Teoría de Littlewood-Paley
Martingalas, semigrupos y aspectos no conmutativos

Javier Parcet

1

Desigualdades de martingalas

Revisaremos las desigualdades L_p de martingalas más relevantes. En contraste con el enfoque clásico, obtendremos dichas desigualdades a partir de estimaciones de tipo débil $(1,1)$ y L_∞-BMO para una función cuadrado generalizada. También evitaremos los tiempos de parada en la medida de lo posible. Tanto los resultados como la manera de obtenerlos nos serán útiles en los capítulos sucesivos.

1.1 Esperanza condicionada

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $f \in L_1(\Omega)$. Dada Γ una σ-subálgebra de Σ, definimos la **esperanza condicionada** $\mathsf{E}_\Gamma(f)$ de f respecto de Γ como la única función Γ-medible que satisface

$$\int_A f d\mu = \int_A \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu \quad \text{para todo} \quad A \in \Gamma.$$

Es sencillo demostrar que la esperanza condicionada existe y es única. Efectivamente, la expresión $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida absolutamente continua en Γ respecto de μ. El teorema de Radon-Nikodym nos asegura entonces que debe existir una densidad $\mathsf{E}_\Gamma(f) \in L_1(\Omega, \Gamma, \mu)$ tal que $\nu(A) = \int_A \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu$ para todo $A \in \Gamma$. Además, es claro que dicha función es única si imponemos que sea Γ-medible.

La esperanza condicionada es en general una función difícil de calcular de forma explícita. No obstante, cuando Γ es una partición numerable de $\Omega = \cup_{k \geq 1} A_k$, se obtiene fácilmente que

$$\mathsf{E}_\Gamma(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f d\mu \Big) \chi_{A_k}(x).$$

Así deducimos que para $\Gamma = \{\emptyset, \Omega\}$ la σ-álgebra trivial, se tiene que E_Γ es la esperanza estocástica. Por otro lado, cuando Γ es la σ-álgebra generada por una variable aleatoria

$\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ tomando valores en un conjunto numerable $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, entonces se hacen evidentes las conexiones con otras nociones clásicas de la probabilidad. Efectivamente, si A_k denota el conjunto $\{\gamma = \lambda_k\}$, la esperanza condicionada $\mathsf{E}_{A_k}(f)$ de f respecto del suceso A_k se obtiene como sigue

$$\mathsf{E}_{A_k}(f) = \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f d\mu = \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu = \mathsf{E}_\Gamma(f)_{|A_k}.$$

Si $f = \sum \alpha_j \, \chi_{S_j}$ también toma valores en un conjunto numerable de puntos, entonces aparecen las probabilidades condicionadas $\mu(S_j|A_k)$ de los S_j's respecto de los A_k's. Efectivamente, tenemos que

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha_j \mu(S_j|A_k) = \mathsf{E}_{A_k}(f) = \mathsf{E}_\Gamma(f)_{|A_k} = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \mathsf{E}_\Gamma(\chi_{S_j})_{|A_k}.$$

Aunque la motivación es probabilística, la noción de esperanza condicionada es muy utilizada en análisis y trasciende a la probabilidad. Nótese de hecho que la imposición de que μ sea una medida finita no es esencial en la definición y nos bastará casi siempre con trabajar en espacios de medida semifinitos. La siguiente lista de propiedades algebraicas/analíticas *prácticamente* caracterizan (salvo una condición adicional de continuidad) la esperanza condicionada.

1. **E_Γ es lineal.**

2. **E_Γ es positiva:** $f \geq 0 \Rightarrow \mathsf{E}_\Gamma(f) \geq 0$.

3. **E_Γ preserva la integral:** $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu$.

4. **E_Γ es modular:** g Γ-medible $\Rightarrow \mathsf{E}_\Gamma(fg) = \mathsf{E}_\Gamma(f)g$.

5. **E_Γ es una proyección**

$$\mathsf{E}_\Gamma \circ \mathsf{E}_\Gamma(f) = \mathsf{E}_\Gamma(f) \quad \text{y} \quad \int_\Omega \mathsf{E}_\Gamma(f) g d\mu = \int_\Omega f \mathsf{E}_\Gamma(g) d\mu.$$

La única propiedad no evidente a primera vista es la modularidad. A saber, las demás son triviales salvo la segunda propiedad de proyección, que se sigue (ejercicio) de la modularidad. Para probar que $\mathsf{E}_\Gamma(fg) = \mathsf{E}_\Gamma(f)g$ asumimos que f es positiva (sino rompemos f en sus partes positivas y utilizamos linealidad) y consideramos entonces las medidas positivas

$$\begin{aligned} \nu_\Sigma(A) &= \int_A f d\mu, \\ \nu_\Gamma(B) &= \int_B \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu, \end{aligned}$$

para $A \in \Sigma$ y $B \in \Gamma$. La propiedad de esperanza condicionada nos asegura que ν_Σ y ν_Γ coinciden en la σ-álgebra Γ. Dado $B \in \Gamma$ y puesto que g es Γ-medible, tenemos entonces que

$$\int_B fg d\mu = \int_B g d\nu_\Sigma = \int_B g d\nu_\Gamma = \int_B \mathsf{E}_\Gamma(f) g d\mu.$$

El siguiente resultado completa nuestra lista de propiedades.

Lema 1.1 E_Γ *satisface*:

a) E_Γ *es fiel*: $f \geq 0$, $\mathsf{E}_\Gamma(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

b) E_Γ *es monótona*: $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Sigma \Rightarrow \mathsf{E}_{\Gamma_1} \circ \mathsf{E}_{\Gamma_2} = \mathsf{E}_{\Gamma_2} \circ \mathsf{E}_{\Gamma_1} = \mathsf{E}_{\Gamma_1}$.

c) *Si f es independiente de Γ, i.e.*

$$\mu\Big(A \cap \{f \in E\}\Big) = \mu(A)\, \mu\big(\{f \in E\}\big)$$

para todo $A \in \Gamma$ y todo boreliano E, entonces se tiene que

$$\mathsf{E}_\Gamma(f) = \int_\Omega f d\mu.$$

d) *Se tiene que* $\big|\mathsf{E}_\Gamma(f)\big| \leq \|f\|_\infty$ a.e $-\,\mu$ *y si* $1 \leq p < \infty$

$$\big\|\mathsf{E}_\Gamma(f)\big\|_p \leq \|f\|_p \quad y \quad \big|\mathsf{E}_\Gamma(f)\big| \leq \mathsf{E}_\Gamma\big(|f|^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. a) es trivial. Dado $A \in \Gamma_1 \subset \Gamma_2$, sabemos que

$$\int_A \mathsf{E}_{\Gamma_1}(\mathsf{E}_{\Gamma_2}(f)) d\mu = \int_A \mathsf{E}_{\Gamma_2}(f) d\mu = \int_A f d\mu = \int_A \mathsf{E}_{\Gamma_1}(f) d\mu = \int_A \mathsf{E}_{\Gamma_2}(\mathsf{E}_{\Gamma_1}(f)) d\mu$$

de donde se deduce b). Por otro lado, si f es independiente de Γ y $A \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \int_A \mathsf{E}_\Gamma(f) d\mu &= \int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(\chi_A f > s) ds \\ &= \mu(A) \int_0^\infty \mu(f > s) ds = \mu(A) \int_\Omega f d\mu = \int_A \Big(\int_\Omega f d\mu \Big) d\mu. \end{aligned}$$

La propiedad c) se deduce de la unicidad de la esperanza condicionada. Para la última propiedad, comenzamos observando que $|\mathsf{E}_\Gamma(f)| \leq \mathsf{E}_\Gamma(|f|)$. Efectivamente, puesto que $|\mathsf{E}_\Gamma(f)| = (\mathrm{sgn}\mathsf{E}_\Gamma(f))\mathsf{E}_\Gamma(f)$ y $\mathrm{sgn}\mathsf{E}_\Gamma(f)$ es Γ medible, dado $A \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \int_A |\mathsf{E}_\Gamma(f)| d\mu &= \int_A \mathsf{E}_\Gamma\big((\mathrm{sgn}\mathsf{E}_\Gamma(f)) f\big) d\mu = \int_A (\mathrm{sgn}\mathsf{E}_\Gamma(f)) f d\mu \\ &= \Big| \int_A (\mathrm{sgn}\mathsf{E}_\Gamma(f)) f d\mu \Big| \leq \int_A |f| d\mu = \int_A \mathsf{E}_\Gamma(|f|) d\mu, \end{aligned}$$

de donde se deduce nuestra afirmación ya que $|\mathsf{E}_\Gamma(f)|$ y $\mathsf{E}_\Gamma(|f|)$ son Γ-medibles. Por otro lado, puesto que asumimos (como poco) que (Ω, Γ, μ) es semifinito, es fácil comprobar (ejercicio) que

$$\|\mathsf{E}_\Gamma(f)\|_\infty = \sup_{A \in \Gamma \,|\, \mu(A) < \infty} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |\mathsf{E}_\Gamma(f)| d\mu \leq \|f\|_\infty.$$

Utilizando nuevamente que $|\mathsf{E}_\Gamma(f)| \leq \mathsf{E}_\Gamma(|f|)$, se obtiene $\|\mathsf{E}_\Gamma(f)\|_1 \leq \|f\|_1$. Por consiguiente, $\mathsf{E}_\Gamma : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ es contractivo para $p = 1, \infty$. Por interpolación deducimos que lo mismo es cierto para todo $1 < p < \infty$. Nos queda comprobar la última afirmación. Comenzamos suponiendo que $f \geq 0$, entonces dado $A \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
\int_A \mathsf{E}_\Gamma(f)^2 d\mu &= \int_\Omega \mathsf{E}_\Gamma(\chi_A f)^2 d\mu \\
&= \big\|\mathsf{E}_\Gamma(\chi_A f)\big\|_2^2 \ \leq \ \big\|\chi_A f\big\|_2^2 \\
&= \int_\Omega \chi_A f^2 d\mu \ = \ \int_\Omega \mathsf{E}_\Gamma(\chi_A f^2) d\mu \ = \ \int_A \mathsf{E}_\Gamma(f^2) d\mu.
\end{aligned}$$

Esto nos proporciona la desigualdad deseada para $f \geq 0$. Por otro lado, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ podemos romper $f = f_+ - f_-$ con $f_+, f_- \geq 0$ y de soportes disjuntos. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\big|\mathsf{E}_\Gamma(f)\big|^2 &= \mathsf{E}_\Gamma(f_+)^2 + \mathsf{E}_\Gamma(f_-)^2 - 2\mathsf{E}_\Gamma(f_+)\mathsf{E}_\Gamma(f_-) \\
&\leq \mathsf{E}_\Gamma(f_+)^2 + \mathsf{E}_\Gamma(f_-)^2 \ \leq \ \mathsf{E}_\Gamma(f_+^2) + \mathsf{E}_\Gamma(f_-^2) \\
&= \mathsf{E}_\Gamma(f_+^2) + \mathsf{E}_\Gamma(f_-^2) - 2\mathsf{E}_\Gamma(f_+ f_-) \ = \ \mathsf{E}_\Gamma(|f|^2).
\end{aligned}$$

Finalmente, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ escribimos

$$\big|\mathsf{E}_\Gamma(f)\big|^2 = \big|\mathsf{E}_\Gamma(\mathsf{Re} f)\big|^2 + \big|\mathsf{E}_\Gamma(\mathsf{Im} f)\big|^2 \leq \mathsf{E}_\Gamma(|\mathsf{Re} f|^2) + \mathsf{E}_\Gamma(|\mathsf{Im} f|^2) = \mathsf{E}_\Gamma(|f|^2). \quad \blacksquare$$

Observación 1.2 La propiedad c) del Lema 1.1 (sobre independencia respecto de Γ) es el único punto hasta ahora en donde hemos precisado trabajar con un espacio de probabilidad. La propiedad d) se sigue de **Jensen condicional**

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{convexa} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathsf{E}_\Gamma(f)) \leq \mathsf{E}_\Gamma(\varphi(f)).$$

Otra propiedad no mencionada en el lema es la desigualdad de **Hölder condicional**

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}_\Gamma\big(|fg|^r\big)^{\frac{1}{r}} \leq \mathsf{E}_\Gamma\big(|f|^p\big)^{\frac{1}{p}} \mathsf{E}_\Gamma\big(|g|^q\big)^{\frac{1}{q}}.$$

Si no consideramos estas propiedades es porque en lo sucesivo utilizaremos únicamente las propiedades algebraicas de la esperanza junto con las del lema. Esto es una buena noticia porque dichas propiedades son precísamente las que se conservan en el contexto no conmutativo, analizado en el Capítulo 4.

1.2 Martingalas en L_p y BMO

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito. Una **filtración** de Σ es una sucesión creciente $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ de σ-subálgebras σ-finitas de Σ. Asumiremos siempre que la unión $\cup_{n\geq 1}\Sigma_n$ es densa en el siguiente sentido: para todo par $(f,g) \in L_\infty(\Omega) \times L_1(\Omega)$ existe una sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ en $L_\infty(\Omega)$ con

- φ_n es Σ_n-medible,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$

En lo que sigue escribiremos E_n para denotar a la esperanza condicionada E_{Σ_n}. Dado $1 \leq p \leq \infty$, una **martingala** en $L_p(\Omega)$ es una sucesión $f = (f_n)_{n\geq 1}$ de funciones que satisfacen

- $\int_\Omega |f_n|^p d\mu < \infty$ para todo $n \geq 1$,
- f es un proceso adaptado: f_n es Σ_n-medible para todo $n \geq 1$,
- f satisface la condición de martingala: $\mathsf{E}_{n-1}(f_n) = f_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Esto es equivalente a (ejercicio)

$$f_n \in L_p(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathsf{E}_n(f_m) = f_{\min(m,n)}.$$

Aunque casi todas las martingalas serán de esta forma, conviene recalcar que existen otros tipos importantes de martingalas. La definición más general es como sigue. Sea Λ un *conjunto de índices parcialmente ordenado*. Consideramos una colección $(\Sigma_n)_{n\in\Lambda}$ de σ-subálgebras indexada por Λ. Supongamos que es creciente respecto del orden dado: $n \leq_\Lambda m \Rightarrow \Sigma_n \subset \Sigma_m$. Entonces, una martingala en $L_p(\Omega)$ es una colección $f = (f_n)_{n\in\Lambda}$ indexada por Λ que satisface

$$f_n \in L_p(\Omega) \quad \text{y} \quad n \leq_\Lambda m \Rightarrow \mathsf{E}_n(f_m) = f_n.$$

Así podemos considerar distintos tipos de martingalas. Una martingala es **bilateral** cuando Λ no tiene ni maximal ni minimal. Por ejemplo, podemos considerar $\Lambda = \mathbb{Z}$ en lugar de los naturales. Por regla general, el orden con el que se trabaja es un orden total. No obstante, existe un caso importante en la literatura en el que el orden no es total. Se trata de las martingalas **multi-indexadas** donde $\Lambda = \mathbb{N}^m$ con el orden $j \leq k$ sii $j_s \leq k_s$ para $1 \leq s \leq m$. Otro caso importante es el de martingalas **continuas** en las que Λ es no numerable, por ejemplo $\Lambda = [0,1]$ con su orden natural. Algunas de estas martingalas aparecerán más adelante en estas notas.

Nos queda una forma más de martingalas que no está contemplada en la definición dada. Una filtración inversa es una sucesión $(\Sigma_n)_{n\in\Lambda}$ de σ-subálgebras *decreciente* respecto del orden dado. Así definimos una **martingala inversa** $f = (f_n)_{n\in\Gamma}$ en $L_p(\Omega)$ por las condiciones

$$f_n \in L_p(\Omega) \quad \text{y} \quad n \leq_\Lambda m \quad \Rightarrow \quad \mathsf{E}_m(f_n) = f_m.$$

Dichas martingalas serán relevantes en el Capítulo 3 en conexión con los semigrupos.

En lo que sigue volvemos a la definición original de martingala con $\Lambda = \mathbb{N}$. Dada una martingala $f = (f_n)_{n\geq 1}$, definimos sus **diferencias de martingala** como $df_1 = f_1$ y $df_k = f_k - f_{k-1}$ para $k \geq 2$. De este modo tenemos que

$$f_n = \sum_{k=1}^n df_k.$$

Es fácil comprobar (ejercicio) que f_n así definida es una martingala en $L_p(\Omega)$ sii

$$df_k \in L_p(\Omega) \quad , \quad df_k \text{ es } \Sigma_k\text{-medible} \quad , \quad \mathsf{E}_{k-1}(df_k) = 0.$$

Observación 1.3 *Si f es martingala en $L_2(\Omega)$, sus diferencias son ortogonales.*

El espacio de martingalas en $L_p(\Omega)$ es demasiado grande para nuestros propósitos. El subespacio adecuado es el de las **martingalas acotadas en** $L_p(\Omega)$, que se define bajo la condición

$$\|f\|_p = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p < \infty.$$

Nótese que dicho supremo es un límite puesto que la sucesión $\|f_n\|_p$ es creciente porque

$$\|f_n\|_p = \|\mathsf{E}_n(f_{n+1})\|_p \leq \|f_{n+1}\|_p.$$

Lema 1.4 *Se tiene que*:

a) *Si $1 \leq p < \infty$, $\bigcup_{n\geq 1} L_p(\Sigma_n)$ es denso en $L_p(\Omega)$.*

b) *Si $p = \infty$, $\bigcup_{n\geq 1} L_\infty(\Sigma_n)$ es denso débil-$*$ en $L_\infty(\Omega)$.*

Demostración. La segunda afirmación no es otra cosa que una reformulación de la condición de densidad impuesta en la filtración. Para demostrar la primera afirmación suponemos de momento que μ es una medida finita. Basta probar

$$g \in L_{p'}(\Omega) \quad \text{t.q.} \quad \int_\Omega fg\,d\mu = 0 \quad \forall\, f \in \bigcup_{n\geq 1} L_p(\Sigma_n) \quad \Rightarrow \quad g = 0.$$

Efectivamente, puesto que todo funcional que se anula en $\bigcup_{n\geq 1} L_p(\Sigma_n)$ también lo hace en $L_p(\Omega)$, el teorema de Hahn-Banach nos permite concluir. Como μ es finita, sabemos que $L_{p'}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ y además podemos escoger $f \in \bigcup_{n\geq 1} L_\infty(\Sigma_n)$. La densidad débil-$*$ nos asegura que entonces

$$\int_\Omega fg d\mu = 0 \quad \forall\, f \in L_\infty(\Omega),$$

de manera que $g = 0$ en $L_1(\Omega)$. En el caso σ-finito es claro como proceder. ■

Proposición 1.5 *Caracterización de martingalas acotadas en* $L_p(\Omega)$:

a) *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y fijemos* $f_\infty \in L_p(\Omega)$. *Si definimos las funciones* $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$, *entonces la sucesión* $f = (f_n)_{n\geq 1}$ *es una martingala acotada en* $L_p(\Omega)$ *y tenemos*

$$\|f\|_p = \|f_\infty\|_p \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_\infty - f_n\|_p = 0.$$

Cuando $p = \infty$, *se obtiene lo mismo respecto de la topología débil-*$*$.

b) *Sea* $1 < p \leq \infty$ *y fijemos* $f = (f_n)_{n\geq 1}$ *martingala acotada en* $L_p(\Omega)$. *Entonces existe* $f_\infty \in L_p(\Omega)$ *tal que* $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$. *Es más, cuando* $p = 1$ *se dan las mismas circunstancias si además* f *es uniformemente integrable. Es decir, para toda sucesión decreciente* $(A_k)_{k\geq 1}$ *de conjuntos medibles con* $\mu(A_k) \to 0$, *se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} \sup\Big\{ \int_{A_k} |f_n| d\mu \,\Big|\, n \geq 1 \Big\} = 0.$$

Por consiguiente, tenemos un isomorfismo isométrico

$$f_\infty \in L_p(\Omega) \mapsto \big(\mathsf{E}_n(f_\infty)\big)_{n\geq 1} \in \Big\{ \textit{martingalas acotadas en } L_p(\Omega) \Big\}^*,$$

donde $*$ *denota que cuando* $p = 1$ *tenemos que añadir integrabilidad absoluta.*

Demostración. Es evidente que $(\mathsf{E}_n(f_\infty))$ define una martingala acotada en $L_p(\Omega)$ con $\|f\|_p \leq \|f_\infty\|_p$, incluso si $p = \infty$. Si vemos que $\|f_\infty - f_n\|_p \to 0$, entonces se tendrá que $\|f\|_p = \|f_\infty\|_p$ para toda $f_\infty \in L_p(\Omega)$. Puesto que dicha propiedad se satisface cuando la función f_∞ es Σ_n-medible, el resultado de densidad del Lemma 1.4 nos permite concluir. Nótese que el mismo argumento funciona en $L_\infty(\Omega)$ respecto de la topología débil-$*$. Nos queda ver $\|f\|_\infty = \|f_\infty\|_\infty$, sea $g_\infty \in L_1(\Omega)$ de norma 1 tal que

$$\|f_\infty\|_\infty \sim \int_\Omega f_\infty g_\infty d\mu.$$

Definimos $g_n = \mathsf{E}_n(g_\infty)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ \|f_\infty\|_\infty - \|f_n\|_\infty \ &\lesssim \ \int_\Omega f_\infty g_\infty d\mu - \int_\Omega f_n g_n d\mu \\ &= \ \int_\Omega (f_\infty - f_n) g_\infty d\mu + \int_\Omega f_n (g_\infty - g_n) d\mu. \end{aligned}$$

El primer término tiende a 0 porque $f_n \to f_\infty$ en la topología débil-$*$, mientras que el segundo lo hace porque $g_n \to g_\infty$ en $L_1(\Omega)$. Esto concluye la prueba del apartado a).

Pasamos ahora a la demostración del apartado b). Si $p > 1$, se tiene que $L_p(\Omega)$ es el dual de $L_{p'}(\Omega)$ y por el teorema de Banach-Alaoglu sabemos que la bola unidad de $L_p(\Omega)$ es compacta en la topología débil-$*$. Por tanto, dada $f = (f_n)_{n\geq 1}$ martingala acotada en $L_p(\Omega)$, existirá una subsucesión f_{n_k} que converge a cierta $f_\infty \in L_p(\Omega)$ en la topología débil-$*$. Así, dado $A \in \Sigma_n$ y $n_k \geq n$ tendremos

$$\int_A f_n d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A \mathsf{E}_n(f_{n_k}) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A f_{n_k} d\mu = \int_A f_\infty d\mu.$$

Esto nos da $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$ para todo $n \geq 1$. La condición adicional impuesta en $L_1(\Omega)$ se debe al teorema de Dunford-Pettis, que asegura que un conjunto es uniformemente integrable en $L_1(\Omega)$ sii es relativamente compacto respecto de la topología débil. Esto permite reconstruir el argumento dado. Por último, la existencia de dicho isomorfismo isométrico es obvia si $p > 1$. Para $p = 1$ resta comprobar que si $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$ para cierta f_∞ en $L_1(\Omega)$, entonces $f = (f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable en L_1. Esto lo dejamos como ejercicio. ■

La Proposición 1.5 nos permite identificar $L_p(\Omega)$ con el espacio de martingalas acotadas* en $L_p(\Omega)$. Una consecuencia de dicha caracterización es la **descomposición de Krickeberg**, que nos asegura que toda martingala acotada* es combinación lineal de 4 martingalas positivas. Efectivamente, dada $f = (f_n)_{n\geq 1}$ acotada* en $L_p(\Omega)$ sabemos que existe $f_\infty \in L_p(\Omega)$ tal que $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$. Rompemos $f_\infty = f_\infty^1 - f_\infty^2 + i f_\infty^3 - i f_\infty^4$ en funciones positivas y definimos $f^j = (\mathsf{E}_n(f_\infty^j))_{n\geq 1}$.

Observación 1.6 Las martingalas acotadas en $L_1(\Omega)$ no uniformemente integrables no satisfacen $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$ y la descomposición dada no funciona en este caso. No obstante, también existe una descomposición de Krickeberg (más compleja) para toda martingala acotada en $L_1(\Omega)$. Esto será de utilidad más adelante. El lector interesado puede encontrar dicha descomposición en [**62**].

Una vez definida la norma L_p de las martingalas, nos resta introducir la norma BMO de martingalas. Dada una función Σ-medible f en Ω, definimos su norma BMO como sigue

$$\|f\|_{\mathsf{BMO}} = \sup_{n\geq 1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\big| f - \mathsf{E}_{n-1}(f) \big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty.$$

donde –en consonancia con la terminología para diferencias de martingala– imponemos $\mathsf{E}_0(f) = 0$. Por otro lado, puesto que $f - \mathsf{E}_{n-1}(f) = \sum_{k \ge n} df_k$ y $\mathsf{E}_n(df_j \overline{df}_k) = 0$ si $j, k \ge n$ y $j \neq k$ (ejercicio), deducimos una expresión para la norma que en ocasiones es más útil que la propia definición

$$\|f\|_{\mathsf{BMO}} = \sup_{n \ge 1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\sum_{k \ge n} |df_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty.$$

Nótese además (ejercicio) que

$$\|f\|_{\mathsf{BMO}} \le 2 \|f\|_\infty \Rightarrow L_\infty(\Omega) \subset \mathsf{BMO}(\Omega).$$

Observación 1.7 El lector que conozca la noción clásica de BMO (c.f. Capítulo 2 más adelante), tal vez imagine que deberíamos reemplazar la esperanza condicionada E_{n-1} por E_n. Nuestra definición está históricamente motivada por la descripción atómica de los espacios de Hardy asociados. La validez del teorema de John-Nirenberg o la interpolación (real o compleja) con espacios L_p justifican la definición.

Cerramos esta sección con una colección de ejemplos:

a) Quizás una de las martingalas que primero aparecieron en la literatura y a buen seguro la más conocida es la **martingala diádica**. Comenzamos tomando Ω el intervalo $[0,1]$ con μ la medida de Lebesgue y la familia de intervalos diádicos

$$\mathcal{I}_{j,n} = \Big(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \Big).$$

Definimos entonces las σ-subálgebras de Borel

$$\Sigma_n = \sigma\Big(\big\{ \mathcal{I}_{j,n} \,|\, 1 \le j \le 2^n \big\} \Big), \quad n \ge 1$$

generadas por los intervalos de la generación n-ésima. Es fácil comprobar que $(\Sigma_n)_{n \ge 1}$ es una filtración creciente de σ-álgebras con unión densa y además que la esperanza condicionada toma la forma

$$\mathsf{E}_n f(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{|\mathcal{I}_{j,n}|} \int_{\mathcal{I}_{j,n}} f(s) ds \ \chi_{\mathcal{I}_{j,n}}(x).$$

Como ya hemos dicho, no es necesario trabajar en espacios de probabilidad para construir martingalas. Por ejemplo, otra forma de la martingala diádica muy utilizada en análisis armónico resulta de tomar $\Omega = \mathbb{R}^m$ con la medida de Lebesgue y la familia de cubos diádicos

$$\mathcal{Q}_{j,n} = \prod_{i=1}^m \Big(\frac{j_i - 1}{2^n}, \frac{j_i}{2^n} \Big), \quad (j,n) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}.$$

Esto nos lleva a considerar

$$\Sigma_n = \sigma\Big(\big\{ \mathcal{Q}_{j,n} \,|\, j \in \mathbb{Z}^m \big\}\Big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que ahora el índice de la martingala recorre $\mathbb{Z}$ y no $\mathbb{N}$, de manera que podemos considerar cubos tan grandes y tan pequeños como queramos. Como antes, las esperanzas condicionadas E_n son muy sencillas de escribir. Así, dada $f_\infty \in L_p(\mathbb{R}^m)$, la sucesión $f = (f_n)_{n \geq 1}$ con $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$ es por tanto un ejemplo de martingala bilateral.

b) La construcción de **martingalas con diferencias independientes** es sin duda la más importante. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y sea $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ una colección de variables aleatorias independientes con media 0

$$\int_\Omega \varphi_k \, d\mu = 0.$$

Si $\Sigma_n = \sigma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ es la σ-subálgebra generada por $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, entonces es claro que $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$ forma una sucesión creciente de σ-subálgebras. Nótese que la densidad de la filtración se obtiene sin más que asumir que Σ es la σ-álgebra generada por la unión de las Σ_n's. Por tanto, tenemos una filtración. Por otro lado, es evidente que φ_n es independiente de Σ_{n-1} en el sentido del Lema 1.1. De esta manera se obtiene que

$$\varphi_n \text{ es } \Sigma_n\text{-medible} \quad \text{y} \quad \mathsf{E}_{n-1}(\varphi_n) = 0.$$

De modo que, si existe $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\varphi_n \in L_p(\Omega)$, obtenemos una sucesión de diferencias de martingala en $L_p(\Omega)$. Así, dada una sucesión $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de escalares, podemos construir martingalas en $L_p(\Omega)$ sin más que tomar

$$f_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k = \sum_{k=1}^n df_k.$$

Conviene recalcar un par de comentarios:

- Dichas martingalas no están necesariamente acotadas en $L_p(\Omega)$ y los valores λ_k juegan un papel esencial (como veremos más adelante) para decidir si se trata de una martingala acotada.
- La independencia estocástica con media 0 es una condición suficiente para formar diferencias de martingalas, pero no necesaria. Por ejemplo, podemos tomar la filtración diádica del apartado anterior y

$$df_k(x) = \begin{cases} +1 & x \in \mathcal{I}_{1,k}, \\ -1 & x \in \mathcal{I}_{2,k}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

c) La forma estándar de construir v.a. independientes nos proporciona un marco para generar martingalas. Efectivamente, dado un espacio de probabilidad (Ω_0, μ_0) consideramos el producto cartesiano de una cantidad numerable de copias

$$(\Omega, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_0, \mu_0).$$

En este espacio de probabilidad, funciones que dependan de distintas coordenadas son automáticamente independientes. De este modo, dada una familia $(\psi_k)_{k \geq 1}$ de funciones con media 0 en (Ω_0, μ_0), obtenemos martingalas de la forma

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi_k(w_k) = \sum_{k=1}^{n} df_k(w).$$

Dicho de otro modo, toda sucesión $f = (f_n)_{n \geq 1}$ que satisfaga

- $f_n(w) = f_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$,
- $f_{n-1}(w) = \int_{\Omega_0} f_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) \, d\mu_0(w_n)$,

es una martingala. En particular, la construcción más común es tomar todas las ψ_k iguales a una ψ dada y obtenemos **martingalas formadas por copias independientes**. El ejemplo más conocido consiste en tomar $\Omega_0 = \{-1, +1\}$ y $\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. De este modo, tomando $\psi(w) = w$ –i.e. $\varphi_k(w) = \psi(w_k)$ son las funciones coordenadas en Ω– obtenemos martingalas de la forma

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k.$$

Nótese que este es un caso particular de martingala diádica pero que, como hemos señalado antes, no toda martingala diádica proviene de diferencias de martingala independientes, como en este caso. Otro ejemplo está dado por

$$g_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \lambda_k \varphi_k).$$

Compruébese que es una martingala y que

$$-1 \leq \lambda_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad g_n \geq 0 \quad \text{y} \quad \|g_n\|_1 = 1.$$

Qué se puede decir de positividad y acotación L_1 para

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k?$$

d) Consideramos la martingala $f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ construída como antes a partir de las funciones coordenadas en $\{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$. Dicha martingala se llama **paseo aleatorio elemental**. Si tomamos límites en un paseo aleatorio con incrementos cada vez más pequeños, obtendremos un proceso aleatorio en tiempo continuo que se denomina **movimiento Browniano**. Más concretamente, si el incremento es de longitud ε, necesitaremos considerar un paseo aleatorio de longitud $1/\varepsilon^2$ para aproximar un movimiento Browniano de longitud 1. Dicho límite W_t con $0 \leq t \leq 1$ –también llamado *proceso de Wiener*– está caracterizado por tres propiedades:

- $W_0 = 0$,
- W_t es continua casi seguro
- W_t tiene incrementos independientes con distribución

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \quad \text{para} \quad 0 \leq s < t,$$

con $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ la distribución normal con esperanza μ y varianza σ^2

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big).$$

La condición de independencia significa que

$$0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \ \Rightarrow \ W_{t_1} - W_{s_1} \text{ y } W_{t_2} - W_{s_2} \ \text{ son independientes.}$$

A lo largo de estas notas no vamos a trabajar con martingalas continuas. El lector interesado puede acudir a casi cualquier texto sobre procesos estocásticos para más información sobre este tema.

e) Consideramos el siguiente orden parcial en $\Lambda = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\gamma \leq \eta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1 \leq \eta_1 \ \text{ y } \ \gamma_2 \leq \eta_2.$$

Consideramos una filtración $(\Sigma_\gamma)_{\gamma \in \Lambda}$ de Σ respecto del orden dado. Sean E_γ las correspondientes esperanzas condicionadas. Como es de esperar, asumimos que la unión $\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \Sigma_\gamma$ es densa en Σ. Definimos $\rho = \min(\gamma, \eta)$ por $\rho_j = \min\big(\gamma_j, \eta_j\big)$ para $j = 1, 2$. Una familia 2-indexada $f = (f_\gamma)_{\gamma \in \Lambda}$ de funciones se llama una **martingala con 2 índices** si para cada par de puntos $\gamma, \eta \in \Lambda$, tenemos

$$\mathsf{E}_\eta(f_\gamma) = f_{\min(\gamma,\eta)}.$$

Nótese que entonces f_γ es Σ_γ-medible. Puesto que no trabajamos con un orden total, un ejercicio interesante para el lector es el de caracterizar las martingalas acotadas en $L_p(\Omega)$ en este caso, así como proporcionar una expresión explícita para las diferencias de martingala.

f) Otros ejemplos interesantes no los comentamos en detalle. Mencionados dos de ellos. La filtración natural en un grupo (abeliano de momento) discreto se define sobre una sucesión creciente de subgrupos vía la representación regular a la izquierda. También podemos considerar una filtración en $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ que alterna una diferencias de martingala en la primera componente congelando la segunda con diferencias en la segunda congelando la primera... Cada una de estas construcciones tiene su utilidad en el contexto adecuado.

