates' fue el taller que el ICMAT organizó con motivo de la Noche de los y las investigadores 2019

Los límites de las matemáticas ponen fin a la primera temporada de 'Revoluciones Matemáticas'

El quinto capítulo de la serie de animación 'Revoluciones matemáticas', titulado "Los límites de las matemáticas", narra en un tono informal y humorístico un apasionante episodio de la historia de las matemáticas y su revolucionaria consecuencia: la incompletitud de las matemáticas. En el episodio, creado por el ICMAT, la empresa Divermates y la animadora Irene López, se explica el famoso teorema del matemático austriaco Kurt Gödel, haciendo uso de un tablero de ajedrez. Además, se propone una actividad que explica el concepto de demostración, es decir, la secuencia de pasos lógicos que se siguen para establecer un razonamiento matemático válido.

Con este capítulo se cierra la primera temporada de la serie. Ya está en marcha una segunda, que formará parte del proyecto 'Ciudad Ciencia', de la Vicepresidencia Adjunta de Cultura Científica del CSIC, y que será estrenada este curso.



El capítulo "Los límites de las matemáticas" puso fin a la primera temporada de la serie de animación 'Revoluciones Matemáticas'



Boletín semestral
Instituto de Ciencias Matemáticas
N.19 – Primer semestre 2020

Producción:

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT)
C/ Nicolás Carrera nº 13-15
Campus de Cantoblanco, UAM
29049 Madrid ESPAÑA

Divulga S.L
C/ Diana 16-1º C
28022 Madrid

Comité editorial:

Antonio Córdoba
Jared Aurentz
Alberto Enciso
Daniel Peralta-Salas
Ágata Timón García-Longoria
José María Martell

Coordinación:

Ignacio F. Bayo
Laura Moreno Iraola
Ágata Timón García-Longoria

Diseño:

Fábrica de Chocolate

Maquetación:

Equipo globalCOMUNICA

Traducción:

Jeff Palmer

Redacción:

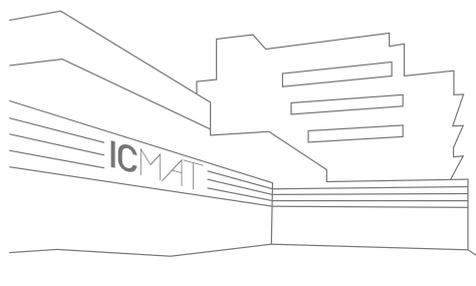
Raquel G. Molina
Ignacio del Amo
Laura Moreno Iraola
Ágata Timón García-Longoria

Creative Commons



ICMAT

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



C/ Nicolás Cabrera, nº 13-15
Campus Cantoblanco UAM
28049 Madrid, Spain

www.icmat.es