1.3 El maximal de Doob

Dado $1 \leq p < \infty$, hasta ahora hemos visto que toda martingala $f = (f_n)_{n \geq 1}$ acotada en $L_p(\Omega)$ (uniformemente integrable si $p = 1$) converge en norma a cierta función f_∞. La siguiente cuestión es preguntarse por la convergencia $f_n \to f_\infty$ en casi todo punto. Como es bien sabido, para responder a dicha pregunta y también para muchas otras aplicaciones que veremos más adelante, es necesario considerar una función maximal. En nuestro caso, se trata del **maximal de Doob**

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \Big\{ |f_n| \, \Big| \, n \geq 1 \Big\}.$$

Teorema 1.8 *Desigualdades maximales de Doob*:

a) *Si $p = 1$, tenemos la desigualdad débil*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \, \mu \big\{ f^* > \lambda \big\} \lesssim \|f\|_1.$$

b) *Cuando $1 < p \leq \infty$, tenemos la desigualdad fuerte*

$$\|f^*\|_p \, \leq \, c_p \, \|f\|_p \quad \textit{con} \quad c_p \sim \frac{p}{p-1}.$$

Demostración. Comenzamos probando la desigualdad de tipo débil. En primer lugar observamos que es suficiente con demostrar dicha desigualdad para martingalas finitas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m, f_m, \ldots)$ con una constante independiente de m. Efectivamente, si escribimos f_m^* para el maximal de Doob truncado $f_m^* = \sup_{n \leq m} |f_n|$, es claro que

$$\lambda \, \mu \big\{ f^* > \lambda \big\} = \lim_{m \to \infty} \lambda \, \mu \big\{ f_m^* > \lambda \big\} \lesssim \lim_{m \to \infty} \|f_m\|_1 = \|f\|_1.$$

Por otro lado, también podemos asumir que f es positiva, i.e. $f_n \geq 0$ para $1 \leq n \leq m$. Ciertamente, puesto que f es finita también es de forma automática uniformemente integrable y podemos aplicar la descomposición de Krickeberg $f = f^1 - f^2 + if^3 - if^4$. Entonces obtenemos

$$\lambda\,\mu\big\{f^* > \lambda\big\} \le \lambda \sum_{j=1}^{4} \mu\big\{f^{j*} > \lambda/4\big\} \lesssim \sum_{j=1}^{4} \|f^j\|_1 \lesssim \|f\|_1.$$

Asumimos por tanto que f es finita y positiva. Sea $\Lambda_1 = \{f_1 > \lambda\}$ y

$$\Lambda_n = \Big\{f_j \le \lambda < f_n \,\Big|\, 1 \le j < n \le m\Big\} \quad \text{de manera que} \quad \big\{f^* > \lambda\big\} = \bigcup_{1 \le n \le m} \Lambda_n.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_\Omega f_m \, d\mu \ \ge \ \int_{\{f^* > \lambda\}} f_m \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{m} \int_{\Lambda_n} f_m \, d\mu \ = \ \sum_{n=1}^{m} \int_{\Lambda_n} \mathsf{E}_n(f_m) \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{m} \int_{\Lambda_n} f_n \, d\mu \ \ge \ \lambda \sum_{n=1}^{m} \mu(\Lambda_n) \ = \ \lambda\,\mu\big\{f^* > \lambda\big\}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la desigualdad de tipo débil. Por otro lado, la desigualdad fuerte es obviamente una igualdad en $L_\infty(\Omega)$. Puesto que tenemos una desigualdad de tipo débil $(1,1)$ y una desigualdad fuerte en $L_\infty(\Omega)$, las desigualdades restantes (con las constantes anunciadas) se siguen por interpolación de Marcinkiewicz. No obstante, damos por completitud el argumento detallado. Esgrimiendo lo mismo que en $L_1(\Omega)$, no perdemos generalidad si asumimos que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m, f_m, \ldots)$ es una martingala finita y positiva en $L_p(\Omega)$. Sabemos que

$$\|f^*\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \, \mu\big\{f^* > \lambda\big\} \, d\lambda.$$

Fijado $\lambda > 0$, $f_m = g_m^\lambda + h_m^\lambda$ con $g_m^\lambda = f_m \chi_{\{f_m < \lambda/2\}}$ y $h_m^\lambda = f_m \chi_{\{f_m \ge \lambda/2\}}$ y

$$f^* = \sup_{1 \le n \le m} \mathsf{E}_n(f_m) \le \sup_{1 \le n \le m} \mathsf{E}_n(g_m^\lambda) + \sup_{1 \le n \le m} \mathsf{E}_n(h_m^\lambda) = \gamma_m + \xi_m.$$

Puesto que $\|\gamma_m\|_\infty \le \|g_m^\lambda\|_\infty \le \lambda/2$,

$$\mu\big\{f^* > \lambda\big\} \le \mu\big\{\gamma_m > \lambda/2\big\} + \mu\big\{\xi_m > \lambda/2\big\} = \mu\big\{\xi_m > \lambda/2\big\}.$$

Por otro lado, la acotación débil proporciona

$$\mu\big\{\xi_m > \lambda/2\big\} \lesssim \frac{1}{\lambda} \int_\Omega h_m^\lambda \, d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_{\{f_m \ge \lambda/2\}} f_m \, d\mu.$$

Combinando las estimaciones obtenidas deducimos que

$$\begin{aligned} \|f^*\|_p^p &\lesssim p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{\{f_m\geq\lambda/2\}} f_m(w)\,d\mu(w)\,d\lambda \\ &= p\int_\Omega f_m(w)\Big(\int_0^{2f_m(w)} \lambda^{p-2}\,d\lambda\Big)\,d\mu(w) \\ &= 2^{p-1}\,\frac{p}{p-1}\int_\Omega f_m^p\,d\mu. \end{aligned}$$

De aquí se deduce el resultado con constante $c_p \sim (p/(p-1))^{\frac{1}{p}} \sim p/(p-1)$. ■

Una sucesión $f = (f_n)_{n\geq 1}$ se dice una **submartingala** cuando $f_n \leq \mathsf{E}_n(f_{n+1})$. Es un buen ejercicio comprobar que las desigualdades maximales de Doob siguen siendo válidas para submartingalas y también para martingalas inversas. El resultado para martingalas inversas será utilizado más adelante en el Capítulo 3.

Corolario 1.9 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f = (f_n)_{n\geq 1}$ una martingala acotada en $L_p(\Omega)$. Supongamos además que f es uniformemente integrable si $p = 1$. Entonces existe una función $f_\infty \in L_p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ en casi todo punto cuando $n \to \infty$.*

Demostración. La caracterización de martingalas acotadas en $L_p(\Omega)$ nos proporciona $f_\infty \in L_p(\Omega)$ tal que $f_n = \mathsf{E}_n(f_\infty)$ y $f_n \to f$ en $L_p(\Omega)$. Por consiguiente, f_∞ es nuestro candidato y tenemos la estimación

$$\begin{aligned} &\mu\Big\{w\in\Omega \,\big|\, \limsup_{n\to\infty} \big|f_\infty(w) - f_n(w)\big| > \lambda\Big\} \\ &\quad= \mu\Big\{\limsup_{n\to\infty}\big|f_\infty - f_m - \mathsf{E}_n(f_\infty - f_m)\big| > \lambda\Big\} \\ &\quad\leq \mu\Big\{\big|f_\infty - f_m\big| > \lambda/2\Big\} + \mu\Big\{\sup_{n\geq 1}\big|\mathsf{E}_n(f_\infty - f_m)\big| > \lambda/2\Big\} \\ &\quad\leq \Big(\frac{2(1+c_p)}{\lambda}\,\|f_\infty - f_m\|_p\Big)^p \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad m\to\infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la medida de dicho conjunto es 0 y deducimos

$$\mu\Big\{\limsup_{n\to\infty}\big|f_\infty - f_n\big| > 0\Big\} \leq \sum_{k=1}^\infty \mu\Big\{\limsup_{n\to\infty}\big|f_\infty - f_n\big| > 1/k\Big\} = 0.$$ ■

Joseph L. Doob es considerado (junto quizás con Littlewood, Paley y Walsh) uno de los pioneros en el estudio de martingalas. Así lo atestigua su bien conocida monografía [**12**]. Además, Doob fue el maestro de Donald L. Burkholder. Doob y Burkholder son los impulsores por excelencia de la teoría moderna de martingalas.

1.4 Descomposición de Gundy

Además de la desigualdad maximal de Doob, la otra herramienta esencial para obtener desigualdades L_p de martingalas es la descomposición de Gundy, que constituye el contrapunto probabilístico de la descomposición de Calderón-Zygmund que veremos en el Capítulo 2. La descomposición original de Gundy [**23**] involucraba dos tiempos de parada. Afortunadamente, Burkholder [**5**] obtuvo una demostración mucho más sencilla que es la que presentamos en estas notas.

Lema 1.10 *Sea $f = (f_n)_{n\geq 1}$ una martingala acotada en $L_1(\Omega)$. Entonces existe una constante absoluta c tal que las siguientes estimaciones se satisfacen para todo $\lambda > 0$*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \big\| f_k \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 &\leq c\, \|f\|_1, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \big\| df_k \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 &\leq c\, \|f\|_1, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \big\| f_{k-1} \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 &\leq c\, \|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Demostración. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \big\| f_k \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |\mathsf{E}_k(f_n)| \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \, d\mu \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \mathsf{E}_k\big(|f_n| \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}}\big) \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |f_n| \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \, d\mu = \int_{\{f_n^* > \lambda\}} |f_n| \, d\mu \leq \|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos la primera desigualdad. La segunda es consecuencia de la primera y la tercera aplicando la desigualdad triangular. Para la tercera observamos que $\chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} = \big(\chi_{\{f_k^* > \lambda\}} - \chi_{\{f_{k-1}^* > \lambda\}}\big) \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda\}}$. Por tanto, la desigualdad de Hölder proporciona

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \big\| f_{k-1} \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \big\| \chi_{\{f_k^* > \lambda\}} - \chi_{\{f_{k-1}^* > \lambda\}} \big\|_1 \, \big\| f_{k-1} \chi_{\{f_{k-1}^* \leq \lambda\}} \big\|_\infty \\
&\leq \lambda \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu\big\{f_k^* > \lambda\big\} - \mu\big\{f_{k-1}^* > \lambda\big\} \Big) = \lambda \mu \left\{ f^* > \lambda \right\}.
\end{aligned}
$$

La tercera desigualdad se sigue entonces de la desigualdad maximal de Doob. ■

Teorema 1.11 *Sea $f = (f_n)_{n\geq 1}$ una martingala acotada en $L_1(\Omega)$. Entonces, fijado $\lambda > 0$ existe una descomposición $f = \alpha + \beta + \gamma$ como suma de tres martingalas relativas a la misma filtración y tales que*

$$\max\Big\{\frac{1}{\lambda}\|\alpha\|_2^2, \sum_{k=1}^{\infty}\|d\beta_k\|_1, \lambda\,\mu\big\{\sup_{k\geq 1}|d\gamma_k| > 0\big\}\Big\} \lesssim \|f\|_1.$$

Si f es positiva, la descomposición tiene la forma

$$\begin{aligned} d\alpha_k &= df_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}} - \mathsf{E}_{k-1}\big(df_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}}\big), \\ d\beta_k &= df_k\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda<f_k^*\}} + \mathsf{E}_{k-1}\big(df_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}}\big), \\ d\gamma_k &= df_k\chi_{\{f_{k-1}^*>\lambda\}}. \end{aligned}$$

Demostración. Comenzamos asumiendo que $f = (f_n)_{n\geq 1}$ es positiva. Es sencillo comprobar (ejercicio) que $d\alpha_k, d\beta_k, d\gamma_k$ son diferencias de martingalas y que su suma es df_k. Así que nos resta probar las desigualdades. Puesto que en $L_2(\Omega)$ las diferencias de martingala son ortogonales, para α tenemos

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\|d\alpha_k\|_2^2 \leq 4\sum_{k=1}^{\infty}\big\|df_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}}\big\|_2^2 \\ &\leq 8\sum_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}} - f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}}\big\|_2^2 + 8\sum_{k=2}^{\infty}\big\|f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda<f_k^*\}}\big\|_2^2 = \mathsf{A} + \mathsf{B}. \end{aligned}$$

El segundo término se estima con Hölder y el Lema 1.10

$$\mathsf{B} \leq 8\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\big\|f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda<f_k^*\}}\big\|_1 \lesssim \lambda\|f\|_1.$$

Para el primer término utilizamos $(a-b)^2 = a^2 - b^2 + 2b(b-a)$ para $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &\leq 8\sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f_k^2\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}} - f_{k-1}^2\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}}\,d\mu \\ &+ 16\sum_{k=2}^{\infty}\int_\Omega f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}}\big(f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}} - f_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}}\big)\,d\mu \;=\; \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2. \end{aligned}$$

Es obvio que tenemos

$$\mathsf{A}_1 \leq 8\lim_{m\to\infty}\int_\Omega f_m^2\chi_{\{f_m^*\leq\lambda\}}\,d\mu \lesssim \lambda\|f\|_1.$$

Por otro lado, reescribimos A_2 como sigue

$$\mathsf{A}_2 = 16\sum_{k=2}^{\infty}\int_\Omega f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}}\big(f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^*\leq\lambda\}} - \mathsf{E}_{k-1}(f_k\chi_{\{f_k^*\leq\lambda\}})\big)\,d\mu.$$

Como $\mathsf{E}_{k-1}(f_k \chi_{\{f_k^* \le \lambda\}}) \le \mathsf{E}_{k-1}(f_k \chi_{\{f_{k-1}^* \le \lambda\}}) = f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^* \le \lambda\}}$, deducimos que

$$\mathsf{A}_2 \le 16\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \int_\Omega f_{k-1}\chi_{\{f_{k-1}^* \le \lambda\}} - f_k \chi_{\{f_k^* \le \lambda\}} \, d\mu \le 16\lambda \|f_1\|_1 \lesssim \lambda \|f\|_1.$$

Esto completa la estimación de α. Para β tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|d\beta_k\|_1 \le \|d\beta_1\|_1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \big\| df_k \chi_{\{f_{k-1}^* \le \lambda < f_k^*\}} \big\|_1 \lesssim \|f\|_1$$

debido a la segunda estimación del Lema 1.10. Finalmente, es claro que

$$\Big\{ \sup_{k \ge 1} |d\gamma_k| > 0 \Big\} \subset \big\{ f^* > \lambda \big\} \quad \Rightarrow \quad \lambda \, \mu \Big\{ \sup_{k \ge 1} |d\gamma_k| > 0 \Big\} \lesssim \|f\|_1.$$

Esto completa la demostración para martingalas positivas. Por otro lado, para cualquier otra martingala acotada en $L_1(\Omega)$ podemos aplicar la descomposición de Krickeberg, donde utilizaremos la Observación 1.6 en el caso no uniformemente integrable

$$f = f^1 - f^2 + i f^3 - i f^4$$

con $f^j \ge 0$. El resultado se deduce de que $\|f^j\|_1 \le \|f\|_1$ para $j = 1, 2, 3, 4$. ■

Observación 1.12 Aunque es evidente, es importante señalar que la descomposición de Gundy depende del $\lambda > 0$ considerado. Esto será importante cuando apliquemos dicha descomposición en la siguiente sección. La descomposición original probada por Gundy [**23**] aporta también la estimación adicional $\|\alpha\|_\infty \lesssim \lambda$, no así la descomposición simplificada de Burkholder [**5**] que hemos presentado. Aunque dicha estimación es importante, nosotros no la vamos a necesitar a lo largo de estas notas. En términos de tiempos de parada, se puede decir que Burkholder usa un tiempo de parada mientras que Gundy utiliza dos.

1.5 Desigualdades L_p de martingalas

Probamos ahora una desigualdad L_p generalizada que incluye las transformadas de martingalas, la función cuadrado de Burkholder o la desigualdad de Khintchine entre otros casos particulares. El progreso más destacado en esta dirección se debió a Burkholder y Gundy en su artículo [**6**]. Las notas ya clásicas de Garsia [**20**] recogen mucho de este material. No obstante, nuestro enfoque es algo distinto.

Teorema 1.13 *Consideremos los operadores*

$$T_m f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{km} df_k \quad \textit{con} \quad \sup_{k\geq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{km}|^2 \lesssim 1.$$

Entonces, se tiene la siguiente desigualdad para martingalas acotadas en $L_1(\Omega)$

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} \lesssim \|f\|_1.$$

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, \mu\Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda \Big\} \lesssim \|f\|_1.$$

Es evidente que podemos asumir que $T_m f = 0$ para $m >$ M siempre que la constante final no dependa de M. Fijado $\lambda > 0$, aplicamos entonces la descomposición de Gundy $f = \alpha + \beta + \gamma$ asociada a λ y rompemos en 3 trozos

$$\begin{aligned}
\lambda\, \mu\Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda \Big\} \ &\leq \ \lambda\, \mu\Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m \alpha|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda/3 \Big\} \\
&+ \ \lambda\, \mu\Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m \beta|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda/3 \Big\} \\
&+ \ \lambda\, \mu\Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m \gamma|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda/3 \Big\} \ = \ \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C}.
\end{aligned}$$

Para estimar A, aplicamos la desigualdad de Chebyshev en $L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} \ &\leq \ \frac{9}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m \alpha|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_2^2 = \frac{9}{\lambda} \sum_{m=1}^{\mathsf{M}} \int_\Omega |T_m \alpha|^2 \, d\mu \\
&= \ \frac{9}{\lambda} \sum_{m=1}^{\mathsf{M}} \sum_{j,k=1}^{\infty} \xi_{jm} \overline{\xi}_{km} \int_\Omega d\alpha_j \overline{d\alpha}_k \, d\mu = \frac{9}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |\xi_{km}|^2 \Big) \|d\alpha_k\|_2^2 \lesssim \frac{1}{\lambda} \, \|\alpha\|_2^2,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que A $\lesssim \|f\|_1$ debido a la primera estimación de la descomposición de Gundy. Para estimar el término B utilizamos ahora la desigualdad de Chebyshev en $L_1(\Omega)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathsf{B} \ &\leq \ 3 \int_\Omega \Big(\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} |T_m \beta|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} d\mu = 3 \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{\infty} \Big[\sum_{m=1}^{\mathsf{M}} \xi_{jm} \overline{\xi}_{km} \Big] d\beta_j \overline{d\beta}_k \Big)^{\frac{1}{2}} d\mu \\
&\leq \ 3 \sup_{1 \leq j,k \leq \infty} \Big| \sum_{m=1}^{\mathsf{M}} \xi_{jm} \overline{\xi}_{km} \Big|^{\frac{1}{2}} \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{\infty} |d\beta_j| \, |d\beta_k| \Big)^{\frac{1}{2}} d\mu \ \lesssim \ \sum_{k=1}^{\infty} \|d\beta_k\|_1
\end{aligned}$$

puesto que $|\sum_m \xi_{jm}\overline{\xi}_{km}| \le (\sum_m |\xi_{jm}|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_m |\xi_{km}|^2)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1$. De aquí deducimos que $\mathsf{B} \lesssim \|f\|_1$ debido a la segunda estimación de la descomposición de Gundy. Por último estimamos el término C

$$\begin{aligned} \mathsf{C} &= \lambda\,\mu\Big\{\Big(\sum_{j,k=1}^{\infty}\Big[\sum_{m=1}^{\mathsf{M}}\xi_{jm}\overline{\xi}_{km}\Big]d\gamma_j\overline{d\gamma_k}\Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda/3\Big\} \\ &\le \lambda\,\mu\Big\{\sup_{1\le j,k\le\infty}\Big|\sum_{m=1}^{\mathsf{M}}\xi_{jm}\overline{\xi}_{km}\Big|^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}|d\gamma_k| > \lambda/3\Big\} \;\le\; \lambda\,\mu\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|d\gamma_k| > 0\Big\}. \end{aligned}$$

Como $\{\sum_k |d\gamma_k| > 0\} = \{\sup_k |d\gamma_k| > 0\}$, obtenemos de la tercera estimación de la descomposición de Gundy que $\mathsf{C} \lesssim \|f\|_1$. Esto completa la demostración para $m \le \mathsf{M}$. Como la constante obtenida no depende de M, hemos terminado. ■

Lema 1.14 *Si $(\delta_j)_{j\ge1}$ es la base natural de ℓ_2 y*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty}\phi_j\otimes\delta_j = \big(\phi_j\big)_{j\ge1},$$

entonces se tiene la siguiente desigualdad de normas BMO

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\phi_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathsf{BMO}} \;\lesssim\; \sup_{n\ge1}\Big\|\mathsf{E}_n\Big(\sum_{k\ge n}\|d\varphi_k\|_{\ell_2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\infty}$$

donde $d\varphi_k$ se calcula tomando $d\varphi_k = \sum_{j\ge1} d(\phi_j)_k\otimes\delta_j = (d(\phi_j)_k)_{j\ge1}$.

Demostración. Como $\|\varphi\|_{\ell_2} = (\sum_{j=1}^{\infty}|\phi_j|^2)^{\frac{1}{2}}$, tenemos

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\phi_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\mathsf{BMO}} = \sup_{n\ge1}\Big\|\mathsf{E}_n\Big(\big|\|\varphi\|_{\ell_2} - \mathsf{E}_{n-1}(\|\varphi\|_{\ell_2})\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\infty}.$$

Por otro lado, dadas $f,\xi_n : \Omega \to \mathbb{C}$ con ξ_n una función Σ_{n-1}-medible

$$\begin{aligned} &\Big\|\mathsf{E}_n\Big(\big|f - \mathsf{E}_{n-1}(f)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\infty} \\ &\quad\le\; \sqrt{2}\,\Big\|\mathsf{E}_n\big(|f-\xi_n|^2\big) + \mathsf{E}_n\big(|\mathsf{E}_{n-1}(f-\xi_n)|^2\big)\Big\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\le\; \sqrt{2}\,\Big(\big\|\mathsf{E}_n\big(|f-\xi_n|^2\big)\big\|_{\infty} + \big\|\mathsf{E}_{n-1}\big(|f-\xi_n|^2\big)\big\|_{\infty}\Big)^{\frac{1}{2}} \;\le\; 2\,\big\|\mathsf{E}_n\big(|f-\xi_n|^2\big)\big\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

usando Lema 1.1 d). Tomando $f = \|\varphi\|_2$ y $\xi_n = \|\mathsf{E}_{n-1}(\varphi)\|_2$, deducimos

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big(\sum_{j=1}^\infty |\phi_j|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_{\mathsf{BMO}} \\
&\le \ 2 \sup_{n\ge1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\big| \|\varphi\|_{\ell_2} - \|\mathsf{E}_{n-1}(\varphi)\|_{\ell_2} \big|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_\infty \\
&\le \ 2 \sup_{n\ge1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\|\varphi - \mathsf{E}_{n-1}(\varphi)\|_{\ell_2}^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_\infty \ = \ 2 \sup_{n\ge1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\Big\| \sum_{k\ge n} d\varphi_k \Big\|_{\ell_2}^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_\infty,
\end{aligned}$$

pero tenemos $\mathsf{E}_n(\| \sum_{k\ge n} d\varphi_k\|_{\ell_2}^2) = \sum_{j,k\ge n} \mathsf{E}_n \langle d\varphi_j, d\varphi_k\rangle = \mathsf{E}_n(\sum_{k\ge n} \|d\varphi_k\|_{\ell_2}^2)$. ■

Teorema 1.15 *Consideramos*

$$T_m f = \sum_{k=1}^\infty \xi_{km} df_k \quad \textit{con} \quad \sup_{k\ge1} \sum_{m=1}^\infty |\xi_{km}|^2 \lesssim 1.$$

Entonces, si $1 < p < \infty$, se tienen las siguientes desigualdades

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_{\mathsf{BMO}} \lesssim \|f\|_\infty \quad \textit{y} \quad \Big\| \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_p \le c_p \, \|f\|_p.$$

Si además $\sum_{m=1}^\infty |\xi_{km}|^2 \sim 1$ uniformemente en k, entonces tenemos la equivalencia

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_p.$$

Demostración. De acuerdo con el Lema 1.14

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_{\mathsf{BMO}} \ \lesssim \ \sup_{n\ge1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\sum_{k\ge n} \|d\varphi_k\|_{\ell_2}^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_\infty \ = \ (*)$$

con $\varphi = (T_m f)_{m\ge1}$. Es decir, tenemos $d\varphi_k = (\xi_{km} df_k)_{m\ge1}$, de donde deducimos

$$\sup_{k\ge1} \sum_{m=1}^\infty |\xi_{km}|^2 \lesssim 1 \quad \Rightarrow \quad (*) \ \lesssim \ \sup_{n\ge1} \Big\| \mathsf{E}_n \Big(\sum_{k\ge n} |df_k|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_\infty \ = \ \|f\|_{\mathsf{BMO}}.$$

Como $\|f\|_{\mathsf{BMO}} \le 2\|f\|_\infty$, hemos terminado. Para la estimación superior L_p, notamos primero que el caso $p = 2$ es trivial (ejercicio), de manera que para $1 < p < 2$ podemos interpolar con el Teorema 1.13 y para $2 < p < \infty$ podemos interpolar con la estimación BMO. Para la primera, utilizamos Marcinkiewicz con el operador

$$\Lambda : f \in L_p(\Omega) \mapsto \sum_{m=1}^\infty T_m f \otimes \delta_m \in L_p(\Omega; \ell_2)$$

sustituyendo $L_p(\Omega;\ell_2)$ por $L_{1,\infty}(\Omega;\ell_2)$ en el extremo inferior. Esto es sencillo y muy similar al argumento utilizado en la demostración del Teorema 1.8. Concretamente, se usa el Teorema 'general' de Marcinkiewicz [**15**, Capítulo 2] con valores en ℓ_2. La segunda interpolación require una 'desigualdad de los buenos lambdas' y es más compleja. Como no queremos profundizar más en este tema, lo dejamos como (parte de) un trabajo para final de curso. No obstante, el lector descontento, puede acudir a la Observación 1.16 más abajo y sustituir así dicha interpolación por otra mucho más sencilla, entre $p = 2j$ y $p = 2(j+1)$. Esto completa el argumento para

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \le c_p \, \|f\|_p.$$

Si además asumimos que $\sum_m |\xi_{km}|^2 = \gamma_k \sim 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} df_k \overline{dg_k} \, d\mu \\
&= \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} \xi_{km} df_k \overline{\xi_{km} dg_k} \, d\mu \\
&= \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{km} df_k \Big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{km}}{\gamma_k} \overline{dg_k} \Big) \, d\mu \\
&\le \Big\| \sum_{m=1}^{\infty} T_m f \otimes \delta_m \Big\|_{L_p(\Omega;\ell_2)} \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \Big\| \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{km}}{\gamma_k} dg_k \Big) \otimes \delta_m \Big\|_{L_{p'}(\Omega;\ell_2)}.
\end{aligned}$$

El supremo de la derecha está controlado por $c_{p'}$. Esto completa la prueba. ∎

Las desigualdades obtenidas en el Teorema 1.15 son bastante generales, de manera que es importante mencionar algunos casos particulares destacados. Mencionaremos de momento los más elementales, algunas desigualdades más elaboradas aparecerán más adelante en estas notas. Por ejemplo, desigualdades L_p para funciones cuadrado de medias ergódicas, véase el Capítulo 3.

a) Si tomamos $\xi_{km} = 0$ para $m > 1$ y $\xi_{k1} = \lambda_k$, entonces

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k df_k \Big|$$

es una **transformada de martingalas**. De acuerdo con los Teoremas 1.13 y 1.15 sabemos que esta clase de operadores satisfacen estimaciones $L_1 \to L_{1,\infty}$, estimaciones fuertes en L_p para $1 < p < \infty$ y también $L_\infty \to \mathrm{BMO}$ siempre que

$$\sup_{k \ge 1} |\lambda_k| < \infty.$$

Por otro lado, si además tenemos $|\lambda_k| \sim 1$ uniformemente en k, el Teorema 1.15 nos asegura que tenemos equivalencia de normas para $1 < p < \infty$. Esto es particularmente importante cuando $\lambda_k = \varepsilon_k = \pm 1$, pues entonces obtenemos la **condición UMD** (unconditional for martingale differences). Esta condición es crucial para desarrollar la teoría de martingalas e integrales singulares vectoriales y se escribe

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} df_k \Big\|_p \sim_{c_p} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k df_k \Big\|_p .$$

b) Si tomamos $\xi_{km} = \delta_{km}$, entonces

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{S} f$$

es la **función cuadrado** de martingalas. Puesto que en este caso tenemos $\sum_m |\xi_{km}|^2 = 1$ para todo k, el Teorema 1.15 nos proporciona (además de las estimaciones $L_1 \to L_{1,\infty}$ y $L_\infty \to$ BMO) las siguientes equivalencias conocidas como **desigualdades de Burkholder-Gundy**

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p .$$

c) Si consideramos en particular la martingala

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k$$

donde los λ_k's son escalares y las ε_k's son copias independientes de una Bernoulli equidistribuida en ± 1 (como se explicó en la Sección 1.2), entonces obtenemos las **desigualdades de Khintchine** como consecuencia de las desigualdades de Burkholder-Gundy

$$\Big(\int_0^1 \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon_k(s) \Big|^p ds \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Nótese que el mismo argumento vale para ε_k's v.a.i. de media 0 y unimodulares.

Observación 1.16 La desigualdad

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \lesssim c_p \, \|f\|_p$$

para p arbitrariamente grande junto con la desigualdad de tipo débil del Teorema 1.13 es todo lo que se necesita para producir las equivalencias del Teorema 1.15. A partir de ahí basta con argumentos de interpolación y dualidad. Es interesante notar que dicha desigualdad se sigue de las desigualdades de Khintchine y Burkholder-Gundy cuando $p \in 2\mathbb{N}$ es un entero par. Usando Khintchine, tenemos

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p^p &= \int_\Omega \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |T_m f|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} d\mu \\
&\sim \int_\Omega \int_0^1 \Big| \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m(s) T_m f \Big|^p ds\, d\mu \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m(s) \xi_{km} \Big)}_{\lambda_k(s)} df_k \Big|^p d\mu\, ds.
\end{aligned}$$

Ahora bien, Burkholder-Gundy nos da

$$\int_0^1 \int_\Omega \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m(s) \xi_{km} \Big)}_{\lambda_k(s)} df_k \Big|^p d\mu\, ds \sim \int_0^1 \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(s) df_k|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} d\mu\, ds = (*),$$

y puesto que $p = 2j$ es par

$$(*) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_j = 1}^{\infty} \Big(\int_0^1 \prod_{r=1}^{j} |\lambda_{k_r}(s)|^2\, ds \Big) \Big(\int_\Omega \prod_{r=1}^{j} |df_{k_r}|^2\, d\mu \Big).$$

Las desigualdades de Hölder y Khintchine nos proporcionan

$$\int_0^1 \prod_{r=1}^{j} |\lambda_{k_r}(s)|^2\, ds \le \prod_{r=1}^{j} \Big(\int_0^1 |\lambda_{k_r}(s)|^{2j}\, ds \Big)^{\frac{1}{j}} \sim \prod_{r=1}^{j} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{k_r m}|^2 \Big) \lesssim 1.$$

Por otro lado, esto unido a Burkholder-Gundy de nuevo hace

$$(*) \lesssim \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_j = 1}^{\infty} \int_\Omega \prod_{r=1}^{j} |df_{k_r}|^2\, d\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} d\mu \sim \|f\|_p^p.$$

Observación 1.17 Es habitual en la literatura definir

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)} = \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p = \|\mathcal{S}(f)\|_p.$$

La completación del espacio de martingalas finitas en $L_p(\Omega)$ respecto de la norma dada, se denomina **espacio de Hardy de martingalas**. Nótese que las desigualdades de Burkholder-Gundy nos aseguran que $L_p(\Omega) \simeq \mathcal{H}_p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Por otro lado, las desigualdades maximales de Doob nos aseguran que

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \sim_{c_p} \|f\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)} \sim_{c_p} \|f^*\|_{L_p(\Omega)}, \quad 1 < p < \infty.$$

Más adelante, Davis [**8**] demostró que también se tiene

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)} \sim \|f^*\|_{L_p(\Omega)}$$

para $p = 1$. De hecho, bajo una condición adicional de regularidad, esta equivalencia sigue siendo cierta para $0 < p < 1$. Las desigualdad de Davis nos permite redefinir los espacios de Hardy reemplazando la función cuadrado por la función maximal con norma equivalente. La versión para martingalas del teorema de dualidad de Fefferman [**17**] es que el dual de $\mathcal{H}_1(\Omega)$ es BMO(Ω), véase la demostración en [**20**].

1.6 Ejercicios

1. *Las diferencias de martingala en $L_2(\Omega)$ son ortogonales 2 a 2.*

2. *Construir una martingala en $L_p(\Omega)$ no acotada de la forma $f_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k dg_k$.*

3. *Si $f_n = \mathsf{E}_n(f)$ con $f \in L_1(\Omega)$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable.*

4. *Construir una martingala acotada en $L_1(\Omega)$ pero no uniformemente integrable.*

5. *Demostrar que $\| \; \|_{\mathsf{BMO}}$ es una norma.*

6. *Martingalas 2-indexadas*:

a) *Diferencias de martingala*

$$df = (df_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} df_\gamma \in \Sigma_\gamma \text{ y } \mathsf{E}_{\gamma'}(df_\gamma) = 0 \text{ si } \min(\gamma, \gamma') \neq \gamma.$$

Demostrar que se tiene la relación

$$df_{(j,k)} = f_{(j,k)} - f_{(j-1,k)} - f_{(j,k-1)} + f_{(j-1,k-1)}.$$

b) *Caracterizar la acotación en $L_p(\Omega)$ de dichas martingalas para $1 \leq p \leq \infty$.*

7. *Demostrar las desigualdades maximales de Doob para martingalas inversas en $\mathbb{Z}_-$.*

8. *Dada una partición arbitraria*

$$\mathbb{N} = \bigcup_{m\geq 1} \Omega_m,$$

demostrar que se satisface una desigualdad de Burkholder-Gundy 'desordenada'

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \Big| \sum_{k\in\Omega_m} df_k \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p.$$

Si los Ω_m's son intervalos, dar un argumento que utilice sólo Burkholder-Gundy.

Trabajos propuestos para final de curso:

A) Interpolación L_p-BMO y desigualdades de John-Nirenberg.

B) Transformadas de martingalas vectoriales y espacios UMD.

C) Función cuadrado condicional y desigualdades de Rosenthal.

2

Teoría de Calderón-Zygmund

En este capítulo damos una breve introducción a la teoría de Calderón-Zygmund que nos permitirá obtener desigualdades L_p para integrales singulares. Nuestra presentación no pretende ser exhaustiva. El objetivo es más bien reconocer al final del mismo las analogías con las desigualdades L_p obtenidas para martingalas.

2.1 El maximal de Hardy-Littlewood

Dado $k \in \mathbb{Z}$, existe una única partición de $\mathbb{R}^n$ en cubos de lado 2^{-k} con aristas paralelas a los ejes y con vértices en el retículo $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Llamaremos a dicha partición la **generación** k**-ésima** y escribiremos $\mathcal{Q}_k$ para referirnos a ella. Dado $j \in \mathbb{Z}^n$, un elemento genérico de $\mathcal{Q}_k$ está dado por

$$Q_{j,k} = \prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{j_i - 1}{2^k}, \frac{j_i}{2^k}\Big).$$

Llamaremos **cubos diádicos** a los cubos de $\mathcal{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_k$. Se tiene que:

- Todo cubo de $\mathcal{Q}_k$ contiene 2^n cubos de $\mathcal{Q}_{k+1}$.
- Dado $k \in \mathbb{Z}$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ está contenido en un único cubo de $\mathcal{Q}_k$.
- Si $k_1 \geq k_2$, todo cubo de $\mathcal{Q}_{k_1}$ está contenido en un único cubo de $\mathcal{Q}_{k_2}$.
- Dados dos cubos diádicos, o son disjuntos o uno está contenido en el otro.

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localmente integrable, su **maximal de Hardy-Littlewood** es

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x\in Q\in\mathcal{Q}} \Big|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy\Big|.$$

Este operador satisface nuevamente una desigualdad de tipo débil $(1,1)$ así como desigualdades L_p para $1 < p \leq \infty$. De hecho, veremos que se trata de un caso particular de la función maximal de Doob.

Teorema 2.1 *La función maximal diádica satisface*:

a) *Si* $p=1$, *tenemos la desigualdad débil*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ \mathcal{M}f > \lambda \right\} \right| \lesssim \|f\|_1.$$

b) *Cuando* $1 < p \leq \infty$, *tenemos la desigualdad fuerte*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq c_p \|f\|_p \quad \textit{con} \quad c_p \sim \frac{p}{p-1}.$$

En particular, obtenemos una forma diádica del teorema de diferenciación de Lebesgue. Más concretamente, dado $x \in \mathbb{R}^n$ *consideramos la familia* $Q_k(x)$ *de cubos diádicos tales que* $x \in Q_k(x) \in \mathcal{Q}_k$. *Entonces, dado* $1 \leq p < \infty$ *y* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\, dy \xrightarrow{a.e.} f(x) \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty.$$

Demostración. Dado $k \in \mathbb{Z}$, sea Σ_k la σ-álgebra generada por los cubos diádicos de generación k. Entonces es claro que $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1}$, de modo que tenemos una filtración creciente de σ-subálgebras. Dejamos como ejercicio comprobar que dicha filtración satisface la condición de densidad impuesta en el Capítulo 1. Es decir, en la topología débil-$*$. Si escribimos $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\, dy$, se tiene la siguiente expresión para las esperanzas condicionadas

$$f_k = \mathsf{E}_k(f) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} f_Q \chi_Q.$$

Entonces, podemos escribir el maximal diádico como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{Q}} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy \right| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\, dy \right| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |f_k(x)|.$$

Es decir, $\mathcal{M}f$ no es otra cosa que el maximal de Doob f^* asociado a la filtración diádica. Por consiguiente, las desigualdades maximales se siguen del Teorema 1.8 y el resultado de convergencia en casi todo punto del Corolario 1.9. ■

Observación 2.2 Es un buen ejercicio asegurarse de que el argumento dado en la prueba es riguroso. Por ejemplo, nótese que nuestras demostraciones del Teorema 1.8 y del Corolario 1.9 son para martingalas estándar, mientras que la martingala que nos aparece aquí es bilateral. Demuéstrese que esto no supone un problema.

Observación 2.3 Dado un cubo diádico Q, sabemos que existe un único cubo diádico de lado doble que lo contiene. Llamaremos a dicho cubo el **padre diádico** de Q y lo denotaremos por $\widehat{Q}$. Con esta terminología, las diferencias de martingala respecto de la filtración diádica toman la forma

$$df_k = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} (f_Q - f_{\widehat{Q}})\, \chi_Q.$$

Observación 2.4 Existen otros maximales de Hardy-Littlewood que aparecen en la literatura. Además del maximal diádico, el **maximal centrado** es el más relevante y se define como

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|\mathsf{B}_r(x)|} \int_{\mathsf{B}_r(x)} |f(y)|\, dy$$

donde $\mathsf{B}_r(x)$ denota la bola centrada en x de radio r. Dicho operador también satisface las desigualdades maximales del Teorema 2.1, que en este caso dan lugar al teorema de diferenciación de Lebesgue en su forma habitual. Nosotros no necesitaremos trabajar con el maximal centrado en lo que sigue.

2.2 Descomposición de Calderón-Zygmund

Dada una función integrable y no negativa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, damos en esta sección una descomposición de $f = g_\lambda + b_\lambda$ para cada $\lambda > 0$ que jugará un papel similar al de la descomposición de Gundy en el Capítulo 1. Efectivamente, dado $\lambda > 0$ consideramos el conjunto de nivel

$$\Omega_\lambda = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \mathcal{M}f(x) > \lambda \Big\}.$$

El importante convencerse (ejercicio) de que podemos considerar la partición de Ω_λ en **cubos diádicos maximales**. En otras palabras, existe una partición de Ω_λ en cubos diádicos Q que satisfacen $\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\, dy > \lambda \geq \frac{1}{|R|}\int_R f(y)\, dy$ para cualquier otro $R \in \mathcal{Q}$ que contenga a Q.

La **descomposición de Calderón-Zygmund** consiste en romper $f = g_\lambda + b_\lambda$ en dos trozos. Muy vagamente, se puede decir que el primero mejora a f en el sentido de que $g_\lambda \in L_1 \cap L_\infty \subset L_p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, mientras que el segundo es una suma de funciones de media nula, algo muy conveniente a nuestros propósitos. Si tenemos $\Omega_\lambda = \bigcup_j Q_j$ en diádicos maximales, la descomposición es la siguiente:

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\lambda}(x) f(x) + \sum\nolimits_j \chi_{Q_j}(x) \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)\, dy, \\ b_\lambda(x) &= \sum\nolimits_j \underbrace{\chi_{Q_j}(x) \Big(f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)\, dy \Big)}_{a_j(x)}. \end{aligned}$$

Lema 2.5 *Se tiene que*:

- $\|g_\lambda\|_1 \leq \|f\|_1$ *y* $\|g_\lambda\|_\infty \leq 2^n\lambda$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a_j(x)\,dx = 0$ *y* $\sum_j \|a_j\|_1 \leq 2\|f\|_1$.

Demostración. Comenzamos por g_λ, puesto que

$$\int_{Q_j}\Big(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy\Big)\,dx = \int_{Q_j} f(x)\,dx,$$

es claro que $\|g_\lambda\|_1 \leq \|f\|_1$. Para estimar la norma ∞, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_\lambda$

$$g_\lambda(x) = f(x) \leq \mathcal{M}f(x) \leq \lambda \quad \text{a.e} \quad x.$$

Por otro lado, si $x \in Q_j \subset \Omega_\lambda$, la maximalidad de la partición nos da

$$\frac{1}{|\widehat{Q}_j|}\int_{\widehat{Q}_j} f(y)\,dy \leq \lambda.$$

Por consiguiente, tenemos

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy \leq \frac{2^n}{|\widehat{Q}_j|}\int_{\widehat{Q}_j} f(y)\,dy \leq 2^n\lambda.$$

Esto completa nuestras afirmaciones acerca de g_λ. Pasemos a b_λ, el hecho de que cada **átomo** a_j tiene media 0 se justifica como al comienzo de esta prueba. Para la segunda afirmación

$$\|b_\lambda\|_1 \leq \sum\nolimits_j \int_{Q_j}\Big(f(x) + \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy\Big)\,dx \leq 2\int_{\Omega_\lambda} f(x)\,dx \leq 2\|f\|_1. \qquad \blacksquare$$

Observación 2.6 En particular $\|g_\lambda\|_p \leq (2^n\lambda)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_1^{\frac{1}{p}}$ y por tanto $\|g_\lambda\|_2^2 \leq 2^n\lambda\|f\|_1$.

2.3 Integrales singulares, núcleos de Calderón-Zygmund

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y denotemos por $\Delta = \{(x,x)\,|\,x \in \mathbb{R}^n\}$ a la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Dada una función $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathcal{H}$, diremos que se trata de un **núcleo estándar** si se satisfacen las siguientes propiedades de tamaño y suavidad:

- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos
$$\big\|k(x,y)\big\|_{\mathcal{H}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}.$$

- Existe $0 < \gamma \leq 1$ tal que
$$\begin{aligned} \big\|k(x,y) - k(z,y)\big\|_{\mathcal{H}} &\lesssim \frac{|x-z|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} \quad \text{si} \quad |x-y| > 2|x-z|, \\ \big\|k(x,y) - k(x,z)\big\|_{\mathcal{H}} &\lesssim \frac{|y-z|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} \quad \text{si} \quad |x-y| > 2|y-z|. \end{aligned}$$

Nos referiremos a dicho γ como el **parámetro Lipschitz de suavidad**. Un operador T originalmente definido sobre la clase de Schwartz $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$ –véase la definición por ejemplo en [**15**]– se llama **operador de Calderón-Zygmund con valores en** $\mathcal{H}$ si

- $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$ está acotado.

- Existe un núcleo estándar $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathcal{H}$ tal que
$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y)\, dy$$
para toda $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto y todo $x \notin \operatorname{supp} f$.

Cerramos esta sección con los ejemplos canónicos en el caso escalar $\mathcal{H} = \mathbb{C}$:

a) La **transformada de Hilbert** es el ejemplo por excelencia de operador de Calderón-Zygmund, pues guarda una íntima conexión con el problema clásico de la convergencia de series de Fourier y sirvió como prototipo para desarrollar la teoría. Sea W_0 la distribución (ejercicio) en $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}$ dada por
$$\langle W_0, \phi \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$
La transformada de Hilbert de $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ se define como
$$Hf(x) = (W_0 * f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x),$$
donde $H_\varepsilon f$ denota la **transformada de Hilbert truncada** a altura ε
$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy.$$

Nótese que la integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$ no converge absolutamente pero se define como límite de integrales absolutamente convergentes. Dichos límites se llaman integrales de valor principal y eso nos permite introducir la siguiente terminología

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

Podemos calcular $\widehat{W_0}$ como sigue

$$\begin{aligned} \langle \widehat{W_0}, \phi \rangle &= \langle W_0, \widehat{\phi} \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi|\geq\varepsilon} \widehat{\phi}(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2\pi i x\xi}\,dx\,\frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \Big[\int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} e^{-2\pi i x\xi}\,\frac{d\xi}{\xi} \Big]\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \Big[\frac{-i}{\pi} \int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi x\xi)\,\frac{d\xi}{\xi} \Big]\,dx. \end{aligned}$$

Utilizando que

$$\sup_{0<\alpha<\beta<\infty} \Big| \int_{\alpha\leq|s|\leq\beta} \frac{\sin s}{s}\,ds \Big| < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin s}{s}\,ds = \pi,$$

se deduce (ejercicio) que

$$\langle \widehat{W_0}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(-i\,\mathrm{sgn}(x))\,dx \Rightarrow \widehat{W_0}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi).$$

El teorema de inversión para la transformada de Fourier nos da

$$Hf(x) = (\widehat{Hf})^{\vee}(x) = \big(\widehat{W_0}\widehat{f}\,\big)^{\vee}(x) \Rightarrow \widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

En particular, de acuerdo con el teorema de Plancherel se deduce inmediatamente que la transformada de Hilbert se extiende a una isometría en $L_2(\mathbb{R})$. Es ahora sencillo comprobar (ejercicio) que la transformada de Hilbert es un operador de Calderón-Zygmund. La extensión natural de la transformada de Hilbert a varias dimensiones son las **transformadas de Riesz**

$$R_j f(x) = c_n\,\mathrm{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^n} f(y)\,dy \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

La constante $c_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$ está elegida de modo que se tenga

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

b) La primera generalización de las transformadas de Hilbert y de Riesz, algo menos ambiciosa que la definición dada de operador de Calderón-Zygmund, consistió en considerar **valores principales de integrales de convolución**

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} k(x-y) f(y)\, dy,$$

donde k es una distribución temperada en $\mathbb{R}^n$ que coincide con una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nótese que si f tiene soporte compacto entonces obtenemos fácilmente

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y)\, dy \quad \text{para} \quad x \notin \operatorname{supp} f.$$

Por tanto, T será de Calderón-Zygmund si el núcleo de convolución k –visto como función localmente integrable– es un núcleo estándar y T está acotado en $L_2(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, para la condición de acotación, podemos utilizar el teorema de Plancherel y observar que

$$\widehat{Tf}(\xi) = \widehat{k}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

De este modo, obtenemos la equivalencia

$$T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n) \text{ acotado} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{k} \in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Nótese que sólo hemos justificado una implicación, pruébese la otra!

c) Nuestra discusión en el apartado anterior nos puede conducir a pensar que todo operador de Calderón-Zygmund escalar (i.e. tomando $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ para el espacio de Hilbert) es de la forma

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} k(x,y) f(y)\, dy,$$

para cierto núcleo estándar k, lo que no es cierto. De la hipótesis para el tamaño del núcleo $|k(x,y)| \lesssim 1/|x-y|^n$, se deduce que las correspondientes integrales truncadas

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y| \geq \varepsilon} k(x,y) f(y)\, dy$$

tienen sentido para funciones f de la clase de Schwartz. No obstante, el límite de $T_\varepsilon f$ puede no existir o puede ser distinto de Tf. De hecho, se tiene que si dos operadores T_1 y T_2 de Calderón-Zygmund tienen asociado el mismo núcleo entonces se diferencian en un operador de multiplicación puntual. Esto lo dejamos como ejercicio al final del capítulo.

2.4 Desigualdades L_p para operadores de Calderón-Zygmund

En esta sección obtenemos resultados análogos a los Teoremas 1.13 y 1.15 para operadores de Calderón-Zygmund. Necesitaremos la siguiente terminología. El tamaño de un cubo Q en $\mathbb{R}^n$ se define como la longitud $\ell(Q)$ de su lado. Dado $\delta > 1$, el **padre δ-concéntrico** de Q es el único cubo δQ concéntrico con el cubo Q con $\ell(\delta Q) = \delta \ell(Q)$. Comenzamos por la desigualdad de tipo débil (1,1).

Teorema 2.7 *Sea*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y)\, dy \quad \textit{para} \quad x \notin \operatorname{supp} f$$

un operador de Calderón-Zygmund con valores en $\mathcal{H}$ para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y cierto núcleo estándar $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathcal{H}$. Entonces, dada una función $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \Big| \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \Big| \ \|Tf(x)\|_{\mathcal{H}} > \lambda \Big\} \Big| \lesssim \|f\|_1.$$

Demostración. Fijado $\lambda > 0$, escribimos como antes $\Omega_\lambda = \{\mathcal{M}f > \lambda\}$ para denotar al conjunto de nivel λ de la función maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}f$. Si consideramos la partición $\Omega_\lambda = \bigcup_j Q_j$ en cubos diádicos maximales, definimos

$$\widetilde{\Omega}_\lambda = \bigcup_j 2Q_j$$

como la unión de los respectivos padres 2-concéntricos. Asumiremos por sencillez que $\mathcal{H}$ es separable, de manera que podemos fijar una base ortonormal numerable $(u_m)_{m\geq 1}$ de $\mathcal{H}$. Si $k_m(x,y) = \langle u_m, k(x,y)\rangle$, denotaremos por $T_m f$ al operador asociado al núcleo k_m. Es sencillo comprobar (ejercicio) que dicho operador es de Calderón-Zygmund con constantes uniformemente controladas en $m \geq 1$. Entonces tenemos que acotar la cantidad

$$\mathsf{A} = \lambda \Big| \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda \Big\} \Big|$$

con constantes independientes de $\lambda > 0$. La desigualdad quasi-triangular proporciona

$$\mathsf{A} \leq \lambda \Big| \Big\{ \Big(\sum_{m=1}^\infty |T_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}_\lambda} > \lambda \Big\} \Big| + \lambda\, |\widetilde{\Omega}_\lambda| = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2.$$

La estimación de A_2 es inmediata pues

$$\mathsf{A}_2 \leq \lambda \sum\nolimits_j |2Q_j| = 2^n \lambda |\Omega_\lambda| \lesssim \|f\|_1,$$

debido a la desigualdad maximal de Hardy-Littlewood. Para acotar A_1 utilizaremos la descomposición de Calderón-Zygmund de $f = g_\lambda + b_\lambda$ a altura λ. De ese modo obtenemos la estimación

$$\mathsf{A}_1 \lesssim \lambda \Big| \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \big|T_m g_\lambda\big|^2 \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}_\lambda} > \frac{\lambda^2}{2} \Big\} + \lambda \Big| \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \big|T_m b_\lambda\big|^2 \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}_\lambda} > \frac{\lambda^2}{2} \Big\} = \mathsf{A}_g + \mathsf{A}_b.$$

La desigualdad de Chebychev nos proporciona

$$\mathsf{A}_g \le \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big|T_m g_\lambda(x)\big|^2 \, dx = \frac{2}{\lambda} \big\|T g_d\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} \lesssim \frac{1}{\lambda} \|g_d\|_2^2 \le 2^n \|f\|_1,$$

donde hemos utilizado la acotación de $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ que se asume en la definición de operador de Calderón-Zygmund y las estimaciones obtenidas para la parte buena de la descomposición de Calderón-Zygmund. Para estimar el término A_b lo escribimos como

$$\mathsf{A}_b = \lambda \Big| \Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \big|T_m b_\lambda\big|^2 \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}_\lambda} \Big)^{\frac{1}{2}} > \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \Big\}$$

y utilizamos nuevamente la desigualdad de Chebychev

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_b &\le \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}_\lambda} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} k_m(x,y)\, b_\lambda(y)\, dy \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\lesssim \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \Big| \int_{Q_j} k_m(x,y) b_\lambda(y)\, dy \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dx = \mathsf{B}_b, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que b_λ está soportada en $\Omega_\lambda = \bigcup_j Q_j$. Por otro lado, si escribimos c_j para referirnos al centro del cubo Q_j y puesto que $\int_{Q_j} b_\lambda(y)\, dy = \int_{Q_j} f(y) - f_{Q_j}\, dy = 0$, deducimos que

$$\mathsf{B}_b = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \Big| \int_{Q_j} \big(k_m(x,y) - k_m(x,c_j)\big)\, b_\lambda(y)\, dy \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Aplicando la desigualdad integral de Minkowski y la suavidad del núcleo

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_b &\le \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \int_{Q_j} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \big|k_m(x,y) - k_m(x,c_j)\big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} |b_\lambda(y)|\, dy\, dx \\ &= \sum_j \int_{Q_j} \Big(\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \big\|k(x,y) - k(x,c_j)\big\|_{\mathcal{H}}\, dx \Big) |b_\lambda(y)|\, dy \\ &\lesssim \sum_j \Big[\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \frac{|\ell(Q_j)|^\gamma}{|x-c_j|^{n+\gamma}}\, dx \Big] \Big[\int_{Q_j} |b_\lambda(y)|\, dy \Big] \\ &\lesssim \sum_j \int_{Q_j} |b_\lambda(y)|\, dy \le 2\, \|f\|_1. \end{aligned}$$

∎

Recordamos la notación

$$g_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q g(y)\,dy.$$

Teorema 2.8 *Sea*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)\,dy \quad \textit{para} \quad x \notin \operatorname{supp} f$$

un operador de Calderón-Zygmund con valores en $\mathcal{H}$ para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y cierto núcleo estándar $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathcal{H}$. Entonces, dada $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, obtenemos la siguiente desigualdad $L_\infty - \mathrm{BMO}$

$$\sup_{Q\,\mathrm{cubo}} \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| Tf(x) - Tf_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_\infty.$$

Dado $1 < p < \infty$, se deduce por interpolación que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big\| Tf(x) \big\|_{\mathcal{H}}^p\,dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq c_p\,\|f\|_p.$$

Si T es una isometría $L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$, obtenemos $\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} \sim_{c_p} \|f\|_p$.

Demostración. Para estimar una norma BMO, es habitual reemplazar los promedios f_Q por ciertos vectores $\alpha_Q \in \mathcal{H}$ más convenientes para nuestros propósitos. Esto es posible gracias a la siguiente desigualdad

$$\sup_{Q\,\mathrm{cubo}} \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| g(x) - g_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \sup_{Q\,\mathrm{cubo}} \inf_{\alpha_Q\in\mathcal{H}} \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| g(x) - \alpha_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La demostración es muy sencilla puesto que

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| g(x) - g_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| g(x) - \alpha_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}} + \big\| \alpha_Q - g_Q \big\|_{\mathcal{H}}$$

y el segundo término de la derecha se puede estimar por Jensen

$$\big\| \alpha_Q - g_Q \big\|_{\mathcal{H}} = \Big\| \frac{1}{|Q|}\int_Q g(x) - \alpha_Q\,dx \Big\|_{\mathcal{H}} \leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big\| g(x) - \alpha_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2\,dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Combinando estas desigualdades, tomando ínfimos en α_Q y luego supremos en Q obtenemos finalmente la desigualdad buscada. Por otro lado, como ya hicimos en la prueba del Teorema 2.7, fijada una base ortonormal $(u_m)_{m\geq 1}$ de $\mathcal{H}$, definimos los núcleos escalares

$$k_m(x,y) = \langle u_m, k(x,y) \rangle$$

y los operadores de Calderón-Zygmund $T_m f$ asociados a dichos núcleos. Esto nos permite definir los α_Q adecuados en términos de sus coeficientes $\alpha_{Q,m} = \langle u_m, \alpha_Q \rangle$ respecto de la base dada. Tomamos así

$$\alpha_Q = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{Q,m} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{|Q|} \int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} k_m(z,y) f(y)\, dy \Big)\, dz \Big] u_m.$$

Hasta ahora, hemos demostrado que tenemos

$$\begin{aligned} & \sup_{Q \,\mathrm{cubo}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| Tf(x) - Tf_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad \lesssim \sup_{Q \,\mathrm{cubo}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| Tf(x) - \alpha_Q \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad = \sup_{Q \,\mathrm{cubo}} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q \big| T_m f(x) - \alpha_{Q,m} \big|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, debemos estimar las diferencias $T_m f(x) - \alpha_{Q,m}$ para $x \in Q$

$$\begin{aligned} T_m f(x) - \alpha_{Q,m} &= T_m(f \chi_{2Q})(x) \\ &+ \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \big(k_m(x,y) - k_m(z,y) \big) f(y)\, dy\, dz \\ &= \mathsf{A}_{m1} f(x) + \mathsf{A}_{m2} f(x). \end{aligned}$$

Para $\mathsf{A}_1 f = \sum_m \mathsf{A}_{m1} f \otimes u_m$, tenemos

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| \mathsf{A}_1 f(x) \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} &= \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| T(f\chi_{2Q})(x) \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{|Q|}} \big\| T(f\chi_{2Q}) \big\|_{L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})} \lesssim \frac{\|f\chi_{2Q}\|_2}{\sqrt{|Q|}} \lesssim \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Para $\mathsf{A}_2 f = \sum_m \mathsf{A}_{m2} f \otimes u_m$, tenemos

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| \mathsf{A}_2 f(x) \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \sup_{x \in Q} \big\| \mathsf{A}_2 f(x) \big\|_{\mathcal{H}} \\ &= \sup_{x \in Q} \Big\| \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \big(k(x,y) - k(z,y) \big) f(y)\, dy\, dz \Big\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sup_{x,z \in Q} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \big(k_m(x,y) - k_m(z,y) \big) f(y)\, dy \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, con la ayuda de la desigualdad integral de Minkowski, deducimos

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big\| \mathsf{A}_2 f(x) \big\|_{\mathcal{H}}^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} & \\
& \le \sup_{x,z \in Q} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \big[\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \big| k_m(x,y) - k_m(z,y) \big| \, dy \big]^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty \\
& \le \sup_{x,z \in Q} \Big[\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \big| k_m(x,y) - k_m(z,y) \big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dy \Big] \|f\|_\infty \\
& \le \sup_{x,z \in Q} \Big[\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \big\| k(x,y) - k(z,y) \big\|_{\mathcal{H}} \, dy \Big] \|f\|_\infty \\
& \le \sup_{x,z \in Q} \Big[\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{\ell(Q)^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}} \, dy \Big] \|f\|_\infty \lesssim \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones hasta ahora, obtenemos inmediatamente la desigualdad $L_\infty - \mathrm{BMO}$ anunciada. Para probar la estimación L_p por arriba, procedemos por interpolación. Efectivamente, el Teorema 2.7 junto con la desigualdad $L_\infty - \mathrm{BMO}$ probada, nos aseguran que

$$\begin{aligned}
T: \ f \in L_1(\mathbb{R}^n) & \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} T_m f \otimes u_m \in L_{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}), \\
T: f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) & \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} T_m f \otimes u_m \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}),
\end{aligned}$$

son operadores acotados. Por otro lado, la acotación de $T: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$ se tiene por hipótesis ya que asumimos que T es de Calderón-Zygmund. Por tanto, la acotación L_p para $1 < p < 2$ se sigue del teorema de interpolación de Marcinkiewicz mientras que para $2 < p < \infty$ se obtiene del método de interpolación compleja, que nos asegura que $[\mathrm{BMO}, L_2]_{2/p} = L_p$. El lector interesado puede acudir al Capítulo 6 de **[15]**. Para concluir, nos queda ver la equivalencia de normas $\|f\|_p \sim_{c_p} \|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})}$ bajo la condición adicional de que T es una isometría en L_2. No obstante, esto se sigue por un argumento de dualidad. Efectivamente, la identidad de polarización nos da

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \langle Tf, Tg \rangle \lesssim \big\| Tf \big\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})}. \qquad \blacksquare$$

Observación 2.9 Cabe destacar la indudable analogía entre las desigualdades L_p de martingalas de los Teoremas 1.13/1.15 y las desigualdades L_p para operadores de Calderón-Zygmund en los Teoremas 2.7/2.8. Así, la acotación $T: L_2 \to L_2(\mathcal{H})$ se corresponde con la condición $\sup_k \sum_m |\xi_{km}|^2 \lesssim 1$, los operadores T_m asociados a $k_m = \langle u_m, k(x,y) \rangle$ se corresponden con $T_m f = \sum_k \xi_{km} df_k$, etc... Este fenómeno se repetirá en el Capítulo 3, cuando estudiemos los semigrupos de difusión.

2.5 Ejemplos propios de la teoría clásica

En esta sección analizaremos algunas de las desigualdades clásicas de la teoría de Calderón-Zygmund que se siguen de los Teoremas 2.7 y 2.8. Más allá de una mera enumeración de desigualdades, nuestro objetivo será relacionarlas en la medida de lo posible con las desigualdades L_p de martingalas probadas en el Capítulo 1.

a) Operadores de Calderón-Zygmund escalares. Si $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, los operadores de Calderón-Zygmund son moralmente el contrapunto de las transformadas de martingalas. Comenzamos justificando este punto de vista mostrando que *toda transformada de martingalas en $\mathbb{R}^n$ respecto de la filtración diádica es casi de Calderón-Zygmund*

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k df_k(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} (f_Q - f_{\widehat{Q}})\chi_Q(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \chi_Q(x)\Big(\frac{\chi_Q(y)}{|Q|} - \frac{\chi_{\widehat{Q}}(y)}{|\widehat{Q}|}\Big)}_{k(x,y)} f(y)\, dy, \end{aligned}$$

incluso si $x \in \mathrm{supp} f$. El núcleo $k(x,y)$ es 'casi' estándar. Es un ejercicio muy interesante analizar el porqué de esta afirmación. Otra forma de evidenciar las similitudes entre operadores de Calderón-Zygmund escalares y transformadas de martingalas es considerar **multiplicadores de Fourier en** $\mathbb{T}$. Así es, ya hemos destacado la importancia de los valores principales de integrales de convolución como prototipos de operadores de Calderón-Zygmund. Dichos operadores son de la forma $Tf = k * f$ para cierta distribución temperada k que coincide con una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. También se llaman multiplicadores de Fourier puesto que al otro lado de la transformada de Fourier la convolución se transforma en un producto puntual. En el caso del toro $\mathbb{T}$ obtenemos una versión discretizada de la misma idea. Efectivamente, en este caso los multiplicadores de Fourier son de la forma

$$Tf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \int_{\mathbb{T}} k(x-y) f(y)\, dy \quad \text{con} \quad \widehat{k}(n) = \lambda_n.$$

Las similitudes son ahora evidentes. Una transformada de martingalas reemplaza la descomposición ortogonal $f \mapsto (\widehat{f}(n)e^{2\pi i n \cdot})$ del sistema trigonométrico por la descomposición en diferencia de martingalas $f \mapsto (df_n)$. Nótese que la condición necesaria y suficiente de acotación L_2 es $\sup_n |\lambda_n| < \infty$ en ambos casos.

b) Integrales de Poisson. Sea

$$\mathbb{R}_{\downarrow}^{n} = \Big\{ (x,t) \, \big| x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0 \Big\}.$$

Si pensamos en $\mathbb{R}^n$ como la frontera de $\mathbb{R}_{\downarrow}^{n}$ podemos plantear el correspondiente problema de Dirichlet. Es decir, dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se trata de encontrar una función armónica $u(x,t)$ en $\mathbb{R}_{\downarrow}^{n}$ cuyos valores frontera en $\mathbb{R}^n$ coinciden con $f(x)$. En otras palabras, se tiene

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \quad \text{y} \quad u(x,0) = f(x)$$

donde la función $u(\cdot,0)$ se interpreta como cierto límite de las funciones $u(\cdot,t)$ cuando $t \to 0^+$. La solución a dicho problema es explícita cuando $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ y viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|t} e^{-2\pi i \langle x,\xi \rangle} \, d\xi.$$

Efectivamente, la integrabilidad L_2 de $\widehat{f}$ unida al rápido decaimiento de $e^{-2\pi|\xi|t}$ para $t > 0$ hacen que podamos calcular Δu derivando bajo el signo integral y entonces usamos que $e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-2\pi|\xi|t}$ es armónica para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, se tiene que $u(\cdot,t) \to f$ en $L_2(\mathbb{R}^n)$ debido al teorema de Plancherel. Dicha solución del problema se puede escribir utilizando el **núcleo de Poisson**

$$k_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|t} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle} \, dy \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Entonces es claro que

$$u(x,t) = P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x-y) f(y) \, dy = k_t * f(x).$$

En lo que sigue nos referiremos a $P_t f$ para $t > 0$ como las integrales de Poisson de f. Por otro lado, es inmediato comprobar que $k_{t_1+t_2} = k_{t_1} * k_{t_2}$ utilizando la transformada de Fourier. Por consiguiente deducimos que

$$P_{t_1+t_2} f(x) = P_{t_1} \circ P_{t_2} f(x),$$

lo que quiere decir que la familia $(P_t)_{t \geq 0}$ forma un semigrupo uniparamétrico de operadores. De hecho, se trata del ejemplo canónico de una estructura sobre la que desarrollaremos la teoría en el Capítulo 3. Una de las ideas principales es que muchos semigrupos como este se pueden interpretar convenientemente como *martingalas inversas* en tiempo continuo. Aunque aquí no daremos más detalles, nótese que se tiene $P_t f \to f$ cuando $t \to 0^+$ en la norma L_2.

Se puede consultar en casi cualquier texto de análisis armónico que

$$k_t(x) = c_n \frac{t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{donde} \quad c_n = \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\pi^{-\frac{n+1}{2}}.$$

c) La función g de Littlewood-Paley. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 f(x) &= \Big(\int_0^\infty \Big| \frac{\partial P_t}{\partial t} f(x) \Big|^2 t\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{S}_2 f(x) &= \Big(\int_0^\infty \big| \nabla P_t f(x) \big|^2 t\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde $|\nabla h(x)|^2 = \sum_k |\partial_{x_k} h|^2(x)$. La función g de Littlewood-Paley es

$$\mathcal{S} f(x) = \Big(\big[\mathcal{S}_1 f\big]^2(x) + \big[\mathcal{S}_2 f\big]^2(x) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Supongamos que existen operadores $\Lambda_j : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_j)$ tales que:

- $\|\mathcal{S}_j f\|_p = \|\Lambda_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_j)}$.
- $\mathcal{S}_j : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_j)$ son isometrías.
- $\mathcal{S}_j$ son operadores de Calderón-Zygmund con valores en $\mathcal{H}_j$.

La segunda propiedad es cierta, véase el Ejercicio 8 de este capítulo. La tercera no, pero podemos escribir $\mathcal{S}_j$ como límite de operadores de Calderón-Zygmund con valores en $\mathcal{H}_j$, véase [**67**] páginas 83-85. En tal caso el Teorema 2.8 nos asegura que existe una constante $c_p \sim p^2/(p-1)$ tal que se tienen las siguientes equivalencias

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \|\mathcal{S} f\|_p.$$

Nótese que esta equivalencia de normas representa el análogo en este contexto de las desigualdades de Burkholder-Gundy para la función cuadrado de martingalas $\mathcal{S} f$ introducida en el Capítulo 1. Esto es especialmente claro en el caso de la función cuadrado $\mathcal{S}_1 f$. Efectivamente, si aceptamos que $P_t f$ se puede interpretar como una martingala inversa en tiempo continuo, las diferencias estarán dadas por las derivadas de dicha función respecto de $t > 0$. Como veremos en el Capítulo 3, la medida $d\mu(t) = tdt$ es la correcta en el caso continuo.

d) Descomposición diádica de Littlewood-Paley. Hasta ahora hemos dado con contrapuntos de las desigualdades L_p para transformadas de martingalas y de las desigualdades de Burkholder-Gundy. Ambas desigualdades son casos particulares del Teorema 1.15. Es por tanto interesante preguntarse por una desigualdad L_p para operadores de Calderón-Zygmund que se relacione con el Teorema 1.15 en su forma más general. Consideramos los multiplicadores de Fourier

$$\widehat{M_k f}(\xi) = \chi_{\Delta_k}(\xi) \widehat{f}(\xi) \quad \text{con} \quad \Delta_k = \Big\{ \xi \in \mathbb{R} \,\Big|\, 2^k \le |\xi| < 2^{k+1} \Big\}.$$

Una aplicación inmediata del Teorema 2.8 es la desigualdad

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |M_k f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p .$$

La demostración consiste en aproximar los multiplicadores χ_{Δ_k} por funciones suaves $\psi_k(\xi) = \psi_0(2^{-k}\xi)$. En tal caso, los operadores resultantes resultan ser de Calderón-Zygmund y el Teorema 2.8 hace el resto. Más concretamente, si $\mathcal{M}_k$ denota el correspondiente multiplicador de Fourier suavizado, obtenemos la desigualdad deseada fácilmente a partir de

$$\Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{M}_k f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq c_p \|f\|_p .$$

Para más detalles véase el Capítulo 8 de [**15**]. Ya sabemos que los operadores de Calderón-Zygmund $\mathcal{M}_k$ representan transformadas de martingalas. Así, la desigualdad probada representa a una *función cuadrado de transformadas de martingalas*, el prototipo de operador considerado en el Teorema 1.15. Nótese no obstante que esto es sólo un ejemplo. Efectivamente, a diferencia de lo que ocurre en el Teorema 1.15, las desigualdades consideradas en los apartados anteriores no se siguen en absoluto de aquí como casos particulares.

Observación 2.10 Las técnicas desarrolladas aquí se utilizan entre otras cosas para dar condiciones suficientes de acotación L_p de multiplicadores de Fourier. Ejemplo de ello son los **teoremas del multiplicador de Hörmander y Marcinkiewicz**. El lector puede acudir por ejemplo al Capítulo 8 de [**15**] para más información.

Hasta ahora hemos visto que existe cierta relación entre las construcciones con martingalas y con operadores de Calderón-Zygmund. En el próximo capítulo veremos cómo construcciones tales como la función maximal o la función cuadrado también encuentran un marco en el contexto de los semigrupos de operadores y satisfacen desigualdades L_p similares.

2.6 Ejercicios

1. *Si T es un OCZ de convolución con núcleo k, entonces $\widehat{k} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

2. *Dar un ejemplo de operador asociado a un núcleo estándar y no acotado en $L_2(\mathbb{R})$.*

3. *Sean T_1 y T_2 dos operadores de Calderón-Zygmund asociados al mismo núcleo. Entonces se diferencian en un multiplicador puntual $f \mapsto \gamma f$ para cierta $\gamma \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Probar la desigualdad de Cotlar y la acotación del maximal T^* en dimensión n.*

5. *Escribir la descomposición de Calderón-Zygmund como diferencias de martingala.*

6. *Escribir la descomposición de Gundy para la filtración diádica en $\mathbb{R}^n$ y compararlas.*

7. *Analizar si se dan las propiedades de núcleo estándar para*

$$k(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \chi_Q(x)\Big(\frac{\chi_Q(y)}{|Q|} - \frac{\chi_{\widehat{Q}}(y)}{|\widehat{Q}|}\Big) \quad \textit{con} \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k| < \infty.$$

8. *La función g de Littlewood-Paley.*

a) *Demostrar que si $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, entonces*

- $\displaystyle \frac{\partial P_t f}{\partial t}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi|\xi|\widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi,$
- $\displaystyle \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{\partial P_t}{\partial t} f(x)\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} 8\pi^2|\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-4\pi|\xi|t}\, d\xi.$

b) *Sea $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{R}_+, tdt)$ y $\Lambda_1 : L_2(\mathbb{R}^n) \mapsto L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_1)$ con*

$$\Lambda_1 f(x,t) = 2\frac{\partial P_t}{\partial t} f(x) = 2\frac{\partial k_t}{\partial_t} * f(x).$$

Utilizar **a)** *para ver que Λ_1 es una isometría y deducir $\|f\|_2 = 2\|\mathcal{S}_1 f\|_2$.*

c) *Los mismos argumentos sirven para $\mathcal{S}_2$. Identificar $\mathcal{H}_2$ y Λ_2 en este caso.*

Trabajos propuestos para final de curso:

A) Quasi-ortogonalidad y el teorema Tb.

B) La desigualdad maximal de Fefferman-Stein.

C) Integrales singulares con medidas no doblantes.

3

Semigrupos simétricos de difusión

La potencia de funciones maximales y funciones cuadrado en análisis armónico se ha justificado ampliamente hasta ahora, tanto para martingalas como en análisis de Fourier euclídeo. Nos centramos ahora en extender dichos resultados a los semigrupos de operadores, que ya han aparecido indirectamente en estas notas. El libro de Stein [**66**] es una referencia excelente.

3.1 Semigrupos de operadores

Dado (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito, sea $(T_t)_{t \geq 0}$ una familia de operadores que llevan funciones Σ-medibles en funciones Σ-medibles. Diremos que dicha familia es un **semigrupo simétrico de difusión** si se satisfacen las condiciones habituales de semigrupo de operadores

- $T_0 = id$,
- $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$,
- $f \in L_2(\Omega) \Rightarrow T_t f \in L_2(\Omega)$ y $\lim_{t \to 0} T_t f = f$ en norma L_2,

y las siguientes propiedades adicionales:

1. **Contractividad:** $\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$.
2. **Simetría:** $\langle T_t f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, T_t g \rangle_{L_2(\Omega)}$ para $f, g \in L_2(\Omega)$.
3. **Positividad:** $T_t f \geq 0$ para toda función Σ-medible $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$.
4. **Conservación:** $T_t(1_\Omega) = 1_\Omega$, donde 1_Ω denota la función constante 1 en Ω.

La definición que hemos considerado implica en particular que el semigrupo $(T_t)_{t \geq 0}$ es un **semigrupo C_0 contractivo** en $L_2(\Omega)$. Es decir, se dan las siguientes propiedades

- $T_0 = id$,
- $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$,
- $\|T_t f\|_2 \leq \|f\|_2$,
- $T_f f$ es continua en t respecto de la métrica L_2 para toda $f \in L_2(\Omega)$.

Efectivamente, tenemos

$$\big\|T_{t+\varepsilon} f - T_t f\big\|_2 = \big\|T_t\big(T_\varepsilon f - f\big)\big\|_2 \leq \big\|T_\varepsilon f - f\big\|_2 \to 0$$

y de forma similar usamos $T_{t-\varepsilon} f - T_t f = T_{t-\varepsilon}(f - T_\varepsilon f)$. Los semigrupos C_0 están muy estudiados en la literatura, véase por ejemplo [**21, 44**]. Para tales semigrupos se puede definir el **generador infinitesimal** del semigrupo por la relación

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} = \frac{d}{dt} T_t f_{|t=0} \quad \text{en sentido } L_2.$$

Esta noción se apoya en una observación elemental. A saber, la ley de semigrupo $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$ nos dice que el semigrupo transforma (como función de $t > 0$) sumas en productos. En el contexto de las funciones estaríamos hablando de funciones exponenciales, en el contexto de los operadores se tiene formalmente la identidad $T_t = \exp(tA)$. Para justificar esta afirmación, observamos (ejercicio) que $u(t) = T_t f$ resuelve formalmente el problema de valores iniciales

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad , \quad u(0) = f.$$

Esto nos indica que la relación $T_t = \exp(tA)$ es al menos razonable. No obstante, el generador infinitesimal presenta dos problemas que impiden llegar a esa conclusión de forma automática. En primer lugar, A es un operador lineal cuyo dominio es

$$\mathrm{dom}(A) = \Big\{ f \in L_2(\Omega) \; \Big| \; \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} \in L_2(\Omega) \Big\}.$$

Si dicho dominio no es denso en $L_2(\Omega)$, la identidad $T_t = \exp(tA)$ no es demasiado útil! En segundo lugar, el operador A es en general no acotado, por lo que la definición habitual $\exp(tA) = \sum_{n\geq 0} t^n A^n / n!$ no es una buena manera de definir $\exp(tA)$. Estas cuestiones son clásicas y su solución se puede encontrar en cualquier texto sobre el tema. Nosotros nos limitamos a enunciar los resultados que dan respuestas a nuestras preguntas. Demostraciones detalladas aparecen en [**21**].

Proposición 3.1 *Si $A \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$, entonces*

$$\mathcal{T} = \Big\{ T_t = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \; \Big| \; t > 0 \Big\}$$

es un semigrupo C_0 con generador infinitesimal A y tal que $\|T_t - id\|_{\mathcal{B}(L_2(\Omega))} \to 0$ cuando $t \to 0^+$. Recíprocamente, si $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 que satisface $\|T_t - id\|_{\mathcal{B}(L_2(\Omega))} \to 0$ cuando $t \to 0^+$, entonces el generador infinitesimal A es un operador acotado en $L_2(\Omega)$ y se tiene que $T_t = \exp(tA) = \sum_{n\geq 0} t^n A^n/n!$.

Este resultado caracteriza los semigrupos con generador infinitesimal acotado bajo la condición $\|T_t - id\|_{\mathcal{B}(L_2(\Omega))} \to 0$. No obstante, dicha condición es demasiado exigente y por ello los semigrupos interesantes tendrán casi siempre un generador no acotado en $L_2(\Omega)$. En ese caso, podemos decir los siguiente.

Proposición 3.2 *Si $\mathcal{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 contractivo y A es su generador infinitesimal, entonces A es un operador cerrado y densamente definido en $L_2(\Omega)$. Es decir, el dominio de A es denso en $L_2(\Omega)$. Esto se aplica en particular a todo semigrupo simétrico de difusión.*

Observación 3.3 Este resultado se sigue de una caracterización de los generadores de semigrupos C_0 contractivos conocida como el Teorema de Hille-Yosida, véase [**21**] para más información. Puesto que A no es acotado en general, la definición que se utiliza de $\exp(tA)$ para obtener $T_t = \exp(tA)$ en la demostración del Teorema de Hille-Yosida es por aproximación de operadores acotados $A = \lim_\lambda A_\lambda$

$$\exp(tA) = \lim_\lambda \exp(tA_\lambda) = \lim_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_\lambda^n}{n!}.$$

Un operador lineal $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se llama **positivo** si $\langle \Lambda u, u\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Nótese que esto no guarda relación con la noción de positividad utilizada en la definición de semigrupo de difusión! Cuando $\mathcal{H}$ es finito dimensional, podemos escribir Λ como una matriz respecto de una base ortonormal de $\mathcal{H}$ dada. Todo operador positivo diagonaliza con autovalores positivos y así podemos escribir $\Lambda = UDU^*$ para cierta matriz unitaria U de cambio de base y cierta matriz diagonal D. Eso nos permite definir la raíz cuadrada $\Lambda^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}}U^*$, que sigue siendo un operador positivo. El lector debería poder justificar todas estas afirmaciones. La operación de tomar raíces cuadradas es igualmente factible cuando $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, como ya sabrá el lector familiarizado con la teoría espectral. Un exposición excelente se puede encontrar en el texto de Folland [**19**].

Nótese que si A es el generador infinitesimal de un semigrupo simétrico de difusión $(T_t)_{t\geq 0}$, entonces $-A$ es siempre un operador positivo en $L_2(\Omega)$. Efectivamente, por simetría y contractividad tenemos

$$\begin{aligned} \big\langle Af, f\big\rangle_{L_2(\Omega)} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big\langle T_t f, f\big\rangle_{L_2(\Omega)} - \big\langle f, f\big\rangle_{L_2(\Omega)}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big\langle T_{t/2} f, T_{t/2} f\big\rangle_{L_2(\Omega)} - \big\langle f, f\big\rangle_{L_2(\Omega)}\Big) \;\leq\; 0. \end{aligned}$$

El hecho de que $-A$ sea un operador positivo en un espacio de Hilbert, nos permite considerar su raíz cuadrada $\sqrt{-A}$ y construir el **semigrupo subordinado** de $(T_t)_{t\geq 0}$ formalmente definido como

$$P_t = \exp(-t\sqrt{-A}).$$

De hecho, utilizando la *fórmula de subordinación*

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, e^{-\beta^2/4u}\, du,$$

podemos escribir $P_t f$ como sigue

$$P_t f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, T_{t^2/4u} f\, du.$$

El semigrupo subordinado $(P_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo simétrico de difusión, lo dejamos como ejercicio al final del capítulo. Además, se tiene que la función $u(t) = P_t f$ resuelve formalmente el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0 \quad , \quad u(0) = f.$$

Analizamos ahora los ejemplos más notables de semigrupos simétricos de difusión.

a) El **semigrupo del calor** en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$T_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy = k_t * f(x).$$

Para ver que se trata de un semigrupo simétrico de difusión tomamos

$$\varphi(x) = e^{-|x|^2/4}/(4\pi)^{\frac{n}{2}} \quad \text{y} \quad \varphi_t(x) = \frac{1}{t^n}\varphi(x/t).$$

Puesto que φ es integrable con integral 1 y $k_t(x) = \varphi_{\sqrt{t}}(x)$, se tiene que el núcleo del calor k_t es una aproximación de la identidad. De ahí se deduce que la extensión $T_0 = id$ tiene sentido y que $T_t f \to f$ cuando $t \to 0^+$ en norma L_2. Las propiedades de contractividad, simetría, positividad y conservación son elementales y las dejamos como ejercicio. Nos queda por tanto ver que se cumple la ley de semigrupo. Para ello utilizamos que $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ es invariante por la transformada de Fourier, de donde

$$\begin{aligned} \widehat{k}_t(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \quad &\Rightarrow \quad \widehat{T_{t_1+t_2} f}(\xi) = \widehat{k_{t_1}}(\xi)\widehat{k_{t_2}}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\ &\Rightarrow \quad T_{t_1+t_2} f(x) = k_{t_1} * k_{t_2} * f(x) = T_{t_1} \circ T_{t_2} f(x). \end{aligned}$$

Para obtener el generador infinitesimal del semigrupo del calor, necesitamos el límite de $(T_t f - f)/t$ cuando $t \to 0$ en sentido L_2. Utilizamos la transformada de

Fourier y el teorema de inversión para obtener que dicho límite es exactamente la transformada de Fourier inversa del límite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{T_tf}(\xi)-\widehat{f}(\xi)}{t} &= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{\widehat{k_t}(\xi)-1}{t}\Big)\widehat{f}(\xi)\\ &= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{e^{-4\pi^2t|\xi|^2}-1}{t}\Big)\widehat{f}(\xi) \;=\; -4\pi^2|\xi|^2\,\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Utilizando que $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi)=2\pi i\xi_k\,\widehat{f}(\xi)$ para f suave, obtenemos en seguida que

$$-4\pi^2|\xi|^2\,\widehat{f}(\xi)=\widehat{\Delta f}(\xi),$$

de manera que el generador infinitesimal del semigrupo del calor resulta ser el Laplaciano. Nótese que , como era de esperar, obtenemos un operador no acotado y densamente definido en $L_2(\mathbb{R}^n)$. Además, ahora está claro por qué se le llama el semigrupo del calor, pues $u(t)=T_tf$ resuelve formalmente la ecuación que rige la difusión del calor con condiciones iniciales dadas por f

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u \quad , \quad u(0)=f.$$

Para otras formas no euclídeas del semigrupo del calor, véase [**66**].

b) El **semigrupo de Poisson** en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$P_tf(x)=c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t}{(|x-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}f(y)\,dy=k_t*f(x),$$

donde $c_n=\Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Como ya explicamos en el Capítulo 2, el núcleo de Poisson k_t es la transformada de Fourier de la función $\exp(-2\pi|\cdot|t)$. De hecho al ser una función simétrica respecto del origen, coincide con la transformada del núcleo k_t. Argumentando como para el semigrupo del calor se puede comprobar directamente que se trata de un semigrupo simétrico de difusión. De hecho, el semigrupo de Poisson es exactamente el subordinado del semigrupo del calor y deducimos por tanto que el generador infinitesimal del semigrupo de Poisson es $\sqrt{-\Delta}$. Nótese que $-\Delta$ es un operador positivo como predice la teoría, algo que se puede comprobar integrando por partes. Además, siguiendo de nuevo la teoría general, sabemos que $u(t)=P_tf$ resuelve formalmente el problema de Dirichlet como ya observamos en el Capítulo 2

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}=0 \quad , \quad u(0)=f.$$

Por otro lado, en dimensión 1 el generador del semigrupo del calor es $A = d^2/dx^2$ de donde se podría pensar que su raíz cuadrada es d/dx. Esto nos llevaría a que

$$\sqrt{-A} = i\frac{d}{dx},$$

pero dicha afirmación es falsa. Efectivamente, aunque es cierto que

$$\big(i\frac{d}{dx}\big) \circ \big(i\frac{d}{dx}\big) = -\frac{d^2}{dx^2},$$

el operador id/dx no es positivo y nosotros buscamos la *única raíz positiva* del operador positivo $-d^2/dx^2$. La comparación con la aritmética de los números complejos es evidente. Otra forma quizás más ilustrativa de verlo es la siguiente. Al otro lado de la transformada de Fourier, el operador $-d^2/dx^2$ se convierte en el multiplicador

$$\widehat{f}(\xi) \mapsto 4\pi^2|\xi|^2\,\widehat{f}(\xi).$$

Por consiguiente, su raíz cuadrada positiva a este lado de la transformada de Fourier (utilícese el teorema de Plancherel) es el operador $\widehat{f}(\xi) \mapsto 2\pi|\xi|\,\widehat{f}(\xi)$ mientras que d/dx se asocia al multiplicador $2\pi i\xi$, de donde id/dx es al otro lado de la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) \mapsto -2\pi\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

El lector interesado puede acudir a [**21, 66**] para más información.

c) Más ejemplos se pueden encontrar en el Capítulo III del texto de Stein [**66**].

3.2 Analiticidad del semigrupo

Antes de introducir funciones maximales y cuadrado, necesitamos relacionar los semigrupos simétricos de difusión con ciertas martingalas asociadas. Puesto que las martingalas aparecerán en tiempo discreto y el semigrupo se define sobre un parámetro continuo, tendremos que discretizar nuestros semigrupos. Ello precisa un resultado de continuidad que se deduce de la analiticidad del semigrupo. Aunque se tiene analiticidad en $L_p(\Omega)$, sólo probaremos analiticidad en $L_2(\Omega)$ que es mucho más sencilla y lo combinaremos con la densidad de $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ en $L_p(\Omega)$. Dado un abierto $\Gamma \subset \mathbb{C}$, una función $\varphi : \Gamma \to L_2(\Omega)$ se dice **analítica** si para toda $g \in L_2(\Omega)$ se tiene que la función $z \in \Gamma \mapsto \int_\Omega g\varphi(z)\,d\mu \in \mathbb{C}$ es analítica en Γ.

Teorema 3.4 *Dada $f \in L_2(\Omega)$, la función*

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto T_t f \in L_2(\Omega)$$

tiene una continuación analítica $t + i\tau \mapsto T_{t+i\tau} f$ sobre el sector $|\arg(t+i\tau)| < \pi/2$.

Demostración. Si Ω es un espacio de medida atómico finito, se tiene que $L_2(\Omega)$ es finito-dimensional, digamos $\dim L_2(\Omega) = n$. En tal caso, T_1 se puede escribir como una matriz $n \times n$ respecto de la base canónica de $\ell_2(n)$. Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n$ una base ortonormal del $\ell_2(n)$ formada por autofunciones de T_1. Si $T_1 f_j = \lambda_j f_j$, entonces obtenemos por simetría

$$\lambda_j = \lambda_j \|f_j\|_2^2 = \langle T_1 f_j, f_j \rangle = \langle T_{1/2} f_j, T_{1/2} f_j \rangle \geq 0$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$. Sea e_j la proyección ortogonal sobre el subespacio unidimensional generado por f_j. Puesto que las autofunciones son ortogonales 2 a 2, esto nos permite escribir $T_1 f = \sum_j \lambda_j e_j(f)$. Utilizando la ley de semigrupo es sencillo ver (ejercicio) que

$$T_t f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t e_j(f)$$

para todo $t \in \mathbb{Q}$. Por aproximación, lo mismo ocurre para todo $t > 0$. En el caso general para (Ω, Σ, μ) cualquier espacio de medida σ-finito se obtiene una expresión similar para $T_t f$. Efectivamente, el teorema espectral nos asegura que todo operador auto-adjunto $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert se puede escribir como

$$\Lambda u = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, de_\lambda(u)$$

donde de_λ es la diferencial de una medida que toma valores en proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$. El soporte de de_λ es el espectro del operador. En otras palabras, los autovalores λ de Λ dan lugar a proyecciones e_λ no nulas. Utilizando nuevamente la ley de semigrupo y la simetría, sabemos que todos los autovalores de T_1 están en $\mathbb{R}_+$. Por otro lado, puesto que T_1 es contractivo, no existen autovalores mayores que 1. Eso nos asegura que la medida espectral asociada a T_1 está soportada en $[0,1]$ y por consiguiente podemos escribir $T_1 f$ y $T_t f$ como sigue

$$T_1 f = \int_0^1 \lambda \, de_\lambda(f) \quad \text{y} \quad T_t f = \int_0^1 \lambda^t \, de_\lambda(f).$$

La extensión analítica está finalmente dada por

$$\varphi(z) = T_z f = T_{t+i\tau} f = \int_0^1 \lambda^{t+i\tau} \, de_\lambda(f).$$

Dada $g \in L_2(\Omega)$, se comprueba que

$$\int_\Omega g \varphi(z) \, d\mu = \int_0^1 \lambda^z \langle de_\lambda(f), g \rangle = \int_0^1 \lambda^z \, d\nu(\lambda)$$

es una función analítica en el sector $|\arg(z)| < \pi/2$. Esto completa la prueba. ■

Corolario 3.5 *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$. *Entonces, para cada* $t > 0$ *podemos redefinir* $T_t f$ *en un conjunto de medida* 0 *de manera que para* $\omega \in \Omega$ *se tiene que* $T_t f(\omega)$ *es una función analítica en la variable* $t > 0$.

Demostración. El Teorema 3.4 nos asegura que $t \mapsto T_t f$ se extiende a una función analítica en $\Gamma = \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Es un resultado clásico de análisis funcional que la definición dada de función analítica $\varphi : \Gamma \to L_2(\Omega)$ es equivalente a que para todo $z_0 \in \mathrm{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Gamma$ podamos escribir φ como una serie de potencias

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$

para $z \in \mathrm{B}_\varepsilon(z_0)$ con $\alpha_k \in L_2(\Omega)$ tales que $\sum_k \|\alpha_k\|_2 \, r^k < \infty$ para $0 < r < \varepsilon$. Por consiguiente, dado $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y $0 < \varepsilon < t_0/2$, sabemos que $T_t f$ se puede escribir como la serie de potencias

$$T_t f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t - t_0)^k$$

cuando $t_0 - 2\varepsilon < t < t_0 + 2\varepsilon$ y tal que $\sum_k \|\alpha_k\|_2 \, \varepsilon^k < \infty$. Cada α_k es una clase de equivalencia de funciones salvo conjuntos de medida 0. Escogemos un representante que también denotaremos por α_k. Para $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ podemos modificar $T_t f$ en un conjunto de medida 0 de manera que se tenga $T_t f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\omega)(t - t_0)^k$ para todo $\omega \in \Omega$. Esto tiene sentido porque sabemos que $\sum_k |\alpha_k(\omega)| \, \varepsilon^k < \infty$ a.e. $\omega \in \Omega$. Para concluir basta con recubrir $\mathbb{R}_+$ con una familia numerable de entornos $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. El resto es muy sencillo y dejamos los detalles al lector. ∎

3.3 El teorema de Rota

Nuestro objetivo a continuación es relacionar a los semigrupos simétricos de difusión con una martingala asociada. Puesto que hemos estudiado únicamente martingalas en tiempo discreto y los semigrupos dependen de un parámetro continuo, lo que haremos de momento es discretizar nuestros semigrupos. Así, estudiaremos potencias enteras de un operador Q en $L_p(\Omega)$ que satisface:

1. $\|Qf\|_p \leq \|f\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$.

2. $\langle Qf, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, Qg \rangle_{L_2(\Omega)}$ para $f, g \in L_2(\Omega)$.

3. $Qf \geq 0$ para toda función Σ-medible $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

4. $Q(1_\Omega) = 1_\Omega$, donde 1_Ω denota la función constante 1 en Ω.

La relación que buscamos la proporciona el Teorema de Rota, cuyo enunciado es el siguiente.

Teorema 3.6 *Dado un tal $Q : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$, existe un espacio de medida $(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mu})$ equipado con una σ-subálgebra Σ_0 y con una filtración decreciente $(\widehat{\Sigma}_n)_{n\geq 0}$, tales que se dan las siguientes propiedades:*

a) *Existe un isomorfismo isométrico $j : L_p(\Omega, \Sigma) \to L_p(\widehat{\Omega}, \Sigma_0)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

b) *Consideramos las esperanzas condicionadas*

$$\mathcal{E}_0 : L_p(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}) \to L_p(\widehat{\Omega}, \Sigma_0) \quad y \quad \mathsf{E}_n : L_p(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}) \to L_p(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}_n).$$

Sea $\pi = j^{-1} \circ \mathcal{E}_0 : L_p(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}) \to L_p(\Omega, \Sigma)$. Entonces, dada $f \in L_p(\Omega)$

$$Q^{2n} f = \pi \circ \mathsf{E}_n \circ j(f).$$

La idea de la construción de $(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mu})$ está basada en la teoría de procesos de Markov y es la siguiente. Imaginemos una partícula en $w_0 \in \Omega$ en tiempo 0 que salta en tiempo 1 a otro punto w_1 de acuerdo a cierta distribución para w_1. Una vez en w_1, la partícula olvida haber estado en w_0 y salta en tiempo 2 a w_2 de acuerdo a una distrubución de probabilidad para w_2 que depende de w_1, pero no de w_0. El proceso sigue y en tiempo $n+1$ salta de w_n a w_{n+1} habiendo olvidado dónde estuvo en los tiempos $0, 1, \ldots, n-1$. Nosotros haremos eso permitiendo que la ley que rige el movimento de la partícula esté determinado por el operador Q.

Demostración. Puesto que un punto $\widehat{w} \in \widehat{\Omega}$ debería describir el movimiento de la partícula, es razonable pensar que dicho elemento esté dado por las posiciones $(w_0, w_1, w_2, \ldots)$. Eso nos fuerza a tomar $\widehat{\Omega} = \Omega^{\mathbb{N}}$, mientras que $\widehat{\Sigma}$ será la σ-álgebra generada por todos los conjuntos de la forma

$$S = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_N \times \Omega \times \Omega \times \Omega \times \cdots$$

donde cada A_j denota un conjunto Σ-medible de Ω. Estos conjuntos se llaman por razones obvias **conjuntos cilíndricos**. Nos queda definir la medida $\widehat{\mu}$ y es aquí donde toma partido el operador Q. Dado S como arriba, consideramos la función característica χ_{A_N} y tomamos $Q(\chi_{A_N})$. Entonces multiplicamos por $\chi_{A_{N-1}}$ y aplicamos Q de nuevo para obtener $Q(\chi_{A_{N-1}} Q(\chi_{A_N}))$. Continuando este proceso, damos con la función

$$\chi_{A_0} \cdot Q\big(\chi_{A_1} \cdot Q(\cdots(\chi_{A_{N-1}} \cdot Q(\chi_{A_N}))\cdots)\big).$$

Nótese que no hacemos actuar Q sobre dicha función. En términos del movimiento de la partícula, esto es natural porque se trata de la posición inicial y Q rige el movimiento de la partícula. Definimos entonces

$$\widehat{\mu}(S) = \int_\Omega \chi_{A_0} \cdot Q\big(\chi_{A_1} \cdot Q(\cdots(\chi_{A_{N-1}} \cdot Q(\chi_{A_N}))\cdots)\big)\, d\mu.$$

Lo primero es comprobar que $\widehat{\mu}$ está bien definida sobre conjuntos cilíndricos. Nótese que $(A_0 \times \cdots \times A_N) \times \Omega \times \cdots$ y $(A_0 \times \cdots \times A_N \times \Omega) \times \Omega \times \cdots$ representan al mismo conjunto cilíndrico pero su medida es aparentemente distinta. Aquí es fundamental que $Q(1_\Omega) = 1_\Omega$! Por otro lado, $\widehat{\mu}$ es claramente no negativa puesto que Q envia funciones no negativas en sí mismas. Veamos ahora cómo extender la definición de $\widehat{\mu}$ a uniones finitas de conjuntos cilíndricos. Comenzamos observando que dados dos conjuntos cilíndricos S_1 y S_2, se tiene que $S_1 \cap S_2$ es cilíndrico. Por tanto podemos definir

$$\widehat{\mu}(S_1 \cup S_2) = \widehat{\mu}(S_1) + \widehat{\mu}(S_2) - \widehat{\mu}(S_1 \cap S_2).$$

La positividad de Q nos asegura que $\widehat{\mu}$ es no negativa y aditiva (por definición) sobre uniones de dos conjuntos cilíndricos. Aplicando el principio de inducción, si sabemos que $\widehat{\mu}$ satisface las condiciones de medida sobre uniones de n conjuntos cilíndricos definimos

$$\widehat{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} S_j\Big) = \widehat{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} S_j\Big) + \widehat{\mu}(S_{n+1}) - \widehat{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} (S_j \cap S_{n+1})\Big).$$

La no negatividad se sigue por hipótesis de inducción, mientras que la aditividad es clara. Iterando este argumento, deducimos que $\widehat{\mu}$ es (finitamente) aditiva sobre uniones e intersecciones finitas de conjuntos cilíndricos. Se puede demostrar que $\widehat{\mu}$ se extiende a una medida numerablemente aditiva en $\widehat{\Sigma}$. La demostración es bastante técnica y la vamos a omitir. El lector interesado puede acudir a [**13**].

Probabilísticamente, la definición de $\widehat{\mu}$ se corresponde con la interpretación en términos del movimiento de una partícula, donde la posición incial obedece a la ley $\widehat{\mu}(w_0 \in A) = \mu(A)$, mientras que una partícula en la posición w_n salta a la posición w_{n+1} de acuerdo con la ley

$$\widehat{\mu}(w_{n+1} \in A) = Q(\chi_A)(w_n).$$

Esto nos indica que debemos tomar

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Big\{ A_0 \times \Omega \times \Omega \times \cdots \ \big| \ A_0 \in \Sigma \Big\}, \\ \widehat{\Sigma}_n &= \Big\{ \underbrace{\Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega}_{n} \times S \ \big| \ S \in \widehat{\Sigma} \Big\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, Σ_0 se corresponde con la *posición inicial* y $\widehat{\Sigma}_n$ con el *movimiento de la partícula desde el instante* n. Es claro que $(\widehat{\Sigma}_n)_{n \geq 0}$ forma una filtración decreciente y por tanto nos resta probar las propiedades a) y b). La propiedad $a)$ es evidente, basta considerar el isomorfismo

$$j(f)(\widehat{w}) = f(w_0) \quad \text{y} \quad j^{-1}(g)(w) = g(w, w, \ldots).$$

Dejamos como ejercicio comprobar que $j : L_p(\Omega, \Sigma, \mu) \to L_p(\widehat{\Omega}, \Sigma_0, \widehat{\mu})$ define un isomorfismo isométrico para $1 \leq p \leq \infty$. La demostración de la propiedad b) es más compleja y se basa en las siguientes afirmaciones:

b1) Sea $g \in L_p(\widehat{\Omega})$, entonces

$$g(\widehat{w}) = g(w_0, w_1, \ldots) \text{ depende sólo de } w_n \;\Rightarrow\; \mathcal{E}_0(g)(\widehat{w}) = Q^n \circ j^{-1} g(w_0).$$

b2) Sea $g \in L_p(\widehat{\Omega})$, entonces

$$g(\widehat{w}) = g(w_0, w_1, \ldots) \text{ depende sólo de } w_0 \;\Rightarrow\; \mathsf{E}_n(g)(\widehat{w}) = Q^n \circ j^{-1} g(w_n).$$

La propiedad b) se deduce fácilmente a partir de b1) y b2). Dada $f \in L_p(\Omega)$, sabemos que la función $j(f)(\widehat{w})$ sólo depende de w_0, de donde obtenemos por la propiedad b2) que

$$\mathsf{E}_n \circ j(f)(\widehat{w}) = Q^n f(w_n) \;\Rightarrow\; j^{-1} \circ \mathsf{E}_n \circ j(f) = Q^n f.$$

Por otro lado, puesto que $\mathsf{E}_n \circ j(f)(\widehat{w})$ sólo depende de w_n, b1) nos proporciona

$$\mathcal{E}_0 \circ \mathsf{E}_n \circ j(f)(\widehat{w}) = Q^n \circ j^{-1} \circ \mathsf{E}_n \circ j(f)(w_0) = Q^{2n} f(w_0) = j \circ Q^{2n} f(\widehat{w}),$$

de donde se deduce $\pi \circ \mathsf{E}_n \circ j(f) = Q^{2n} f$ como queríamos. Probamos ahora b1) y b2).

Demostración de b1). Queremos ver que

$$\mathcal{E}_0(g) = j \circ Q^n \circ j^{-1} g.$$

Puesto que $j \circ Q^n \circ j^{-1}(g)$ es Σ_0-medible, basta comprobar que

$$\int_S g(\widehat{w})\, d\widehat{\mu}(\widehat{\omega}) = \int_S j \circ Q^n \circ j^{-1} g(\widehat{w})\, d\widehat{\mu}(\widehat{\omega})$$

para cada $S = A \times \Omega \times \Omega \times \ldots \in \Sigma_0$. Si g es una función característica $g(\widehat{w}) = \chi_B(w_n)$, el término de la izquierda es $\widehat{\mu}(A \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times B \times \Omega \times \Omega \cdots)$, donde el conjunto B está situado en la posición n-ésima. La definición de $\widehat{\mu}$ sobre conjuntos cilíndricos nos proporciona

$$\widehat{\mu}(A \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times B \times \Omega \times \Omega \cdots) = \int_A Q^n \chi_B \, d\mu.$$

Es claro que el término de la derecha también se puede escribir así. Por otro lado, puesto que tanto el término de la derecha como el de la izquierda son lineales en g y se portan bien tomando límites, se deduce la afirmación.

Demostración de b2). Del mismo modo que en el argumento anterior, es claro que la función $h(\widehat{w}) = Q^n \circ j^{-1}g(w_n)$ es Σ_n-medible porque no depende de las variables $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. Por consiguiente, basta con demostrar que

$$\int_S g(\widehat{w})\, d\widehat{\mu}(\widehat{\omega}) = \int_S Q^n \circ j^{-1}g(w_n)\, d\widehat{\mu}(\widehat{\omega})$$

para $g(\widehat{w}) = \chi_B(w_0)$ y todo conjunto cilíndrico de la forma

$$S = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega}_{n} \times A_n \times A_{n+1} \times \cdots \times A_N \times \Omega \times \cdots$$

El término de la izquierda se puede escribir como

$$\int_B Q^n\big(\chi_{A_n} \cdot Q(\chi_{A_{n+1}} \cdot Q(\cdots))\big)\, d\mu.$$

Por otro lado, el término de la derecha es

$$\int_\Omega Q^n\big(Q^n(\chi_B)\chi_{A_n} \cdot Q(\chi_{A_{n+1}} \cdot Q(\cdots))\big)\, d\mu.$$

Finalmente, ambos términos coinciden por simetría $\langle Qf, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, Qg\rangle_{L_2(\Omega)}$, que no ha sido utilizada hasta ahora. Efectivamente, $Q(1_\Omega) = 1_\Omega \Rightarrow \int_\Omega Qh\, d\mu = \int_\Omega h\, d\mu$. Si aplicamos esto n veces en el término de la derecha, obtenemos

$$\int_\Omega Q^n\big(Q^n(\chi_B)\chi_{A_n} \cdot Q(\chi_{A_{n+1}} \cdot Q(\cdots))\big)\, d\mu = \int_\Omega Q^n(\chi_B) h\, d\mu = \int_B Q^n(h)\, d\mu$$

para $h = \chi_{A_n} \cdot Q(\chi_{A_{n+1}} \cdot Q(\cdots))$, lo que nos proporciona el término de la izquierda. ■

3.4 El maximal ergódico

Sea $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo simétrico de difusión. Dado un $\varepsilon > 0$ pequeño, está claro que el operador T_ε satisface las hipótesis del Teorema de Rota para Q. Es más, si tomamos $Q = T_\varepsilon$, la ley de semigrupo nos asegura que $Q^n = T_{n\varepsilon}$. De modo que las discretizaciones asociadas a una malla de longitud constante ε de semigrupos simétricos de difusión proporcionan familias $(Q^n)_{n\geq 0}$ de potencias enteras de operadores bajo las hipótesis del Teorema de Rota. Por consiguiente, dicho resultado nos muestra cómo relacionar a un semigrupo simétrico de difusión con una martingala asociada.

El Teorema de Rota nos permite así trabajar con funciones maximales y funciones cuadrado asociadas a dichos semigrupos de operadores. Comenzamos definiendo la correspondiente función maximal. Dado un semigrupo simétrico de difusión $(T_t)_{t\geq 0}$, la **función maximal ergódica** asociada se define como

$$\mathcal{M}_T f(\omega) = \sup_{t>0} |T_t f(\omega)|.$$

Teorema 3.7 *La función maximal ergódica satisface*

$$\|\mathcal{M}_T f\|_p \leq c_p \|f\|_p \quad \textit{para} \quad 1 < p \leq \infty,$$

donde $c_p \sim p/p-1$ *cuando* $p \sim 1$ *o* $p \sim \infty$. *En particular, obtenemos el correspondiente resultado de convergencia puntual. Más concretamente, dado* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_p(\Omega)$

$$T_t f(x) \xrightarrow{a.e.} f(x) \quad \textit{cuando} \quad t \to 0^+.$$

Demostración. La acotación de la maximal es trivial en $L_\infty(\Omega)$. Fijamos un entero $k \geq 1$ y definimos el operador $Q = T_{2^{-k}}$. Como ya hemos apuntado, es claro que Q satisface las cuatro condiciones impuestas por el Teorema de Rota. En particular, dada $f \geq 0$ en $L_p(\Omega)$ deducimos que

$$\begin{aligned}
\big\| \sup_{n\geq 0} Q^{2n} f \big\|_p &= \Big\| \sup_{n\geq 0} \pi \circ \mathsf{E}_n \circ j(f) \Big\|_p \\
&= \Big\| j^{-1}\Big(\sup_{n\geq 0} \mathcal{E}_0\big(\mathsf{E}_n \circ j(f)\big)\Big) \Big\|_p = \Big\| \sup_{n\geq 0} \mathcal{E}_0\big(\mathsf{E}_n \circ j(f)\big) \Big\|_p \\
&\leq \Big\| \mathcal{E}_0\Big(\sup_{n\geq 0} \mathsf{E}_n \circ j(f)\Big) \Big\|_p \leq \Big\| \sup_{n\geq 0} \mathsf{E}_n \circ j(f) \Big\|_p \leq c_p \big\| j(f) \big\|_p,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad maximal de Doob, que sabemos que es cierta para martingalas inversas/filtraciones decrecientes. Puesto que $\|j(f)\|_p = \|f\|_p$, hemos demostrado $\| \sup_{n\geq 0} T_{2n/2^k} f\|_p \leq c_p \|f\|_p$ con $c_p \sim p/p-1$ para todo $1 < p < \infty$. Si f no es positiva, descomponemos en partes positivas y

$$\big\| \sup_{n\geq 0} |T_{2n/2^k} f| \big\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

La acotación del maximal ergódico impone tomar límites en k. Para ello recordamos que dada $f \in L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, podemos redefinir las $T_t f$'s en un conjunto de medida 0 de manera que para todo $w \in \Omega$, $T_t f(w)$ es una función continua en $t \in \mathbb{R}_+$, véase el Corolario 3.5. De ese modo podemos escoger representantes de las clases de equivalencia $T_t f \in L_p(\Omega)$ tales que

$$\sup_{t>0} |T_t f(w)| = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq 0} |T_{2n/2^k} f(w)| = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(w).$$

Puesto que las φ_k's forman una sucesión creciente de funciones positivas

$$\|\mathcal{M}_T f\|_p = \big\| \sup_{t>0} |T_t f| \big\|_p = \lim_{k\to\infty} \big\| \sup_{n\geq 0} |T_{2n/2^k} f| \big\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

por el teorema de la convergencia monótona. Como $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$ esto concluye la demostración de la desigualdad maximal. Nos queda probar el resultado de convergencia en casi todo punto cuando $t \to 0^+$. El argumento de continuidad utilizado antes asegura que dado $\varepsilon > 0$ se tiene $T_{t+\varepsilon} f \to T_\varepsilon f$ en casi todo punto cuando $t \to 0^+$. Nuestro objetivo es probar que $T_t f \to f$ a.e. Comenzamos en $L_2(\Omega)$ donde sabemos que $T_t f \to f$ cuando $t \to 0^+$ en norma L_2. Por tanto, dada $f \in L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&\mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - T_t f\big| > \lambda \Big\} \\
&\qquad = \mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - T_\varepsilon f + T_\varepsilon(f - T_t f) - T_t(f - T_\varepsilon f)\big| > \lambda \Big\} \\
&\qquad \leq \mu\Big\{ \big| f - T_\varepsilon f\big| > \lambda/2 \Big\} \ + \ \mu\Big\{ \sup_{t>0} \big| T_t(f - T_\varepsilon f)\big| > \lambda/2 \Big\} \\
&\qquad \leq \Big(\frac{2(1+c_2)}{\lambda} \, \|f - T_\varepsilon\|_2 \Big)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0^+.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la medida de dicho conjunto es 0 y deducimos

$$\mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - T_t f\big| > 0 \Big\} \leq \sum_{k=1}^\infty \mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - T_t f\big| > 1/k \Big\} = 0.$$

Cuando $f \in L_p(\Omega)$ con $1 < p \neq 2 < \infty$, aproximamos la función f por funciones $g_\varepsilon \in L_p(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ de manera que se tenga $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. En tal caso, el mismo argumento que antes funciona, pues tenemos

$$\begin{aligned}
&\mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - T_t f\big| > \lambda \Big\} \\
&\qquad = \mu\Big\{ \limsup_{t\to 0^+} \big| f - g_\varepsilon + g_\varepsilon - T_t g_\varepsilon - T_t(f - g_\varepsilon)\big| > \lambda \Big\} \\
&\qquad \leq \mu\Big\{ \big| f - g_\varepsilon\big| > \lambda/2 \Big\} + \mu\Big\{ \sup_{t>0} \big| T_t(f - g_\varepsilon)\big| > \lambda/2 \Big\} \\
&\qquad \leq \Big(\frac{2(1+c_p)}{\lambda} \, \|f - g_\varepsilon\|_p \Big)^p \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0^+.
\end{aligned}$$

■

Observación 3.8 En la definición de semigrupo simétrico de difusión hemos impuesto la condición $\|T_t f - f\|_2 \to 0$ cuando $t \to 0^+$. No obstante, dicha propiedad se extiende a $L_p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Efectivamente, puesto que sabemos que $T_t f \to f$ en casi todo punto para $f \in L_p(\Omega)$, es suficiente con demostrar que

$$\lim_{t\to 0} \|T_t f - f\|_p = \big\| \lim_{t\to 0} T_t f - f \big\|_p,$$

lo que se sigue de la desigualdad maximal y el teorema de la convergencia dominada.

El Teorema 3.7 responde a una amplia clase de desigualdades maximales en teoría ergódica. Uno de los resultados clásicos más conocidos es el teorema ergódico maximal de Dunford-Schwartz [**14**].

3.5 Desigualdad de Littlewood-Paley-Stein

Cerramos este capítulo con el análisis de la función cuadrado para un semigrupo simétrico de difusión $(T_t)_{t\geq 0}$. De acuerdo con el Corolario 3.5, dada $f \in L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ sabemos que podemos modificar $T_t f$ en un conjunto de medida 0 de manera que $T_t f(\omega)$ es diferenciable en $t > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Eso nos permite definir la **función cuadrado de Littlewood-Paley-Stein** como sigue

$$\mathcal{S}f(\omega) = \Big(\int_0^\infty t \, \Big| \frac{\partial}{\partial t} T_t f(\omega) \Big|^2 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nuestro objetivo fundamental es demostrar que

$$\|\mathcal{S}f\|_p \leq c_p \, \|f\|_p$$

para $f \in L_p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Nótese no obstante que de momento sólo hemos definido $\mathcal{S}f$ para funciones de $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$. Para extender dicha definición a $L_p(\Omega)$ basta observar que si probamos la citada desigualdad en $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ existirá una única extensión razonable por densidad. Efectivamente, la desigualdad dada se puede reescribir en términos de la acotación del siguiente operador lineal

$$\Lambda : f \in L_p(\Omega) \mapsto \Lambda f \in L_p\big(\Omega; L_2(\mathbb{R}_+, t\, dt)\big) \quad \text{con} \quad \Lambda f(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_t f(\omega).$$

Por tanto, si probamos que Λ es un operador acotado en $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ existirá una única extensión lineal de Λ a todo $L_p(\Omega)$ y dada $f \in L_p(\Omega)$ definimos la función cuadrado como sigue

$$\mathcal{S}f(\omega) = \Big(\int_0^\infty t \, \big| \Lambda f(\omega, t) \big|^2 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En realidad, la función $T_t f(\omega)$ es también diferenciable para toda $f \in L_p(\Omega)$, lo que se sigue nuevamente de la analiticidad del semigrupo en $L_p(\Omega)$. Esta forma alternativa de proceder es sólo consecuencia de que no demostramos en su momento la analiticidad de $(T_t)_{t\geq 0}$ en $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$. Antes de probar la desigualdad buscada, necesitaremos una desigualdad L_p para la función cuadrado asociada a las **medias ergódicas** de una martingala $(f_n)_{n\geq 0}$. Dada $f \in L_p(\Omega)$ y $f_n = \mathsf{E}_n(f)$, dichas medias σ_m y sus diferencias γ_m están dadas por

$$\sigma_m f = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m f_k \quad \text{y} \quad \gamma_m f = \sigma_m f - \sigma_{m-1} f.$$

Lema 3.9 *Dado* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_p(\Omega)$

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m|\gamma_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \sim_{c_p} \|f\|_p \quad \textit{con} \quad c_p \sim p^2/(p-1).$$

Demostración. Tenemos (ejercicio) que

$$\sqrt{m}\gamma_m f = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{\sqrt{m}(m+1)} \, df_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{km} \, df_k$$

con $\xi_{km} = \delta_{k \le m} \frac{k}{\sqrt{m}(m+1)}$. En particular, podemos calcular

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{km}|^2 = k^2 \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)^2} \sim 1 \quad \text{uniformemente en } k.$$

De modo que aplicando el Teorema 1.15 deducimos las desigualdades deseadas. ■

Observación 3.10 Si reemplazamos en el Lema 3.9 las diferencias $\gamma_m f$ de medias ergódicas por diferencias de martingala corrientes df_m, entonces la correspondiente desigualdad es claramente falsa. Efectivamente, si tomamos $p = 2$ necesitaríamos ver que

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m|df_m|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_2 = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m\|df_m\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le c_2 \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \|df_m\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2,$$

lo que es obviamente falso. Instamos al lector a construir un contraejemplo.

El Lema 3.9 es también válido para martingalas inversas y convencerse de ello es un buen ejercicio. De hecho, esto es esencial porque en el siguiente resultado necesitamos aplicarlo para martingalas inversas. Sea Q un operador bajo las hipótesis del Teorema de Rota. Definimos entonces las correspondientes medias ergódicas y diferencias como

$$\sigma'_m f = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} Q^{2k} f \quad \text{y} \quad \gamma'_m f = \sigma'_m f - \sigma'_{m-1} f.$$

Lema 3.11 *Dado* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_p(\Omega)$

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m|\gamma'_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \le c_p \|f\|_p \quad \textit{con} \quad c_p \sim p^2/(p-1).$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema de Rota, sabemos que $Q^{2k}f = \pi \circ \mathsf{E}_k \circ j(f)$ para cierta filtración decreciente $(\widehat{\Sigma}_n)_{n\geq 0}$ en cierto espacio de medida $(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mu})$. Por tanto podemos escribir

$$\sigma'_m f = \pi \circ \sigma_m \circ j(f) \quad \text{y} \quad \gamma'_m f = \pi \circ \gamma_m \circ j(f)$$

donde las medias σ_m y sus diferencias γ_m se han tomado respecto de la filtración decreciente proporcionada por el Teorema de Rota. Así podemos escribir el término de la izquierda como

$$\begin{aligned}\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m |\gamma'_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p &= \Big\| \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m} \gamma'_m f \otimes \delta_m \Big\|_{L_p(\Omega;\ell_2)} \\ &= \Big\| (\pi \otimes id_{\ell_2}) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m} \gamma_m(j(f)) \otimes \delta_m \Big) \Big\|_{L_p(\Omega;\ell_2)}.\end{aligned}$$

Puesto que $\pi = j^{-1} \circ \mathcal{E}_0$ es la composición de una isometría con una esperanza condicionada en L_p, se deduce que $\pi : L_p(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}) \to L_p(\Omega, \Sigma)$ es contractivo. Por consiguiente, su extensión hilbertiana $\pi \otimes id_{\ell_2}$ también lo es y deducimos que

$$\Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m |\gamma'_m f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq \Big\| \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m |\gamma_m(j(f))|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \sim_{c_p} \|j(f)\|_p = \|f\|_p,$$

donde la equivalencia se sigue del Lema 3.9. Esto concluye la demostración. ■

Pasamos ahora a demostrar la versión de la desigualdad probada en el Lema 3.11 en el contexto de los semigrupos simétricos de difusión. Para ello necesitamos introducir de nuevo las correspondientes medias ergódicas

$$M_t f = \frac{1}{t} \int_0^t T_s f \, ds.$$

Teorema 3.12 *Dado $1 < p < \infty$ y $f \in L_p(\Omega)$*

$$\Big\| \Big(\int_0^{\infty} t \, \Big| \frac{\partial}{\partial t} M_t f \Big|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq c_p \, \|f\|_p \quad \textit{con} \quad c_p \sim p^2/(p-1).$$

Demostración. Podemos reemplazar la integral en $\mathbb{R}_+$ por una integral en $[\delta, \Delta]$ para $0 < \delta < \Delta < \infty$ siempre que las constantes no dependan de δ, Δ. En el intervalo $[\delta, \Delta]$ sabemos que el integrando es suficientemente suave, de modo que podemos reemplazar las integrales por sumas de Riemann y las derivadas por cocientes incrementales. Estos cambios producen errores que tienden a 0 cuando afinamos la malla, dejamos los detalles al lector. Escribiendo esta discretización, deducimos el resultado a partir del Lema 3.11 con $Q = T_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos. ■

Observación 3.13 Además de la estimación para la función cuadrado del Teorema 3.12, las medias ergódicas $M_t f$ también satisfacen una desigualdad maximal. En efecto tomando $\mathcal{M}_M f = \sup_{t>0} |M_t f|$ se tiene obviamente que $\mathcal{M}_M f(\omega) \leq \mathcal{M}_T f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, de manera que la acotación del maximal ergódico nos proporciona

$$\|\mathcal{M}_M f\|_p \leq c_p \, \|f\|_p.$$

Nos queda finalmente demostrar la acotación en $L_p(\Omega)$ de la función cuadrado de Littlewood-Paley-Stein. No obstante, a la luz de la Observación 3.10, las técnicas para martingalas sólo son capaces de producir la desigualdad dada en el Teorema 3.12, en donde reemplazamos el semigrupo $T_t f$ por sus medias ergódicas $M_t f$. Puesto que la demostración involucra técnicas de integrales fraccionarias que no hemos manejado a lo largo del curso, nos conformaremos con una idea vaga de la demostración. Todos los detalles se pueden encontrar en el Capítulo IV del texto [**66**]. La idea consiste en definir una familia anatítica de operadores $\mathcal{I}_\alpha$ que actúan sobre funciones de una variable $t > 0$. Comenzamos definiendo

$$\mathcal{I}_1 f(t) = \int_0^t f(s)\, ds \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_{-k} f(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t)$$

para $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, el cálculo formal

$$\mathcal{I}_n f(t) = \int_0^t \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} f(s_1)\, ds_1 \cdots ds_{n-1}\, ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds$$

nos lleva a la siguiente definición razonable para la **integral fraccionaria** $\mathcal{I}_\alpha$

$$\mathcal{I}_\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Está claro que dicha integral converge absolutamente para f suave cuando $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, pero no tiene porqué estar definida cuando $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$. Esto tiene sentido puesto que, motivados por el teorema fundamental del cálculo, hemos impuesto que $\mathcal{I}_{-k} f(t)$ sea la k-ésima derivada. El siguiente resultado, que no demostraremos, es clave en lo que sigue.

Lema 3.14 *Dada $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ infinitamente diferenciable, la función $\alpha \mapsto \mathcal{I}_\alpha f$ que está originalmente definida sobre la región $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, tiene una extensión analítica a todo el plano complejo. Además se tiene que*

$$\mathcal{I}_{\alpha+\beta} f = \mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\beta f \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_0 f = f.$$

Demostración. Véase la Sección 3 del Capítulo III de [**66**]. ■

Pasamos a la acotación L_p de la función cuadrado de Littlewood-Paley-Stein.

Teorema 3.15 *Dado* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_p(\Omega)$

$$\|\mathcal{S}f\|_p \leq c_p \, \|f\|_p.$$

Idea de la demostración. El método consiste en utilizar que la desigualdad es sencilla para $p = 2$ e interpolar con el Teorema 3.12 para $1 < p \neq 2 < \infty$ reescribiendo dicho resultado en términos de integrales fraccionarias. Para ello introducimos las integrales fraccionarias modificadas

$$\Lambda_\alpha T.f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T_s f \, ds = t^{-\alpha} \mathcal{I}_\alpha T.f(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

De acuerdo con el Lema 3.14, los operadores Λ_α se pueden extender analíticamente a todo el plano complejo $\alpha \in \mathbb{C}$. Podemos escribir entonces el Teorema 3.12 como sigue

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty t \, \Big| \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 T.f \Big|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq c_p \, \|f\|_p.$$

El primer paso consiste en probar la desigualdad que corresponde a sustitur Λ_1 por Λ_α para $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$. Para ello utilizaremos que $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{I}_{\alpha-1}\mathcal{I}_1$ de manera que se tiene la identidad formal

$$\Lambda_\alpha = t^{-\alpha} \mathcal{I}_{\alpha-1}(t\Lambda_1) = t^{-\alpha} \mathcal{I}_\alpha \big(\tfrac{\partial}{\partial t}(t\Lambda_1) \big) = t^{-\alpha} \mathcal{I}_\alpha \big(t \tfrac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 \big) + t^{-\alpha} \mathcal{I}_\alpha(\Lambda_1).$$

Por consiguiente obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda_\alpha = -\alpha t^{-\alpha-1} \mathcal{I}_\alpha \big(t \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 \big) + t^{-\alpha} \mathcal{I}_{\alpha-1} \big(t \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 \big) - \alpha t^{-\alpha-1} \mathcal{I}_{\alpha+1} \big(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 \big) + t^{-\alpha} \mathcal{I}_\alpha \big(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1 \big).$$

Entonces no es complicado demostrar que

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty t \, \Big| \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_\alpha T.f \Big|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq c_{p,\beta} \, \|f\|_p$$

para $1 < p < \infty$ y $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$. Ahora observamos que la desigualdad que pretendemos probar es precisamente la que acabamos de enunciar con $\alpha = 0$ pues en tal caso se tiene que $\Lambda_0 T.f(t) = T_t f$. La idea final consiste en comprobar que la desigualdad es cierta en todo el plano complejo cuando $p = 2$ e interpolar adecuadamente con las desigualdades que conocemos en $L_p(\Omega)$, esto requiere utilizar la interpolación de Stein para familias analíticas de operadores y no daremos más detalles. ■

Si observamos los resultados obtenidos para funciones cuadrado en el contexto de las martingalas o los operadores de Calderón-Zygmund, es natural conjeturar que debería existir una desigualdad recíproca a la dada en el Teorema 3.15. Este es el contenido del siguiente resultado.

Corolario 3.16 *Sea $1 < p < \infty$ y $\Pi : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ la proyección sobre el subespacio de funciones f de $L_p(\Omega)$ tales que $T_t f = f$ para todo $t > 0$. Entonces, se tiene que*

$$\|f\|_p \le c_p \Big(\|\mathcal{S}f\|_p + \|\Pi f\|_p \Big).$$

Demostración. De acuerdo con la expresión $T_t = \exp(tA)$, el subespacio de funciones invariantes por la acción del semigrupo $(T_t)_{t\ge 0}$ es precisamente el núcleo del generador infinitesimal A. Comenzamos demostrando la desigualdad anunciada en $L_2(\Omega)$. Sea $(\psi_k)_{k\ge 1}$ una base ortonormal de $L_2(\Omega)$, que asumimos separable por sencillez, formada por autofunciones del generador infinitesimal A. Como $-A$ es positivo, sabemos que los autovalores correspondientes $(\lambda_k)_{k\ge 1}$ satisfacen $\lambda_k \le 0$. Dada $f \in L_2(\Omega)$, esto nos asegura que

$$T_t f = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \Big(\int_\Omega f \overline{\psi}_k \, d\mu \Big) \, \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \widehat{f}_\psi(k) \, \psi_k,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} T_t f = \sum_{k, \lambda_k \neq 0} \lambda_k e^{t\lambda_k} \widehat{f}_\psi(k) \, \psi_k.$$

Esto proporciona la identidad

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}f\|_2^2 &= \int_0^\infty t \int_\Omega \Big| \frac{\partial}{\partial t} T_t f \Big|^2 d\mu \, dt \\ &= \sum_{k, \lambda_k \neq 0} \lambda_k^2 \Big(\int_0^\infty t e^{2t\lambda_k} \, dt \Big) \, |\widehat{f}_\psi(k)|^2 \;=\; \frac{1}{4} \sum_{k, \lambda_k \neq 0} |\widehat{f}_\psi(k)|^2. \end{aligned}$$

Así concluímos con la isometría

$$\|f\|_2^2 = 4 \|\mathcal{S}f\|_2^2 + \|\Pi f\|_2^2.$$

La identidad de polarización nos permite reescribir esto como

$$\int_\Omega f \overline{g} \, d\mu = 4 \int_\Omega \mathcal{S}f \overline{\mathcal{S}g} \, d\mu + \int_\Omega \Pi f \overline{\Pi g} \, d\mu$$

para $f, g \in L_2(\Omega)$. Dado ahora $1 < p < \infty$, $f \in L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ y

$$\Lambda = \Big\{ g \in L_2(\Omega) \cap L_{p'}(\Omega) \, \big| \, \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1 \text{ y } \|g\|_{p'} \le 1 \Big\},$$

el Teorema 3.15 nos proporciona la desigualdad

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup_{g \in \Lambda} \int_\Omega f \overline{g} \, d\mu \\ &\le 4 \sup_{g \in \Lambda} \int_\Omega \mathcal{S}f \overline{\mathcal{S}g} \, d\mu \; + \; \sup_{g \in \Lambda} \int_\Omega \Pi f \overline{\Pi g} \, d\mu \\ &\le \Big(c_p + \sup_{g \in \Lambda} \|\Pi g\|_{p'} \Big) \; \Big(\|\mathcal{S}f\|_p + \|\Pi f\|_p \Big). \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que $L_2(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$, es suficiente con ver que $\|\Pi f\|_p \le c_p \|f\|_p$ para todo $1 < p < \infty$. Para ello observamos que $\lim_{t\to\infty} T_t f = \Pi f$ en $L_2(\Omega)$. Efectivamente, es sencillo comprobarlo expandiendo f respecto de $(\psi_k)_{k\ge1}$ y escribiendo $T_t f$ como antes. En particular, existe una subsucesión $T_{t_k} f$ que tiende a Πf en casi todo punto y así

$$|\Pi f| = \Big| \lim_{k\to\infty} T_{t_k} f \Big| \le \sup_{t>0} |T_t f| = \mathcal{M}_T f.$$

Por tanto, la desigualdad maximal nos proporciona $\|\Pi f\|_p \le \|\mathcal{M}_T f\|_p \le c_p \, \|f\|_p$. ■

Observación 3.17 En contraste con los resultados para martingalas y operadores de Calderón-Zygmund de los capítulos anteriores, nuestras estimaciones para las funciones maximal y cuadrado sobre semigrupos simétricos de difusión no incluyen desigualdades de tipo débil $(1,1)$ o L_∞-BMO. Efectivamente, como se deduce del Teorema de Rota nuestras desigualdades esencialmente provienen de análogos para martingalas unidas a la contractividad de la esperanza condicionada en $L_p(\Omega)$. Dicha contractividad falla en $L_{1,\infty}(\Omega)$ (justifiquese con un ejemplo) y este método deja de funcionar. No obstante existen casos donde las estimaciones débiles siguen siendo ciertas. Por ejemplo, hemos visto en el Capítulo 2 que la función cuadrado de Littlewood-Paley-Stein asociada al semigrupo de Poisson

$$\mathcal{S} f(\omega) = \Big(\int_0^\infty t \Big| \frac{\partial}{\partial t} P_t f(\omega) \Big|^2 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$

se puede interpretar como un operador de Calderón-Zygmund con valores en un espacio de Hilbert, o mejor dicho como un límite de los mismos. En tales cases, los métodos del Capítulo 2 afinan las técnicas para martingalas y podemos obtener nuevamente desigualdades de tipo débil.

3.6 Ejercicios

1. *Dado $\Lambda : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ un operador lineal en un espacio de Hilbert, podemos consider las dos posibles nociones de positividad introducidas en este capítulo. A saber*

- $\Lambda f \ge 0$ *cuando* $f \ge 0$,
- $\int_\Omega \Lambda f \, \overline{f} \, d\mu \ge 0$ *para toda* $f \in L_2(\Omega)$.

Dar dos contrajemplos para probar que ninguna condición implica la otra.

2. *Utilizar la fórmula de subordinación*

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \, e^{-\beta^2/4u} \, du$$

para demostar que el semigrupo subordinado $(P_t)_{t\geq 0}$ es simétrico de difusión.

3. *Obtener la expresión del núcleo de Poisson en dimensión 1. Es decir, probar que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\xi|t} e^{-2\pi i x\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{t}{x^2+t^2}.$$

4. *Utilizando que*

$$c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dt = 1,$$

demostrar directamente que el semigrupo de Poisson es simétrico de difusión.

5. *Dadas*

$$\sigma_m f = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f_k \quad \text{y} \quad \gamma_m f = \sigma_m f - \sigma_{m-1} f,$$

demostrar que se tiene

$$\sqrt{m}\gamma_m f = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{\sqrt{m}(m+1)}\, df_k.$$

Trabajos propuestos para final de curso:

A) Cálculo holomorfo.

B) Espacios BMO asociados a semigrupos.

C) Transformadas de Riesz para el operador de Laplace-Beltrami.

4

Aspectos no conmutativos

Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y una función Σ-medible y esencialmente acotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, podemos representar dicha función como un operador acotado en $L_2(\Omega)$ determinado por $\Lambda_f : g \mapsto fg$. El proceso de sustituir funciones medibles por operadores lineales, conocido como **cuantización**, ha tenido un gran impacto en las matemáticas del siglo XX desde los orígenes de la mecánica cuántica. Puesto que la composición de operadores es una operación no conmutativa, este proceso ha dado lugar a formas no conmutativas de diversas ramas de las matemáticas. Así, la teoría de caracteres de grupos ha dado lugar a la teoría de representaciones; las C^*-álgebras y las álgebras de von Neumann generalizan a las funciones contínuas/medibles y dan lugar a una teoría no conmutativa de medida e integración; la geometría no conmutativa de Connes generaliza a este contexto la geometría diferencial; la probabilidad cuántica hace lo propio con la probabilidad clásica o los espacios de operadores nacen como una cuantización de la teoría de espacios de Banach.

Históricamente, el análisis armónico no conmutativo se ha reducido al análisis de la transformada de Fourier/representaciones unitarias sobre grupos topológicos no abelianos. No obstante, esta teoría se ha desarrollado espectacularmente en los últimos años y aborda hoy día problemas mucho más generales. Dicho desarrollo se basa en las importantes conexiones entre análisis armónico, probabilidad y espacios de Banach establecidas en los años 70 y 80. Las desigualdades de Burkholder-Gundy, el teorema de dualidad de Fefferman, la teoría de tipo y cotipo de Maurey-Pisier, los resultados de Rosenthal... ilustran dicha interacción. Gran parte de este material ha sido generalizado al contexto no conmutativo y da forma a una nueva interpretación del análisis armónico no conmutativo. Potentes herramientas tales como funciones maximales y cuadrado, sumas de v.a. independientes, espacios de tipo Hardy y BMO... se han desarrollado recientemente en el contexto no conmutativo. Esto ha permitido construir una teoría no conmutativa de desigualdades L_p de martingalas, teoremas ergódicos maximales sobre álgebras de von Neumann e incluso el germen de una teoría no conmutativa de Calderón-Zygmund. Este significativo desarrollo, basado en la cuantización de análisis armónico, probabilidad y geometría de espacios de Banach, ha sido posible gracias a la aparición y rápido desarrollo de nuevas y profundas teorías como la probabilidad libre o los espacios de operadores.

Mi intención es proporcionar al lector una primera aproximación al análisis armónico no conmutativo, entendido desde este punto de vista más ambicioso. Comenzaremos introduciendo las álgebras de von Neumann y los espacios L_p no conmutativos, que son el lenguaje habitual de la teoría. Más adelante, esbozaremos únicamente la teoría de martingalas no conmutativas sin demostraciones. Al final del capítulo, daremos algunas referencias sobre otras conexiones con espacios de operadores, semigrupos sobre espacios L_p's no conmutativos, probabilidad libre o la recién nacida teoría no conmutativa de Calderón-Zygmund.

4.1 Álgebras de von Neumann

Comenzamos con una breve exposición de las nociones esenciales en la teoría de álgebras de von Neumann. Una exposición más detallada se puede encontrar en los textos [**39, 70**]. Un **álgebra de Banach** $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach dotado de una multiplicación respecto de la cual $\|x_1 x_2\| \le \|x_1\| \|x_2\|$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Una **involución** $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un anti-automorfismo de orden 2. En otras palabras, se tiene que

$$(x_1 + x_2)^* = x_1^* + x_2^*, \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \quad (x_1 x_2)^* = x_2^* x_1^*, \quad x^{**} = x.$$

Una C^*-**álgebra** $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad $\mathbf{1}$ y equipada con una involución $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisface $\|x^* x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$. El ejemplo canónico es el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ donde la norma de $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la habitual como operador acotado, la mutiplicación está dada por la composición de operadores, la unidad es el operador identidad y la involución consiste en tomar adjuntos $x \mapsto x^*$ donde

$$\langle x^*(\xi_1), \xi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi_1, x(\xi_2) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

De hecho, todas las C^*-álgebras provienen de esta construcción.

Teorema de Gelfand-Naimark-Segal. *Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y un embedding isométrico $j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que respeta las operaciones de $*$-álgebra*:

- $j(\mathbf{1}) = id_{\mathcal{H}}$,
- $j(x^*) = j(x)^*$,
- $j(x_1 x_2) = j(x_1) \circ j(x_2)$.

Así, toda C^*-álgebra es una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cierto Hilbert $\mathcal{H}$.

Es conveniente señalar que esta inclusión no es única, de hecho es altamente no canónica. Dado Ω un espacio topológico compacto y Hausdorff, el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ forma una C^*-álgebra conmutativa con la suma y producto puntuales y la involución dada por la conjugación $f \mapsto \overline{f}$. De hecho, todas las C^*-álgebras conmutativas son de la forma $\mathcal{C}(\Omega)$ para cierto espacio compacto y Hausdorff Ω. De este modo, la teoría de C^*-álgebras constituye una generalización no conmutativa de los espacios de tipo $\mathcal{C}(\Omega)$. Cuando Ω viene además equipado con una σ-álgebra Σ y una medida μ, podemos ilustrar Gelfand-Naimark-Segal escogiendo $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, puesto que en ese caso $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ se identifica isométricamente con el multiplicador $\Lambda_f : g \mapsto fg$ en $L_2(\Omega)$.

A partir de aquí, la extensión no conmutativa de la teoría de la medida aparece de manera natural. Efectivamente, observemos que existe una relación biunívoca entre conjuntos medibles de (Ω, Σ, μ) y funciones características de $L_\infty(\Omega)$. Seguidamente notamos que toda función característica χ_A puede aproximarse por funciones continuas en la topología débil de operadores. Dicho de otro modo, se tiene que

$$\int_A g(\omega)\overline{h(\omega)}\, d\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) g(\omega)\overline{h(\omega)}\, d\mu(\omega)$$

para cierta sucesión $f_1, f_2, \ldots$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ y cualesquiera $g, h \in L_2(\Omega)$. En otras palabras, el espacio $L_\infty(\Omega)$ caracteriza al espacio de medida (Ω, Σ, μ) y resulta ser el cierre de $\mathcal{C}(\Omega)$ en la topología débil de operadores. En vista de las observaciones anteriores concluimos que la estructura no conmutativa que generaliza a los espacios de medida es el 'cierre débil de las C^*-álgebras'. No obstante, esa es la definición de **álgebra de von Neumann**. Así, la teoría de álgebras de von Neumann resulta ser el instrumento adecuado para cuantizar la teoría de la medida. De hecho, al igual que ocurre para C^*-álgebras, toda álgebra de von Neumann conmutativa tiene la forma $L_\infty(\Omega)$ para cierto espacio de medida (Ω, Σ, μ).

Para profundizar más en la noción de álgebra de von Neumann necesitamos algunas nociones básicas de álgebra de operadores. Para mayor sencillez, nuestros espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ serán siempre separables. Un operador $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se llama **positivo** si $\langle x(\xi), \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Es fácil ver que todo operador positivo diagonaliza con autovalores positivos, lo que permite definir su raíz cuadrada positiva $\sqrt{x}$. De aquí se deduce que x es positivo si y sólo si lo podemos escribir en la forma $x = z^*z$ para cierto $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. El **módulo** de $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se define como $|x| = \sqrt{x^*x}$. Aunque también podríamos haber definido el módulo de x como $\sqrt{xx^*}$, que es $|x^*|$ en nuestra terminología, nótese que no coinciden puesto que $xx^* \neq x^*x$ en general. Para distinguir $|x|$ de $|x^*|$ se utilizan en ocasiones las expresiones *módulo por la izquierda* y por la *derecha* respectivamente. Una **isometría parcial** en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que satisface $\|u(\xi)\|_\mathcal{H} = \|\xi\|_\mathcal{H}$ para todo $\xi \in \mathcal{H} \ominus \ker(u) = \ker(u)^\perp$. Al igual que todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se escribe como el producto de su módulo por su argumento, la **descomposición polar** a continuación nos permite hacer lo mismo con operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lema 4.1 *Si $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe una isometría parcial u tal que:*

- $x = u|x|$,
- $\ker(u) = \ker(x)$,
- $\mathrm{img}(u) = \overline{\mathrm{img}(x)}$.

Si $x = \alpha\pi$ con $\pi \geq 0$ y α isometría parcial con $\ker(\alpha) = \ker(\pi)$, *$\pi = |x|$ y $\alpha = u$.*

Demostración. Utilizaremos (ejercicio) que toda isometría parcial $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface que u^*u es la proyección ortogonal sobre $\ker(u)^\perp$ y que uu^* es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{img}(u)$. Recíprocamente, si u^*u o uu^* es una proyección ortogonal, entonces u es una isometría parcial. Si $\xi \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\|x(\xi)\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle x^*x(\xi), \xi\rangle = \langle |x|(\xi), |x|(\xi)\rangle = \||x|(\xi)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Esto permite definir $u : \mathrm{img}(|x|) \to \mathrm{img}(x)$ como $u(|x|(\xi)) = x(\xi)$. Nótese que la identidad implica que u está bien definido y es isométrico en $\mathrm{img}(|x|)$. En particular se puede considerar un operador $u : \mathcal{H} \to \overline{\mathrm{img}(x)}$ extendiéndolo por continuidad en $\overline{\mathrm{img}(|x|)}$ y definiéndolo como 0 en el complemento ortogonal. Eso convierte a u en una isometría parcial que satisface $x = u|x|$ e $\mathrm{img}(u) = \overline{\mathrm{img}(x)}$. Nos queda ver que $\ker(u) = \ker(x)$, pero como $\ker(u)^\perp = \overline{\mathrm{img}(|x|)} = \ker(|x|)^\perp$ la afirmación se deduce fácilmente. Para la unicidad observamos que $x^*x = \pi\alpha^*\alpha\pi$. Como $\alpha^*\alpha$ es la proyección sobre $\ker(\alpha)^\perp = \ker(\pi)^\perp$, se tiene que $x^*x = \pi^2$, de donde $\pi = |x|$ por la unicidad de la raíz cuadrada positiva. Además, como $\alpha(|x|(\xi)) = x(\xi) = u(|x|(\xi))$ se tiene que $\alpha = u$ sobre $\mathrm{img}(|x|)$ que es denso en $\ker(u)^\perp = \ker(\alpha)^\perp$, de donde $\alpha = u$. ■

En particular, dada la descomposición polar $x = u|x|$ sabemos que u^*u es la proyección sobre $\ker(x)^\perp$ y uu^* la proyección sobre $\overline{\mathrm{img}(x)}$. Otra forma de referirnos a estas proyecciones será como $u^*u = r(x)$ el **soporte por la derecha** de x y $uu^* = \ell(x)$ el **soporte por la izquierda** de x. Nótese que $\ell(x)$ es la proyección ortogonal q más pequeña (i.e. sobre el subespacio más pequeño de $\mathcal{H}$) que satisface $qx = x$. De forma similar, $r(x)$ es la proyección más pequeña q con $xq = x$. Cuando x es autoadjunto, se tiene claramente que $r(x) = \ell(x)$. A esta proyección común se le llama **soporte** de x y se escribe $\mathrm{supp}(x)$.

Nuestro siguiente objetivo es construir el predual de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Asumiremos por sencillez que $\mathcal{H}$ es separable. Dada una base ortonormal $(\xi_m)_{m\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ y un operador $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positivo, definimos su **traza canónica** como

$$\mathrm{Tr}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x(\xi_m), \xi_m\rangle.$$

Nótese que dicha suma puede ser infinita. La **clase de traza** $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ se define como el espacio de los operadores $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\mathrm{Tr}(|x|) < \infty$. Las siguientes propiedades son bien conocidas [**9**]:

- La definición de Tr no depende de la b.o.n. escogida,
- Cuando $\dim \mathcal{H} = n$, Tr es la traza habitual sobre matrices $n \times n$,
- Si $x \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ no es positivo, $\mathrm{Tr}(x) = \sum_m \langle x(\xi_m), \xi_m \rangle$ converge absolutamente,
- La expresión $\|x\|_1 = \mathrm{Tr}(|x|)$ define una norma en $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ y $|\mathrm{Tr}(x)| \leq \mathrm{Tr}(|x|)$,
- Se tiene $\|x\|_1 = \|x^*\|_1$, $\mathrm{Tr}(x_1 x_2) = \mathrm{Tr}(x_2 x_1)$ y $|\mathrm{Tr}(x_1 x_2)| \leq \|x_1\|_1 \|x_2\|_\infty$,
- $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ es el único predual de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Estamos ahora en condiciones de profundizar algo más en las álgebras de von Neumann. Observamos en primer lugar que, como el producto de dos funciones de $L_2(\Omega)$ vive en $L_1(\Omega)$, la convergencia $f_n \to \chi_A$ en la topología débil de operadores coincide en este caso con la convergencia en la topología débil-$*$. Esto, unido al Teorema de Gelfand-Naimark-Segal, nos permite redefinir un **álgebra de von Neumann** como una C^*-subálgebra débil-$*$ cerrada $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por consiguiente, toda álgebra de von Neumann es un espacio dual. Efectivamente, si

$$\mathcal{M}^\perp = \Big\{ x \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}) \, \Big| \, \mathrm{Tr}(xm) = 0 \text{ para todo } m \in \mathcal{M} \Big\},$$

entonces queremos demostrar que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp} = \Big\{ m \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \, \Big| \, \mathrm{Tr}(xm) = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{M}^\perp \Big\} = \big(\mathcal{S}_1(\mathcal{H}) / \mathcal{M}^\perp \big)^*.$$

Está claro que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\perp\perp}$. Por otro lado, $\mathcal{M}^{\perp\perp}$ será el cierre de $\mathcal{M}$ en la topología más pobre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ donde todos los elementos de $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ son funcionales continuos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Esa es precisamente la topología débil-$*$ y nuestra afirmación se deduce de que $\mathcal{M}$ es cerrada en dicha topología. Repasamos ahora algunos resultados centrales sobre álgebras de von Neumann.

Teorema de Sakai. *El predual de un álgebra de von Neumann es único.*

Denotamos por $\mathcal{M}_*$ al predual de $\mathcal{M}$. Un funcional $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ lineal y acotado se llama **normal** si es continuo en la topología débil-$*$ de $\mathcal{M}$. Así, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ pertenecerá a $\mathcal{M}_*$ si y sólo si φ es normal. Dado un subconjunto $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos el **conmutador** de $\mathcal{Z}$ como el conjunto $\mathcal{Z}'$ de operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que conmutan con todo $\mathcal{Z}$. En otras palabras, definimos $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{Z}''$... como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}' &= \Big\{ x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \, \Big| \, xz = zx \text{ para todo } z \in \mathcal{Z} \Big\}, \\ \mathcal{Z}'' &= \Big\{ x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \, \Big| \, xz = zx \text{ para todo } z \in \mathcal{Z}' \Big\}. \end{aligned}$$

Teorema del doble conmutador. *Se tiene que*:

- $\mathcal{Z}''' = \mathcal{Z}'$.
- $\mathcal{Z}'$ *es siempre un álgebra cerrada débil-$*$ que contiene a* $\mathbf{1}$.
- *El cierre débil-$*$ de toda* C^**-subálgebra* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es* $\mathcal{M} = \mathcal{A}''$.

En particular, el Teorema del doble conmutador proporciona una caracterización algebraica de la noción (analítica) de álgebra de von Neumann. Así, podemos afirmar que un **álgebra de von Neumann** es una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que coindice con su doble conmutador. Por otro lado, dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$, definimos su **cono positivo** como

$$\mathcal{M}_+ = \Big\{ x \in \mathcal{M} \, \Big| \, \text{existe } z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ con } x = z^* z \Big\}.$$

Dado $x \in \mathcal{M}$ con descomposición polar $x = u|x|$, es también una consecuencia del Teorema del doble conmutador que u y $|x|$ son elementos de $\mathcal{M}$, la demostración de puede encontrar por ejemplo en [**9**, Teorema 14.5]. Así, las proyecciones soporte de x por la derecha y por la izquierda también están en $\mathcal{M}$.

No damos de momento ejemplos concretos de álgebras de von Neumann, pues estos aparecerán en la próxima sección con los espacios L_p no conmutativos. Cerramos esta sección revisando brevemente la descomposición espectral de elementos del cono positivo de $\mathcal{M}$. Una exposión detallada se da en el Capítulo 1 de [**19**]. Todo $x \in \mathcal{M}_+$ admite una única **descomposición espectral**

$$x = \int_0^\infty \lambda \, de_\lambda(x).$$

La medida espectral $(e_\lambda(x))_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ está soportada en el espectro $\sigma(x)$. Nótese que un operador $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ conmuta con x si y sólo si z conmuta con todas las proyecciones espectrales $e_\lambda(x)$. Dada una función boreliana y acotada f en $\sigma(x)$, el cálculo funcional de Borel define un operador acotado $f(x)$ por medio de la fórmula integral

$$f(x) = \int_{\sigma(x)} f(\lambda) \, de_\lambda(x).$$

Nuevamente, si $x \in \mathcal{M}_+$ se tendrá que sus proyecciones espectrales $e_\lambda(x)$ así como $f(x)$ pertenecen a $\mathcal{M}$. En particular, dado $0 < p < \infty$ podemos definir x^p como elemento del cono positivo de $\mathcal{M}$ para todo $x \in \mathcal{M}_+$. Esto será obviamente necesario en la próxima sección. Aunque no tenemos tiempo de profundizar más en todas estas nociones, el lector interesado en la teoría no conmutativa que no esté familiarizado con las mismas debería consultar algunas de las referencias proporcionadas a lo largo de esta sección.

4.2 Espacios L_p no conmutativos

El estudio de espacios L_p sobre álgebras de von Neumann generales o espacios L_p no conmutativos fue iniciado en los años 50 por Schatten, Segal, Dixmier y Kunze entre otros. Hoy en día constituyen una herramienta fundamental en muchas ramas de las matemáticas. Una de nuestras referencias fundamentales será la excelente exposición de Pisier y Xu en [**61**]. Una **traza** en $\mathcal{M}$ es un funcional lineal $\tau : \mathcal{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$

- **Tracial.** $\tau(ab) = \tau(ba)$ para $a, b \in \mathcal{M}$.
- **Positivo.** $\tau : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, i.e. $\tau(x^*x) \geq 0$ para $x \in \mathcal{M}$.

Decimos que la traza es

- **Fiel.** Si $x \in \mathcal{M}_+$ y $\tau(x) = 0$ entonces $x = 0$.
- **Normal.** $\sup_\alpha \tau(x_\alpha) = \tau(\sup_\alpha x_\alpha)$ para $(x_\alpha) \subset \mathcal{M}_+$ creciente y acotada.
- **Semifinita.** Para todo $a \in \mathcal{M}_+$ no nulo, existe $0 < b \leq a$ tal que $\tau(b) < \infty$.

La traza es el sustituto natural de la integral e instamos al lector a que piense en las propiedades adicionales que hemos pedido a la traza. Todas ellas son extensiones naturales de propiedades razonables de la integral. El proceso de cuantización se basa en el modelo conmutativo, donde $f \in L_\infty(\Omega)$ para a ser un multiplicador en $L_2(\Omega)$ dado por

$$\Lambda_f : g \in L_2(\Omega) \mapsto fg \in L_2(\Omega).$$

Cuando Ω es completamente atómico y $L_p(\Omega) = \ell_p$, la traza canónica es la integral natural. Efectivamente, tomemos la base canónica $(e_k)_{k\geq 1}$ de ℓ_2. Entonces tenemos que

$$\mathrm{Tr}(\Lambda_f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Lambda_f e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_k = \int_\Omega f \, d\mu$$

donde μ es la medida de contar en $\Omega = \mathbb{N}$. Cuando Ω es cualquier otro espacio de medida, $\tau(\Lambda_f) = \int_\Omega f \, d\mu$ determina una traza normal, semifinita y fiel. Hemos visto cómo *las funciones medibles pasan a ser operadores* en este caso. Nótese tamién que los conjuntos medibles A de Ω se interpretan como funciones características χ_A de $L_\infty(\Omega)$, que se convierten en multiplicadores Λ_{χ_A}. Un momento de reflexión nos lleva a ver que Λ_{χ_A} es una proyección ortogonal en $L_2(\Omega)$

$$\Lambda_{\chi_A}^* = \Lambda_{\chi_A} \quad \text{y} \quad \Lambda_{\chi_A}^2 = \Lambda_{\chi_A}.$$

Así, *las proyecciones ortogonales representan conjuntos medibles* en el contexto no conmutativo. Esto además aporta algo de luz a nuestra definición de proyección soporte.

En lo que sigue escribiremos que τ es una traza *n.s.f.* para denotar que satisface dichas propiedades. Un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se llama **semifinita** cuando admite una traza n.s.f. En el caso general siempre podemos considerar funcionales positivos no traciales. Esto complica bastante las cosas pues implica a la Teoría Modular de Tomita-Takesaki [**39, 68**]. Nosotros asumiremos que todas nuestras álgebras de von Neumann son semifinitas. Un **espacio de medida no conmutativo** es un par $(\mathcal{M}, \tau)$ formado por un álgebra de von Neumann semifinita equipada con una traza n.s.f. Un tal espacio se llama **finito** cuando $\tau(\mathbf{1}) < \infty$ y en este caso se suele normalizar la traza por la condición $\tau(\mathbf{1}) = 1$. Las trazas normalizadas se llaman **estados** y todo par $(\mathcal{M}, \varphi)$ formado por un álgebra de von Neumann y un estado n.f. es un **espacio de probabilidad cuántico**.

Construimos ahora los espacios L_p no conmutativos. Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann semifinita, equipada con una traza n.s.f. τ e isométricamente incluida en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dado $x \in \mathcal{M}_+$, recordamos que la proyección soporte de x es la proyección ortogonal $q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con rango más pequeño que satisface $qx = x = xq$. Definimos entonces

$$\mathcal{S}_+ = \Big\{ x \in \mathcal{M}_+ \;\Big|\; \tau(\mathrm{supp}\, x) < \infty \Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \operatorname{span} \mathcal{S}_+.$$

Utilizando la medida espectral de $|x|$ podemos definir

$$|x|^p = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda^p \, de_\lambda(|x|) \quad \text{para} \quad 0 < p < \infty.$$

Resulta entonces que

$$x \in \mathcal{S} \Rightarrow |x|^p \in \mathcal{S}_+ \Rightarrow \tau(|x|^p) < \infty.$$

Definimos a continuación

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Se puede demostrar que $\| \; \|_p$ es una norma en $\mathcal{S}$ si $1 \leq p < \infty$ y una p-norma si $0 < p < 1$. Utilizando que $\mathcal{S}$ es una $*$-subálgebra densa débil-$*$ en $\mathcal{M}$, definimos el **espacio L_p no conmutativo** asociado a $(\mathcal{M}, \tau)$ y escribimos $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ como la completación de $(\mathcal{S}, \| \; \|_p)$. Por otro lado, debido a nuestra discusión inicial es natural definir $L_\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ equipado con la norma de operadores.

Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y un exponente finito $0 < p < \infty$, es bien conocido que $L_p(\Omega)$ se define como el espacio de funciones μ-medibles (modulo conjuntos de μ-medida 0) que son p-integrables respecto de μ. En el contexto no conmutativo es importante saber como generalizar la noción de μ-medibilidad. Si $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert donde $\mathcal{M}$ actúa, un operador x cerrado y densamente definido en $\mathcal{H}$ se dice que está **afiliado** con $\mathcal{M}$ si $xu = ux$ para todo operador unitario u en el conmutador

$$\mathcal{M}' = \Big\{ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;\Big|\; xy = yx \text{ para todo } x \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Por consiguiente, todo $x \in \mathcal{M}$ está afiliado con $\mathcal{M}$ pero el recíproco no es cierto pues no exigimos que los operadores afiliados sean acotados. Sea $\mathcal{A}\!f\!f_{\mathcal{M}}$ el espacio de operadores afiliados con $\mathcal{M}$. Dado $x \in \mathcal{A}\!f\!f_{\mathcal{M}}$, consideramos la medida espectral de $|x|$ y decimos que x es τ-**medible** cuando existe $s > 0$ tal que

$$\tau\Big(\int_s^\infty de_\lambda(|x|)\Big) < \infty.$$

Si $L_0(\mathcal{M}, \tau)$ es el espacio de operadores τ-medibles,

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \Big\{x \in L_0(\mathcal{M}, \tau) \ \big| \ \tau(|x|^p) < \infty\Big\}.$$

Observación 4.2 La relación de equivalencia 'modulo conjuntos de medida cero' no es aquí necesaria puesto que la identificación de Ω con $L_\infty(\Omega, \mu)$ ya ha establecido la equivalencia con anterioridad. En los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ con p finito pueden aparecer operadores no acotados densamente definidos, del mismo modo que en $L_p(\Omega)$ existen funciones no acotadas.

Muchas propiedades fundamentales de los espacios L_p clásicos o conmutativos se extienden de forma natural a este contexto. Las propiedades más relevantes que se conservan son las siguientes:

- La traza τ se extiende a un funcional continuo en $L_1(\mathcal{M}, \tau)$: $|\tau(x)| \leq \|x\|_1$.
- **Desigualdad de Hölder.** Dados tres exponentes $0 < p, q, r \leq \infty$ tales que $1/r = 1/p + 1/q$ y dados dos operadores $x \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ e $y \in L_q(\mathcal{M}, \tau)$ se tiene la desigualdad de Hölder $\|xy\|_r \leq \|x\|_p \|y\|_q$.
- **Dualidad.** Cuando $r = 1$, se tiene que $1/p + 1/q = 1$ y la desigualdad de Hölder proporciona un producto de dualidad $\langle x, y\rangle = \tau(xy)$ entre $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y $L_q(\mathcal{M}, \tau)$. Así, $L_p(\mathcal{M}, \tau)^* = L_q(\mathcal{M}, \tau)$ isométricamente para $1 \leq p < \infty$.
- **Interpolación compleja.** $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ es isométricamente isomorfo al espacio de interpolación $\big[L_{p_0}(\mathcal{M}, \tau), L_{p_1}(\mathcal{M}, \tau)\big]_\theta$ para $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. También existen resultados naturales para el método real de interpolación, véase [**61**].

Damos ahora algunos ejemplos básicos de espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$:

a) **Espacios L_p conmutativos.** Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann semifinita y abeliana. Entonces existe un espacio de medida semifinito (Ω, Σ, μ) para el que se tiene $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega, \mu)$ y $L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p(\Omega, \mu)$ con la traza n.s.f. τ determinada por la relación

$$\tau(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

b) Espacios L_p semi-conmutativos. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{N}_1 = L_\infty(\Omega, \mu)$ el álgebra de von Neumann equipada con la traza n.s.f. dada por $\nu_1 = \int_\Omega \cdot \, d\mu$. Sea $(\mathcal{N}_2, \nu_2)$ otro espacio de medida no conmutativo. Entonces consideramos el par

$$(\mathcal{M}, \tau) = \big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big) = \Big(L_\infty(\Omega, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big).$$

Esto da lugar a

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p\Big(\Omega, \mu; L_p(\mathcal{N}_2, \nu_2)\Big).$$

La última expresión utiliza la construcción de espacios L_p vectoriales debida a Bochner. En particular, aunque $\mathcal{M}$ es claramente no conmutativa, en este caso $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ se puede interpretar como un espacio L_p conmutativo con valores vectoriales.

c) Clases de Schatten. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\tau = \mathrm{Tr}$ la traza canónica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que es n.s.f. Entonces, el espacio $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ asociado es la p-clase de Schatten que se escribe $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$. Cuando $\mathcal{H}$ es un espacio separable e infinito-dimensional la clase de Schatten se escribe $\mathcal{S}_p$ mientras que $\mathcal{S}_p(n)$ denota la clase de Schatten asociada al espacio de Hilbert $\ell_2(n)$. $\mathcal{S}_p$ y $\mathcal{S}_p(n)$ proporcionan generalizaciones no conmutativas de ℓ_p y $\ell_p(n)$. Además ℓ_p se identifica isométricamente con la diagonal principal de $\mathcal{S}_p$. Nótese que en nuestra notación $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ no es el ideal de los operadores compactos en $\mathcal{H}$, sino $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ propiamente.

d) Productos tensoriales. Dados dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ definimos el producto Hilbertiano $\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2$ como el producto tensorial algebraico $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ equipado con el producto interior

$$\Big\langle \sum\nolimits_j u_{1j} \otimes u_{2j}, \sum\nolimits_k v_{1k} \otimes v_{2k} \Big\rangle = \sum\nolimits_{j,k} \langle u_{1j}, v_{1k}\rangle \, \langle u_{2j}, v_{2k}\rangle.$$

Dadas álgebras de von Neumann $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ actuando sobre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, su producto tensorial algebraico $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ es la subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2)$ generada por los tensores simples $x_1 \otimes x_2$. El cierre débil de $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ es un álgebra de von Neumann y se denota por $\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2$. De forma similar, si ν_1 y ν_2 son trazas n.s.f. en $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$, determinamos la traza τ sobre $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2$ por su acción sobre los tensores simples $x_1 \otimes x_2$

$$\tau\big(x_1 \otimes x_2\big) = \nu_1(x_1)\nu_2(x_2).$$

Esto da lugar a los espacios

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p\big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big).$$

Análogamente se construyen los productos tensoriales infinitos

$$(\mathcal{M},\tau) = \overline{\bigotimes_{n\geq 1}}(\mathcal{M}_n,\tau_n).$$

e) Factor hiperfinito II$_1$. Sea M_n el álgebra de matrices $n \times n$ equipada con la traza normalizada $\sigma_n = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}$. De este modo y como hemos señalado antes (M_n, σ_n) se puede considerar como un espacio de probabilidad cuantizado o no conmutativo. Definimos entones el factor hiperfinito II$_1$ como

$$(\mathcal{R},\tau) = \overline{\bigotimes_{n\geq 1}}(\mathcal{M}_n,\tau_n) \quad \text{con} \quad (\mathcal{M}_n,\tau_n) = (M_2,\sigma_2) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

$\mathcal{R}$ es de nuevo un espacio de probabilidad no conmutativo. Además, cualquier par de elementos de $L_1(\mathcal{R},\tau)$ (variables aleatorias no conmutativas) soportados en dos factores distintos del producto tensorial se llaman **independientes**. Esto generaliza una propiedad bien conocida de la probabilidad clásica. De hecho, $\mathcal{R}$ es el análogo no conmutativo del espacio de probabilidad

$$\Omega = \big\{-1,+1\big\}^{\mathbb{N}}$$

equipado con la medida de probabilidad usual $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Así, una manera de interpretar el factor hiperfinito II$_1$ es como el espacio muestral de *lanzar infinitas veces una moneda cuántica*! La siguiente construcción también conduce al factor hiperfinito II$_1$. Sean $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ operadores unitarios y autoadjuntos en cierto Hilbert $\mathcal{H}$, que satisfacen las **relaciones canónicas de anticonmutación**

$$\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}.$$

Definimos $\mathcal{R}_0$ como la C^*-álgebra generada por los ε_n's. Entonces $\mathcal{R}_0$ admite una única traza normalizada τ que se define como sigue. Para todo conjunto finito $\mathcal{J} = \big\{j_1, j_2, \ldots, j_n\big\}$ de $\mathbb{N}$ con $j_1 < \cdots < j_n$ escribimos $w_{\mathcal{J}} = \varepsilon_{j_1}\cdots\varepsilon_{j_n}$ y $w_\emptyset = \mathbf{1}$. La traza τ está completamente determinada por su acción en los $w_{\mathcal{J}}$'s, que a su vez está dada por

$$\tau(w_{\mathcal{J}}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mathcal{J} = \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{array} \right.$$

$\mathcal{R}_0$ es una C^*-álgebra actuando sobre $L_2(\mathcal{R}_0,\tau)$ y $\mathcal{R}$ resulta isomorfo al cierre débil-$*$ de $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{B}(L_2(\mathcal{R}_0,\tau))$. La familia de los $w_{\mathcal{J}}$'s es densa débil-$*$ en $\mathcal{R}$ y densa en norma en $L_p(\mathcal{R},\tau)$ para $0 < p < \infty$. Además es una base ortonormal de $L_2(\mathcal{R},\tau) = L_2(\mathcal{R}_0,\tau)$. Por último, cabe mencionar que la subálgebra de von Neumann generada por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ es isomorfa a M_{2^n} equipada con la traza normalizada σ_{2^n}.

f) Algebras de von Neumann de grupos discretos. Dado $\mathbb{G}$ un grupo discreto, escribimos $\lambda : \mathbb{G} \to \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{G}))$ para referirnos a la representación regular a la izquierda, determinada por la acción $\lambda(g)(\delta_h) = \delta_{gh}$ donde $(\delta_g)_{g\in\mathbb{G}}$ denota la base canónica de $\ell_2(\mathbb{G})$. La C^*-álgebra generada en $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{G}))$ por $\lambda(\mathbb{G})$ se llama la **C^*-álgebra reducida de** $\mathbb{G}$ y se denota por $\mathrm{C}^*_\lambda(\mathbb{G})$. Su cierre débil $\lambda(\mathbb{G})''$ es un álgebra de von Neumann que se llama el **álgebra de von Neumann del grupo** $\mathbb{G}$ y habitualmente se denota por $\mathsf{vN}(\mathbb{G})$. La traza $\tau_{\mathbb{G}} : \mathsf{vN}(\mathbb{G}) \to \mathbb{C}$ se define como sigue

$$\tau_{\mathbb{G}}(x) = \big\langle x(\delta_e), \delta_e \big\rangle_{\ell_2(\mathbb{G})},$$

donde e denota el elemento neutro de $\mathbb{G}$. Esto proporciona una traza n.s.f. (de hecho finita con masa total 1) en $\mathsf{vN}(\mathbb{G})$. Un caso particularmente interesante y con muchas aplicaciones en análisis armónico se da con $\mathbb{G} = \mathbb{F}_n$, el grupo libre con n generadores. El lector puede acudir a [**18**] para más información en Análisis Armónico sobre grupos libres.

g) Productos libres. Una generalización natural del álgebra de von Neumann del grupo libre $\mathbb{F}_n$ es el producto libre de álgebras de von Neumann. Aunque no vamos a explicar aquí la construcción del producto libre de álgebras de von Neumann [**72**], podemos al menos discutir algunos aspectos. Consideramos una familia $(\mathsf{A}_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$ de espacios de probabilidad no conmutativos. Entonces el producto libre

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{n\geq 1}(\mathsf{A}_n, \varphi_n)$$

admite una descripción similar a la de los grupos libres en términos de *palabras* y *letras*. Es decir, $\mathcal{A}$ está generada por $\mathbf{1}$ y todas las palabras $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ con $m \geq 1$, $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_m$ y donde las letras $x_{j_k} \in \mathsf{A}_{j_k}$ y tienen media 0

$$\varphi_{j_k}(x_{j_k}) = 0.$$

Es más, cuando $(\mathsf{A}_n, \varphi_n) = \big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n}\big)$ se tiene que

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{n\geq 1}\big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n}\big) = \big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}), \tau_{\mathbb{G}}\big) \tag{1}$$

donde $\mathbb{G}$ es el producto libre de grupos

$$\mathbb{G} = \bigstar_{n\geq 1}\mathbb{G}_n.$$

El lector puede acudir a [**72**] para más detalles.

h) Algebras de von Neumann q-deformadas. Véase [**4, 49, 73**].

Concluimos este apartado mencionando ciertas *patologías* que poseen los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y que no aparecen entre los espacios clásicos de funciones. Esta situación fuerza en muchas ocasiones a desarrollar nuevas técnicas para extender resultados clásicos al contexto no conmutativo:

a) En primer lugar, la **desigualdad triangular** usual para el módulo de funciones deja de tener validez para el módulo de operadores. Es decir, en general no se tiene $|x+y| \leq |x| + |y|$ para $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. No obstante, existe un substituto [**1**] que asegura que para todo $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existen isometrías u y v en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

$$|x+y| \leq u|x|u^* + v|y|v^*.$$

b) La segunda patología tiene que ver con la **monotonía de funciones**. Dado α un número real positivo y dados $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $x \leq y$, en general no se tiene que $x^\alpha \leq y^\alpha$. En el caso no conmutativo esta implicación sólo se cumple para exponentes $0 < \alpha \leq 1$! Véase [**61**] para más detalles.

c) Otra diferencia fundamental con los espacios clásicos reside en la existencia o no de **bases incondicionales**. En 1970 Kwapień y Pelczynski probaron que la clase de Schatten $\mathcal{S}_1$ no puede ser isomorfa a ningún subespacio de un espacio de Banach con una base incondicional, no así ℓ_1. Pero el resultado más impactante se debe a Gordon y Lewis [**22**], que probaron que $\mathcal{S}_p$ no tiene una base incondicional para $p \neq 2$, en total contraste con lo que ocurre para ℓ_p o $L_p(\Omega)$. Una de las consecuencias que nos llaman la atención de la no incondicionalidad de $\mathcal{S}_p$ es la dificultad añadida que hay de los multiplicadores de Fourier en $L_p(\Omega)$/conjuntos $\Lambda(p)$ [**3**] a los multiplicadores de Schur/conjuntos $\sigma(p)$ [**25**].

d) Por último, una lacra de $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ con gran impacto en análisis armónico es la imposibilidad de construir **operadores maximales** ad hoc. Esto se debe a que la cuantización nos hace perder las nociones de *función* o *punto* y trabajamos sólo con operadores. En particular, esto imposibilita definir funciones maximales como se hace en el contexto clásico, cuya definición tiene una naturaleza puntual. Este problema se resuelve gracias a una ingeniosa construcción de Junge [**26**] utilizando técnicas de la teoría vectorial de Pisier [**57**] y que explicaremos más adelante al tratar el maximal de Doob no conmutativo.

4.3 Martingalas no conmutativas

Estudiamos ahora las desigualdades recientes de martingalas no conmutativas. Una referencias útil la exposición de Xu [**73**] que incluye casi todos los resultados obtenidos hasta la fecha. Aquí recogemos también resultados nuevos desde su publicación. En lo que sigue trabajamos sobre espacios de probabilidad cuánticos $(\mathcal{M}, \tau)$ formados por un álgebra de von Neumann finita $\mathcal{M}$ equipada con una traza n.f. normalizada τ. La mayor parte de los resultados son ciertos también sobre estados no traciales o incluso sobre álgebras de von Neumann no finitas. No obstante eludiremos tales generalidades para mayor claridad.

Consideramos ahora una subálgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ del álgebra $\mathcal{M}$. Es decir una $*$-subálgebra con la identidad $\mathbf{1}$ de $\mathcal{M}$ que es cerrada en la topología débil de operadores. Entonces la restricción $\tau_{|\mathcal{N}}$ de τ a $\mathcal{N}$ es una traza normalizada n.f. que también denotaremos por τ. Por otro lado, es claro que

$$L_p(\mathcal{N},\tau) \hookrightarrow L_p(\mathcal{M},\tau)$$

de forma isométrica. Entonces, dada la inclusión natural $j : L_1(\mathcal{N},\tau) \to L_1(\mathcal{M},\tau)$, podemos considerar el operador adjunto $\mathsf{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Se puede probar que el operador E satisface las siguientes propiedades [**69**]

1. E es **proyección contractiva**.
2. E **preserva la traza.** $\tau \circ \mathsf{E} = \tau$.
3. E es **positiva.** $x \in \mathcal{M}_+ \Rightarrow \mathsf{E}(x) \geq 0$.
4. E es **bimodular.** $\mathsf{E}(axb) = a\mathsf{E}(x)b$ para $a, b \in \mathcal{N}$ y $x \in \mathcal{M}$.

Instamos al lector a que compare estas propiedades con las del Capítulo 1. Un tal operador E es único y se llama **esperanza condicionada** de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{N}$. La esperanza condicionada se puede extender por densidad a un operador $\mathsf{E} : L_p(\mathcal{M},\tau) \to L_p(\mathcal{N},\tau)$ para $1 \leq p \leq \infty$. En este contexto más general E conserva las propiedades anteriores donde la bimodularidad toma la forma siguiente. Si $a \in L_u(\mathcal{N},\tau)$, $b \in L_v(\mathcal{N},\tau)$ y $x \in L_p(\mathcal{M},\tau)$ con $1/u + 1/p + 1/v = 1/q \leq 1$, entonces se tiene

$$\mathsf{E}(axb) = a\mathsf{E}(x)b \in L_q(\mathcal{N},\tau).$$

Por otro lado, al igual que en el caso conmutativo, la esperanza condicionada debe suponer una generalización del concepto *esperanza* o *estado*. Así aparecen las nociones de *normalidad* y *fidelidad* de una esperanza condicionada, que son importantes en ciertos contextos. Un estudio más detallado de la esperanza condicionada incluyendo el caso no tracial, se puede encontrar en [**36**] donde también se estudia dicho operador sobre $L_p(\mathcal{M},\tau)$ con $0 < p < 1$.

Una **filtración** de $\mathcal{M}$ es una sucesión creciente $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{M}$, tales que su unión es densa débil-$*$ en $\mathcal{M}$. Si denotamos por E_n a la esperanza condicionada de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_n$, observamos que

$$\mathsf{E}_n \circ \mathsf{E}_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathsf{E}_{n+1} \circ \mathsf{E}_n$$

son también esperanzas condicionadas de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_n$. De modo que por unicidad se obtienen las identidades $\mathsf{E}_n \circ \mathsf{E}_{n+1} = \mathsf{E}_n = \mathsf{E}_{n+1} \circ \mathsf{E}_n$. Definimos una **martingala no conmutativa** respecto de la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ como una sucesión $x = (x_n)_{n\geq 1}$ en $L_1(\mathcal{M},\tau)$ que satisface

$$\mathsf{E}_n(x_{n+1}) = x_n \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Si los x_n's están en $L_p(\mathcal{M},\tau)$, decimos que x es una L_p-**martingala** y añadimos que x está **acotada en** $L_p(\mathcal{M},\tau)$ cuando $\|x\|_p = \sup_n \|x_n\|_p$ es finito. Además, observando que E_n es un operador contractivo, deducimos que la sucesión $\|x_n\|_p$ es no decreciente por lo que

$$\|x\|_p = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p.$$

Dado $1 \leq p \leq \infty$ y dado un elemento $x_\infty \in L_p(\mathcal{M},\tau)$, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty)$ es una martingala acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ y que converge a x_∞ en norma si $1 \leq p < \infty$ y en la tipología débil-$*$ cuando $p = \infty$. La afirmación es trivial si

$$x_\infty \in \bigcup_{n\geq 1} L_p(\mathcal{M}_n,\tau)$$

puesto que en ese caso la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es constante a partir de un momento dado. El caso general se sigue por densidad. Recíprocamente, dado $1 < p \leq \infty$ y una martingala $(x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$, existe cierto $x_\infty \in L_p(\mathcal{M},\tau)$ de manera que $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty) \to x_\infty$ en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ $(1 < p < \infty)$ o en la topología débil-$*$ $(p = \infty)$ cuando $n \to \infty$. Efectivamente, puesto que $L_p(\mathcal{M},\tau)$ es un espacio dual y la bola unidad es compacta débil-$*$ por el teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a cierto $x_\infty \in L_p(\mathcal{M},\tau)$ en dicha topología. Como

$$\tau(x_n z) = \lim_{k\to\infty} \tau(\mathsf{E}_n(x_{m_k})z) = \lim_{k\to\infty} \tau(x_{m_k} z) = \tau(x_\infty z)$$

para todo $z \in L_{p'}(\mathcal{M}_n,\tau)$, esto nos lleva a que $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty)$ y a la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p = \|x_\infty\|_p.$$

De aquí se deduce fácilmente la afirmación. De acuerdo con la teoría clásica, también esperamos que $L_1(\mathcal{M},\tau)$ se identifique con martingalas uniformemente integrables como se demostró en **[60]** con la siguiente noción de integrabilidad uniforme. Un subconjunto K de $L_1(\mathcal{M},\tau)$ es **uniformemente integrable** si es acotado y para toda sucesión decreciente de proyecciones $p_1, p_2, \ldots$ convergente a 0 en $L_1(\mathcal{M},\tau)$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathrm{K}} \big\|p_n x p_n\big\|_1 = 0.$$

En definitiva, siguiendo la terminología del Capítulo 1 y en virtud de la discusión anterior, dado $1 \leq p \leq \infty$ podemos identificar el espacio de martingalas acotadas* en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ con $L_p(\mathcal{M},\tau)$ propiamente dicho. Dada una martingala no conmutativa $x = (x_n)_{n\geq 1}$, la sucesión $dx = (dx_k)_{k\geq 1}$ de **diferencias de martingala** se define por $dx_k = x_k - x_{k-1}$ para todo $k \geq 1$ y con la convención de que $x_0 = 0$. Como es bien sabido, esto da lugar a otra forma de caracterizar las martingalas. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es una martingala respecto de la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ cuando su sucesión de diferencias $(dx_k)_{k\geq 1}$ está adaptada a la filtración y satisface

$$\mathsf{E}_{k-1}(dx_k) = 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq 2.$$

Consideramos finalmente algunos ejemplos de martingalas no conmutativas que se corresponden con los ejemplos sobre espacios L_p no conmutativos que se consideran en la sección anterior:

a) Martingalas clásicas. Dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ finita y abeliana equipada con una traza normalizada τ y una filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}$, existe un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) así como una sucesión creciente $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ de σ-subálgebras de Σ tales que

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu) \quad \text{y} \quad L_p(\mathcal{M}_n, \tau) = L_p(\Omega, \Sigma_n, \mu)$$

para todo $n \geq 1$. Así, las martingalas clásicas aparecen como caso particular.

b) Martingalas semi-conmutativas. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y tomemos $\mathcal{N}_1 = L_\infty(\Omega)$ equipada con la traza $\nu_1 = \int_\Omega \cdot \, d\mu$. Sea $(\mathcal{N}_2, \nu_2)$ otro espacio de probabilidad no conmutativo. Dada $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ una filtración creciente de σ-subálgebras de Σ, consideramos la filtración

$$(\mathcal{M}_n, \tau) = \Big(L_\infty(\Omega, \Sigma_n, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big),$$

de

$$(\mathcal{M}, \tau) = \big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big) = \Big(L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big).$$

En este caso, las esperanzas condicionadas están dadas por $\mathsf{E}_n = \mathbb{E}_n \otimes id_{\mathcal{N}_2}$ donde $\mathbb{E}_n$ denota la esperanza en Ω condicionada a la σ-subálgebra Σ_n. Una vez más, en esta situación se transforman las martingalas no conmutativas en martingalas conmutativas con valores vectoriales.

c) Martingalas finitas. En el caso de las clases de Schatten no existe una traza finita *natural* a menos que tratemos con clases finito-dimensionales $\mathcal{S}_p(n)$, donde podemos considerar la traza $\sigma_n = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}$. Puesto que trabajamos sobre un espacio de dimensión finita, las filtraciones y por ende las martingalas resultantes serán finitas. Una filtración natural se obtiene tomando $(\mathcal{M}_k, \sigma_n)$ la subálgebra de matrices $n \times n$ con entradas nulas en las $n-k$ últimas filas y columnas (i.e. el soporte es la *esquina* $k \times k$ superior izquierda). Esta elección es muy útil a la hora de obtener contraejemplos. Efectivamente, si queremos ver que alguna propiedad no se cumple para martingalas no conmutativas, este es el primer caso que uno tiene que comprobar, véase [**37**].

d) Martingalas diádicas. Dadas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ v.a. de Bernoulli independientes con función de masa equidistribuida en ± 1 (e.g. las funciones de Rademacher), las martingalas diádicas se construyen sobre la filtración dada por

$$\Sigma_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n).$$

Puesto que se trata de uno de los ejemplos más relevantes de martingalas, es interesante saber como construir martingalas diádicas no conmutativas. En este caso tomamos el factor hiperfinito II_1, definido más arriba y equipado con la filtración

$$(\mathcal{R}_n, \tau) = \overline{\bigotimes_{m \leq n}} (\mathcal{M}_m, \tau_m)$$

con $(\mathcal{M}_m, \tau_m) = (M_2, \sigma_2)$ para todo $m, n \geq 1$. Aquí $\mathcal{R}_n$ se incluye en el factor hiperfinito $\mathcal{R}$ identificando $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ con $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1_{M_2} \otimes 1_{M_2} \cdots$. Además la esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_n$ está completamente determinada por

$$\mathsf{E}_n \big(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes 1_{M_2} \otimes 1_{M_2} \cdots \big) = \Big(\prod_{k=n+1}^{r} \sigma_2(a_k) \Big) a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1_{M_2} \otimes 1_{M_2} \cdots$$

para $1 \leq n \leq r$. Esta construcción se generaliza de manera natural cuando consideramos productos tensoriales arbitrarios de espacios de probabilidad no conmutativos $(\mathcal{N}_n, \nu_n)$, véase e.g. [**73**].

e) Martingalas sobre grupos discretos. Dado $\mathbb{G}$ un grupo discreto y $(\mathbb{G}_n)_{n \geq 1}$ una familia creciente de subgrupos de $\mathbb{G}$ tales que $\bigcup_n \mathbb{G}_n = \mathbb{G}$, definimos el espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M}, \tau) = (\mathsf{vN}(\mathbb{G}), \tau_{\mathbb{G}})$ equipado con la filtración $(\mathcal{M}_n, \tau) = (\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}})$. La esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_n$ sobre combinaciones lineales finitas de generadores está dada por

$$\mathsf{E}_n \Big(\sum_{g \in \mathbb{G}} \alpha_g \lambda(g) \Big) = \sum_{g \in \mathbb{G}_n} \alpha_g \lambda(g).$$

f) Martingalas libres. Tomamos

$$(\mathcal{M}, \tau) = \bigstar_{n \geq 1} (\mathcal{N}_n, \nu_n) \quad \text{y} \quad (\mathcal{M}_n, \tau) = \bigstar_{m \leq n} (\mathcal{N}_m, \nu_m).$$

Es decir, en este caso procedemos de forma similar al caso de las martingalas diádicas, pero sustituyendo productos tensoriales por productos libres. Por otro lado, la esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_n$ está determinada como sigue. Sea $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ una *palabra reducida* (i.e. $j_1 \neq \cdots \neq j_m$ y $x_{j_k} \in \mathcal{N}_{j_k}$ con media 0), entonces

$$\mathsf{E}_n \big(x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m} \big) = 0$$

a menos que $\max(j_1, j_2, \ldots, j_m) \leq n$, en cuyo caso E_n deja invariante la palabra $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$. Puesto que el producto libre $\mathcal{M}$ está generado por la identidad $\mathbf{1}$ (que queda fijada por E_n para todo $n \geq 1$) y las palabras reducidas, esta definición determina E_n por completo.

g) Martingalas q-deformadas. Véase [**73**].

4.4 El maximal de Doob

El primer resultado sobre martingalas no conmutativas se remonta a 1971 con el trabajo de Cuculescu [**10**], quién obtuvo una extensión al contexto no conmutativo de la desigualdad maximal de Doob de tipo débil $(1,1)$. Después del trabajo de Cuculescu las desigualdades de martingalas no conmutativas entraron en un período de relativa calma hasta el trabajo de Pisier y Xu [**60**] en 1997, a partir del cual han alcanzado un espectacular desarrollo. Este largo paréntesis se explica fundamentalmente por el hecho de que las técnicas clásicas como las funciones maximales, los tiempos de parada, etc... ya no tienen cabida en el contexto no conmutativo. De este modo, transferir los resultados clásicos al contexto no conmutativo es por lo general altamente no trivial y require técnicas adicionales del análisis funcional y la combinatoria. No obstante, la teoría ha alcanzado hoy por hoy un punto satisfactorio de madurez y muchas de las desigualdades clásicas han sido transferidas con éxito al contexto no conmutativo.

Para extender la desigualdad maximal de Doob al contexto no conmutativo, la primera dificultad que uno encuentra es cómo formular un análogo no conmutativo de la función maximal. Efectivamente, dados dos operadores positivos a y b en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la expresión $\max(a,b)$ no tienen ningún sentido. No obstante, en lugar de considerar la *cota superior mínima* podemos buscar una cota superior que desempeñe la misma función. Comenzamos con la desigualdad débil de Cuculescu [**10**].

Teorema 4.3 *Dado un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M},\tau)$ y dada una martingala $x=(x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_1(\mathcal{M},\tau)$, existe para todo $\lambda>0$ una proyección $q(\lambda)\in\mathcal{M}$ que satisface*

$$\big\|q(\lambda)x_n q(\lambda)\big\|_\infty \leq \lambda \quad \textit{para todo } n\geq 1 \ \ \textit{y} \ \ \tau\big(\mathbf{1}-q(\lambda)\big)\leq \frac{4\|x\|_1}{\lambda}.$$

Es muy sencillo justificar por qué el resultado de Cuculescu es una generalización no conmutativa de la desigualdad maximal de Doob de tipo débil $(1,1)$. Basta con recordar que las proyecciones ortogonales se corresponden en el caso clásico con las funciones características. De manera que la proyección $q(\lambda)$ se corresponde con la función característica del conjunto

$$\Big\{\sup_{n\geq 1}|f_n(w)|\leq\lambda\Big\}.$$

Así, una nueva lectura del Teorema 4.3 conduce en este caso a la desigualdad de tipo débil $(1,1)$. Puesto que la prueba de este resultado es muy sencilla y muestra algunas técnicas habituales en la teoría, la incluimos aquí. En primer lugar, todo operador x se escribe como

$$x=\frac{1}{2}\big(x+x^*\big)+i\,\frac{1}{2i}\big(x-x^*\big).$$

Las partes real e imaginaria son ahora operadores autoadjuntos y, utilizando teoría espectral, podemos escribirlos como la diferencia entre dos operadores positivos. En definitiva, todo operador x se escribe como una combinación lineal $(a-b)+i(c-d)$ de operadores positivos. Esto nos permite desarrollar una forma no conmutativa de la descomposición de Krickeberg, demostrada en [**10**]. De este modo, basta probar el Teorema 4.3 para martingalas positivas y con constante 1 en lugar de 4. Definimos ahora inductivamente una sucesión $q(\lambda)_0, q(\lambda)_1, q(\lambda)_2, \ldots$ de proyecciones ortogonales tomando $q(\lambda)_0 = \mathbf{1}$ y las resoluciones espectrales

$$q(\lambda)_n = q(\lambda)_{n-1}\chi_{[0,\lambda]}\big(q(\lambda)_{n-1}x_n q(\lambda)_{n-1}\big) = \chi_{[0,\lambda]}\big(q(\lambda)_{n-1}x_n q(\lambda)_{n-1}\big)q(\lambda)_{n-1}.$$

Entonces tomamos

$$q(\lambda) = \bigwedge_{n\geq 1} q(\lambda)_n,$$

la proyección cuyo rango es el resultado de intersecar los rangos de $q(\lambda)_n$ para $n \geq 1$. Nótese que $q(\lambda)_n \in \mathcal{M}_n$ y que la sucesión $(q(\lambda)_n)_{n\geq 1}$ es decreciente. Veamos que $q(\lambda)$ es la proyección deseada. Por un lado tenemos

$$q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n = q(\lambda)_n\big(q(\lambda)_{n-1}x_n q(\lambda)_{n-1}\big)q(\lambda)_n \leq \lambda q(\lambda)_n.$$

Por consiguiente, obtenemos

$$q(\lambda)x_n q(\lambda) = q(\lambda)\big(q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n\big)q(\lambda) \leq \lambda q(\lambda) \leq \lambda\mathbf{1}.$$

De aquí se sigue la primera parte del Teorema 4.3. Para la segunda observamos que

$$\lambda\tau\big(\mathbf{1} - q(\lambda)_n\big) = \lambda\sum_{k=1}^{n}\tau\big(q(\lambda)_{k-1} - q(\lambda)_k\big) = \lambda\sum_{k=1}^{n}\tau\big(p(\lambda)_k\big),$$

donde $p(\lambda)_k = q(\lambda)_{k-1} - q(\lambda)_k$ es una proyección dado que la sucesión de q's es decreciente. Por otro lado, según la definición de $q(\lambda)_k$, sabemos que el espectro del operador $p(\lambda)_k q(\lambda)_{k-1}x_k q(\lambda)_{k-1}p(\lambda)_k$ está contenido en (λ,∞). Esto nos lleva a la desigualdad

$$p(\lambda)_k = p(\lambda)_k^2 \leq \frac{1}{\lambda}p(\lambda)_k\big(q(\lambda)_{k-1}x_k q(\lambda)_{k-1}\big)p(\lambda)_k = \frac{1}{\lambda}p(\lambda)_k x_k p(\lambda)_k.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}
\lambda\tau\big(\mathbf{1} - q(\lambda)_n\big) &\leq \sum_{k=1}^{n}\tau\Big(\mathsf{E}_k\big(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k\big)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\tau\left(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\tau\left(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k\right) + \tau\big(q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n\big) = \tau(x_n).
\end{aligned}$$

La prueba se concluye haciendo $n \to \infty$. Observamos aquí que en [**54**] se da una construcción similar $(q(\lambda)_n)_{n\geq 0}$ partiendo de una martingala $(x_n)_{n\geq 1}$ autoadjunta no necesariamente positiva. Esto completa el estudio de la desigualdad débil.

Nos centramos ahora en la forma no conmutativa de la desigualdad maximal de Doob fuerte. Con la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ hemos sorteado la imposibilidad de construir una función maximal con la ingeniosa construcción de Cuculescu. Pero la desigualdad débil sólo exige conocer *dónde* la función maximal se comporta mal y estimar la medida de dicho conjunto. En la desigualdad fuerte necesitamos ser algo más agudos. Puesto que no podemos construir la función maximal, observamos que podemos escribir

$$\Big(\int_\Omega f^*(w)^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} = \big\| \big(f_1, f_2, f_3, \ldots \big) \big\|_{L_p(\Omega;\ell_\infty)}.$$

Es decir, utilizando el espacio con valores vectoriales $L_p(\Omega;\ell_\infty)$ evitamos hacer uso de la función maximal. Inspirado por la teoría de espacios $L_p(\mathcal{M},\tau;\mathrm{X})$ desarrollada por Pisier [**57**], Junge explotó esta idea para obtener la desigualdad no conmutativa de Doob. Como hemos indicado antes, es difícil dar expresiones explícitas de la norma en $L_p(\mathcal{M},\tau;\mathrm{X})$. No obstante, en el caso en el que $\mathrm{X} = \ell_\infty$, Junge [**26**] obtuvo la siguiente caracterización

$$L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty) = L_{2p}(\mathcal{M},\tau)\ell_\infty\big(L_\infty(\mathcal{M},\tau)\big)L_{2p}(\mathcal{M},\tau).$$

En otras palabras, dado $x = (x_1, x_2, \ldots) \in L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty)$ se tiene que

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty)} = \operatorname{inf} \Big\{ \|a\|_{2p} \big(\sup_{n\geq 1} \|y_n\|_\infty \big) \|b\|_{2p} \ \big| \ x_n = a y_n b \Big\},$$

donde el ínfimo recorre todas las factorizaciones de x en la forma $(x_n) = a(y_n)b$ con $a, b \in L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$ e $(y_n) \in \ell_\infty\big(L_\infty(\mathcal{M},\tau)\big)$. Un análisis mucho más general de este tipo de expresiones explícitas para normas L_p vectoriales se puede encontrar en la primera mitad de [**32**]. Presentamos ahora el resultado de Junge [**26**].

Teorema 4.4 *Dado $1 < p \leq \infty$, un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M},\tau)$ y dada una martingala $x = (x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$, existen $a, b \in L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$ e $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ tales que*

$$x_n = a y_n b, \quad \|a\|_{2p}\|b\|_{2p} \leq \gamma_p \, \|x\|_p, \quad \|y_n\|_\infty \leq 1 \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

En otras palabras, se tiene que

$$\big\| \big(x_1, x_2, x_3, \ldots \big) \big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty)} \leq \gamma_p \, \|x\|_p.$$

Para $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad conmutativo, recuperamos la desigualdad de Doob clásica. Cuando x es una martingala positiva se pueden tomar a, b e y_n positivos. Es más, se puede escoger una factorización con $a = b$. De este modo se deduce del resultado de Junge que x_n está uniformemente acotado por $a^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y que a^2 satisface la desigualdad

$$\|a^2\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p.$$

Es decir, en el caso de martingalas positivas es más transparente la relación entre los mundos conmutativo y no conmutativo. La demostración original de Junge [**26**] se apoya en la teoría de *módulos de Hilbert* [**41**] y resulta bastante compleja. Una demostración casi automática se obtiene utilizando un resultado muy profundo [**38**] sobre interpolación real de espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Esto permite obtener el Teorema 4.4 a partir del resultado de Cuculescu y el caso trivial para $p = \infty$. Además, esta nueva demostración permite obtener el orden de crecimiento óptimo de la constant γ_p

$$\gamma_p \sim (p-1)^{-2} \quad \text{cuando} \quad p \to 1.$$

Es decir, γ_p se comporta como δ_p^2 donde δ_p es la constante en la desigualdad de Doob clásica, véase [**37, 73**] para una exposición más detallada. Por último concluimos observando que las técnicas de Cuculescu y Junge en sus respectivos trabajos nos conducen a un conocimiento mucho más depurado de la noción de *operador maximal no conmutativo*. Esto se ha explotado recientemente en [**38**] para obtener versiones no conmutativas de teoremas ergódicos maximales.

4.5 Desomposición de Gundy

La forma no conmutativa de la descomposición de Gundy [**54**] para martingalas encuentra esencialmente dos dificultades. Siguiendo la terminología del Capítulo 1 para la descomposición clásica de Gundy, la primera es *emular* el conjunto donde $\sup_k |d\gamma_k| > 0$, que está definido en términos de una función maximal. Aquí la idea consiste en identificar dicho conjunto como una unión de *soportes*

$$\Big\{ \sup_{k \geq 1} |d\gamma_k| > 0 \Big\} = \bigcup_{k \geq 1} \Big\{ |d\gamma_k| > 0 \Big\} = \bigcup_{k \geq 1} \operatorname{supp} |d\gamma_k|.$$

Es decir, la estimación de γ es equivalente a

$$\lambda \mu \Big(\bigcup_{k \geq 1} \operatorname{supp} |d\gamma_k| \Big) \lesssim \|f\|_1.$$

La formulación no conmutativa utiliza la noción de proyección soporte de un operador τ-medible, introducida antes. Por otro lado, la segunda dificultad que aparece es que las demostraciones clásicas de la descomposición de Gundy y sus variantes necesitan en todos los casos hacer uso de al menos un tiempo de parada. Nuevamente la noción de tiempo de parada es *puntual* y por tanto carece de sentido en el contexto no conmutativo. Esta dificultad se solventa en [**54**] utilizando una construcción de tipo Cuculescu para martingalas autoadjuntas no positivas, como la descrita en la prueba del Teorema 4.3. Efectivamente, un momento de reflexión lleva a observar que dicha construcción es lo *más parecido* a un tiempo de parada.

Teorema 4.5 *Sea $(\mathcal{M},\tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ una filtración de $\mathcal{M}$. Si $x=(x_n)_{n\geq 1}$ es una martingala respecto de $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_1(\mathcal{M},\tau)$ y $\lambda>0$, existe una descomposición de x como suma $x=\alpha+\beta+\gamma^r+\gamma^c$ de martingalas adaptadas a $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ y tales que*

$$\text{máx}\left\{\frac{1}{\lambda}\|\alpha\|_2^2, \sum_{k=1}^{\infty}\|d\beta_k\|_1, \lambda\tau\Big(\bigvee_{k\geq 1}\operatorname{supp}|(d\gamma_k^r)^*|\Big), \lambda\tau\Big(\bigvee_{k\geq 1}\operatorname{supp}|d\gamma_k^c|\Big)\right\} \lesssim \|x\|_1,$$

donde $p\vee q$ denota la proyección con $\mathrm{rg}(p\vee q)=\mathrm{rg}(p)+\mathrm{rg}(q)$.

La diferencia esencial entre la descomposición original de Gundy [**23**] y su versión no conmutativa [**54**] reside en que la primera utiliza tres martingalas mientras que la segunda *necesita* cuatro. Efectivamente, sin mucho rigor se puede decir que este fenómeno se debe a la naturaleza *fila/columna* de los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ de martingalas no conmutativas, que analizaremos después. Más concretamente, γ^r y γ^c son las partes fila y columna de su contrapunto conmutativo γ. En [**54**] se da un sencillo argumento que justifica que no existe una posible descomposición en tres martingalas con estas propiedades, porque ello conduciría a la negación de las desigualdades de Burkholder-Gundy no conmutativas [**60**]. Por último, la descomposición en [**54**] no es sólo un resultado de existencia sino una descomposición explícita donde, como hemos señalado antes, se utiliza la construcción de Cuculescu [**10**] como pieza clave. No damos aquí la descomposición explícita de x, véase [**54**] para los detalles y para otras descomposiciones relacionadas.

Al igual que en el contexto clásico, la descomposición de Gundy es un arma poderosa para obtener desigualdades de tipo débil. En [**54**] se obtienen dos aplicaciones en esta línea. Concretamente, la acotación débil $(1,1)$ de las transformadas de martingalas no conmutativas así como el análogo no conmutativo de la desigualdad débil para la función cuadrado, debida a Burkholder. En otras palabras, la acotación débil $(1,1)$ de la desigualdad de Burkholder-Gundy que no fue estudiada en [**60**]. Estos dos resultados habían sido probados con anterioridad por Randrianantoanina utilizando argumentos mucho menos directos [**63, 64**]. La principal contribución de las demostraciones dadas en [**54**] reside en su simplicidad, que se deriva del uso de la descomposición de Gundy para martingalas no conmutativas.

4.6 Desigualdades L_p de martingalas no conmutativas

Desde la publicación por Pisier y Xu de [**60**] en 1997, las desigualdades L_p de martingalas no conmutativas han experimentado un desarrollo exponencial. Revisamos aquí los resultados más importantes no considerados hasta ahora. A saber, la acotación L_p de las transformadas de martingalas no conmutativas [**63**], las desigualdades no conmutativas de Burkholder-Gundy [**60**]. También comentaremos una generalización muy reciente [**47**] que incluye ambos resultados como caso particular.

A. Transformadas de martingalas. Dado un espacio de probabilidad cuántico $(\mathcal{M},\tau)$ sea $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ una filtración de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{M}$. Consideramos una sucesión $\xi=(\xi_n)_{n\geq 0}$ en $\mathcal{M}$ adaptada a $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\xi_0 = \mathbf{1}$,
- $\sup_{n\geq 1} \|\xi_n\|_{\mathcal{M}_n} \leq 1$,
- $\xi_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1} \cap \mathcal{M}_n'$ para $n \geq 1$,

donde $\mathcal{M}_n'$ denota el conmutador de $\mathcal{M}_n$. Dado $1\leq p\leq\infty$, sea $x=(x_n)_{n\geq 1}$ una martingala adaptada a la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ y acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$. Entonces, el operador **transformada de martingalas** Λ_ξ se define como

$$\Lambda_\xi\Big(\sum_{k=1}^\infty dx_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \xi_{k-1}dx_k = \sum_{k=1}^\infty dx_k\xi_{k-1}.$$

Puesto que es evidente que Λ_ξ está acotado en $L_2(\mathcal{M},\tau)$, combinando el método de interpolación real con un argumento de dualidad basta con probar la estimación débil $(1,1)$ para obtener el resto. Para ello es necesario utilizar el **espacio** $L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ que está determinado por la seminorma

$$\|x\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\,\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)\Big),$$

donde $\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)$ es la proyección espectral de $|x|$ asociada al intervalo (λ,∞).

Teorema 4.6 *Se tiene que*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1}dx_k\Big\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)} \lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_{L_1(\mathcal{M},\tau)}$$

para todo $n\geq 1$ y cierta constante absoluta independiente de $\xi=(\xi_n)_{n\geq 0}$.

La demostración original de **[63]** es bastante técnica. No obstante, haciendo uso del Teorema 4.5, el argumento es tan sumamente sencillo que merece la pena incluirlo en estas notas. Tenemos que probar la siguiente desigualdad con constantes que no dependen de $\lambda > 0$

$$\lambda\,\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|\Big)\Big) \lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_{L_1(\mathcal{M},\tau)}.$$

Aplicando el Teorema 4.5 para λ, se tiene

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|^2 &\leq 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big|^2 + 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|^2 \\ &+ 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^r\Big|^2 + 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c\Big|^2,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad

$$|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$$

para operadores. Tomando trazas y usando la desigualdad quasi-triangular

$$\begin{aligned}&\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|\Big)\Big) \\ &\leq \lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big|^2\Big)\Big) + \lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|^2\Big)\Big) \\ &+ \lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^r\Big|^2\Big)\Big) + \lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c\Big|^2\Big)\Big) \\ &= \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D}.\end{aligned}$$

Para el primer término utilizamos la desigualdad de Chebychev

$$\mathsf{A} \lesssim \frac{1}{\lambda}\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big\|_2^2 = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n \|\xi_{k-1} d\alpha_k\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n \|d\alpha_k\|_2^2 \lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.$$

El segundo término se estima de forma similar

$$\begin{aligned}\mathsf{B} &= \lambda\,\tau\Big(\chi_{(\lambda/2,\infty)}\Big(2\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|\Big)\Big) \\ &\lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big\|_1 \leq \sum_{k=1}^n \|d\beta_k\|_1 \lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.\end{aligned}$$

Para el término D, notamos que $|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c|^2$ está soportado por la proyección

$$\bigvee_{1\leq k\leq n} \operatorname{supp}|d\gamma_k^c|.$$

Con esta observación, se sigue que

$$\mathsf{D} \leq \lambda\tau\Big(\bigvee_{1\leq k\leq n} \operatorname{supp}|d\gamma_k^c|\Big) \lesssim \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.$$

Para el último término utilizamos que la seminorma en $L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ es invariante al tomar adjuntos y que ξ_{k-1} conmuta con dx_k. De este modo, estimamos C del mismo modo que D. Esto concluye la prueba. El Teorema 4.6 tiene profundas implicaciones tanto en teoría de martingalas no conmutativas como a la hora de estimar constantes UMD de ciertos espacios de funciones no conmutativos, véase [**63**] o la exposición de Xu en [**73**].

B. Desigualdades de Burkholder-Gundy. Dados $1 \leq p \leq \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una martingala finita en $L_p(\mathcal{M},\tau)$, las **funciones cuadrado fila** y **columna** asociadas a x se definen como

$$\mathcal{S}_r(x) = \Big(\sum_{k\geq 1} dx_k dx_k^*\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_c(x) = \Big(\sum_{k\geq 1} dx_k^* dx_k\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nótese que la no conmutatividad hace que ambas funciones cuadrado sean distintas en general, pero igualmente legítimas! La dificultad radica en dar una norma que conceda la misma importancia a ambas expresiones y nos permita obtener una generalización de las desigualdades de Burkholder-Gundy en este contexto. Nótese también que si e_{ij} es la matriz con todas sus entradas 0 excepto en la entrada (i,j) donde vale 1, se tiene (ejercicio) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_r(x) &\sim \mathcal{S}_r(x)\otimes e_{11} = \Big|\sum_{k\geq 1} dx_k \otimes e_{1k}\Big|,\\
\mathcal{S}_c(x) &\sim \mathcal{S}_c(x)\otimes e_{11} = \Big|\sum_{k\geq 1} dx_k \otimes e_{k1}\Big|.
\end{aligned}$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} &= \Big\|\Big(\sum_{k\geq 1} dx_k dx_k^*\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p = \Big\|\sum_{k\geq 1} dx_k \otimes e_{1k}\Big\|_{L_p(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2),\tau\otimes\mathrm{Tr})},\\
\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} &= \Big\|\Big(\sum_{k\geq 1} dx_k^* dx_k\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p = \Big\|\sum_{k\geq 1} dx_k \otimes e_{k1}\Big\|_{L_p(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2),\tau\otimes\mathrm{Tr})}.
\end{aligned}$$

Esto proporciona dos normas en el espacio de las martingalas finitas. Los espacios de Hardy *fila* y *columna* se definen como las correspondientes completaciones y los denotaremos por $\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)$ y $\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)$ respectivamente. El **espacio de Hardy de martingalas no conmutativas** $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ se define entonces como sigue

$$\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau) = \begin{cases} \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau) + \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau), & \text{si } 1 \leq p \leq 2 \\ \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau) \cap \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau), & \text{si } 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Las normas que así se obtienen son

- Si $1 \leq p \leq 2$
$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} = \inf_{x=y+z} \Big\{ \|y\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} + \|z\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} \Big\}.$$

- Si $2 \leq p \leq \infty$
$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} = \max \Big\{ \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} \, , \, \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} \Big\}.$$

Esto sigue una analogía completa con la desigualdad de Khintchine no conmutativa [**42, 43**]. La versión no conmutativa de la desigualdad de Burkholder-Gundy es el resultado principal del trabajo de Pisier y Xu [**60**].

Teorema 4.7 *Dado $1 < p < \infty$, el espacio de Hardy $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ es isomorfo a $L_p(\mathcal{M},\tau)$. Concretamente, existen constantes positivas α_p y β_p que dependen sólo de p y tal que cualquier martingala x acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ satisface*

$$\alpha_p^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} \leq \|x\|_{L_p(\mathcal{M},\tau)} \leq \beta_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)}.$$

Observación 4.8 Sean $f_1, f_2, \ldots \in L_p(\Omega)$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ las funciones de Rademacher de manera que $f_k \otimes \varepsilon_k$ son diferencias de martingalas respecto de la filtración diádica en $[0,1]$ tensorizada con Σ, la σ-álgebra original en Ω. Entonces, las desigualdades de Burkholder-Gundy nos ofrecen esta forma fuerte de la desigualdad de Khintchine

$$\Big(\int_\Omega \int_0^1 \Big| \sum_{k\geq 1} f_k(w)\varepsilon_k(s) \Big|^p ds\, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{k \geq 1} |f_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L_p(\Omega)}.$$

Del mismo modo, la desigualdad de Burkholder-Gundy no conmutativa nos lleva a la desigualdad de Khintchine no conmutativa [**42, 43**]. Es un problema abierto extender la desigualdad de Khintchine no conmutativa a valores $0 < p < 1$.

Observación 4.9 En [**60**] también se da una versión no conmutativa del espacio BMO de martingalas y se demuestra la versión del teorema de dualidad de Fefferman [**17**] para martingalas no conmutativas, que asegura que el dual de $\mathcal{H}_1(\mathcal{M},\tau)$ es el espacio $\mathcal{BMO}(\mathcal{M},\tau)$, acudir a [**60**] para más detalles.

Observación 4.10 En el Capítulo 1 se mostró que la descomposición de Gundy unida a ciertas estimaciones BMO sencillas, nos proporcionaban desigualdades débiles de tipo débil $(1,1)$ y $L_\infty - \mathrm{BMO}$, desde las que podíamos interpolar para deducir desigualdades en toda la escala L_p. Este enfoque se ha revelado el más sencillo para probar esta clase de desigualdades y no siempre coincide con el que encontramos en la literatura. De hecho, en el Capítulo 1 demostramos los Teoremas 1.13 y 1.15 que proporcionaban desigualdades aún más generales que implican las desigualdades clásicas. Un enfoque paralelo, que también vale para integrales singulares semiconmutativas, se desarrolla en [**47**]. Consideramos que el argumento utilizado allí es el más directo en el contexto no conmutativo.

4.7 Material de lectura

Álgebras de von Neumann.	[**39, 70**]
Espacios L_p no conmutativos.	[**57, 61, 71**]
Espacios de operadores.	[**16, 57, 58**]
Probabilidad cuántica y probabilidad libre.	[**48, 72**]
Teorema de Grothendieck para espacios de operadores.	[**24, 27, 59, 74**]
Geometría de los espacios L_p y espacios de operadores.	[**31, 32, 33, 34**]
Maximal de Doob no conmutativo.	[**10, 26, 38**]
Transformadas de martingalas no conmutativas.	[**47, 54, 63**]
Desigualdad de Burkholder-Gundy no conmutativa.	[**47, 54, 60, 64**]
Descomposiciones de Gundy y de Davis no conmutativas.	[**54, 56**]
Desigualdad de Burkholder y función cuadrado condicional.	[**36, 51, 65**]
Desigualdades de tipo Khintchine y Rosenthal para v.a. libres.	[**11, 35, 53**]
Maximal ergódico no conmutativo.	[**38**]
Teoría de Littlewood-Paley-Stein no conmutativa.	[**28**]
Espacios BMO no conmutativos y semigrupos de difusión.	[**46**]
Descomposición de CZ y OCZ's semiconmutativos.	[**52**]
Funciones cuadrado de Calderón-Zygmund semiconmutativas.	[**45, 47**]
Teoría de Calderón-Zygmund puramente no conmutativa.	[**29, 30**]
Teoría de información cuántica y análisis no conmutativo.	[**55**]

Bibliografía

[1] C.A. Akerman, J. Anderson y G.K. Pedersen, Triangle inequalities in operator algebras. Linear and Multilinear Algebra **11** (1982), 167-178.

[2] J. Bergh y J. Löfström, Interpolation Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] J. Bourgain, Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem. Acta Math. **162** (1989), 227-245.

[4] M. Bożejko, B. Kúmmerer y R. Speicher, q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects. Comm. Math. Phys. **185** (1997), 129-154.

[5] D.L. Burkholder, Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probab. **1** (1973), 19-42.

[6] D.L. Burkholder y R.F. Gundy, Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. **124** (1970), 249-304.

[7] A.P. Calderón y A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals. Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[8] B. Davis, On the integrability of the martingale square function. Israel J. Math. **8** (1970), 187-190.

[9] J.B. Conway, A course in operator theory. Grad. Stud. Math. **21**, American Mathematical Society, 2000.

[10] I. Cuculescu, Martingales on von Neumann algebras. J. Multivariate Anal. **1** (1971), 17-27.

[11] M. de la Salle, Strong Haagerup inequalities with operator coefficients. Preprint 2009.

[12] J.L. Doob, Stochastic Procecess. Wiley, New York, 1953.

[13] J.L. Doob, A ratio operator limit theorem. Zeit. Wahrscheinlich. **1** (1963), 288-294.

[14] N. Dunford y J.T. Schwartz, Linear operators. Part I, General Theory. Applied Mathematics **7**. Interscience Publishers, 1958.

[15] J. Duoandikoetxea, Análisis de Fourier. Addison-Wesley, 1995.

[16] E.G. Effros y Z.J. Ruan, Operator Spaces. London Math. Soc. Monogr. **23**, Oxford University Press, New York, 2000.

[17] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation. Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 587-588.

[18] A. Figá-Talamanca y M. Picardello, Harmonic Analysis on Free Groups. Marcel Dekker, 1983.

[19] G.B. Folland, A course in abstract harmonic analysis. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1995.

[20] A.M. Garsia, Martingale inequalities: Seminar notes on recent progress. W. A. Benjamin, 1973, Mathematics Lecture Notes Series.

[21] J.A. Goldstein, Semigroups of linear operators and applications. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Univ. Press, 1985.

[22] Y. Gordon y D.R. Lewis, Absolutely summing operators and local unconditional structures. Acta Math. **133** (1974), 27-48.

[23] R.F. Gundy, A decomposition for L^1-bounded martingales. Ann. Math. Statist. **39** (1968), 134-138.

[24] U. Haagerup y M. Musat, The Effros-Ruan conjecture for bilinear forms on C^*-algebras. Invent. Math. **174** (2008), 139-163.

[25] A. Harcharras, Fourier analysis, Schur multipliers on S^p and non-commutative $\Lambda(p)$ sets. Studia Math. **137** (1999), 203-260.

[26] M. Junge, Doob's inequality for non-commutative martingales. J. reine angew. Math. **549** (2002), 149-190.

[27] M. Junge, Embedding of the operator space OH and the logarithmic 'little Grothendieck inequality'. Invent. Math. **161** (2005), 225-286.

[28] M. Junge, C. Le Merdy y Q. Xu, H^∞ functional calculus and square functions on noncommutative L^p-spaces. Asterisque **305**, 2006.

[29] M. Junge y T. Mei, Noncommutative Riesz transforms–A probabilistic approach. Preprint 2008.

[30] M. Junge, T. Mei y J. Parcet, Aspects of Calderón-Zygmund theopry for von Neumann algebras. En preparación.

[31] M. Junge y J. Parcet, The norm of sums of independent noncommutative random variables in $L_p(\ell_1)$. J. Funct. Anal. **221** (2005), 366-406.

[32] M. Junge y J. Parcet, Rosenthal's theorem for subspaces of noncommutatuve L_p. Duke Math. J. **141** (2008), 75-122.

[33] M. Junge y J. Parcet, Operator space embedding of Schatten p-classes into von Neumann algebra preduals. Geom. Funct. Anal. **18** (2008), 522-551.

[34] M. Junge y J. Parcet, Mixed-norm inequalities and operator space L_p embedding theory. Aperecerá en Mem. Amer. Math. Soc.

[35] M. Junge, J. Parcet y Q. Xu, Rosenthal type inequalities for free chaos. Ann. Probab. **35** (2007), 1374-1437.

[36] M. Junge y Q. Xu, Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities. Ann. Probab. **31** (2003), 948-995.

[37] M. Junge y Q. Xu, On the best constants in some non-commutative martingale inequalities. Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 243-253.

[38] M. Junge y Q. Xu, Noncomutative maximal ergodic theorems. J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 385-439.

[39] R.V. Kadison y J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I y II. Grad. Stud. Math. **15** y **16**, American Mathematical Society, 1997.

[40] H. Kosaki, Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra. J. Funct. Anal. **56** (1984), 29-78.

[41] E.C. Lance, Hilbert C*-modules. Cambridge University Press, 1995.

[42] F. Lust-Piquard, Inégalités de Khintchine dans C_p $(1 < p < \infty)$. C.R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), 289-292.

[43] F. Lust-Piquard y G. Pisier, Non-commutative Khintchine and Paley inequalities. Ark. Mat. **29** (1991), 241-260.

[44] A.C. McBride, Semigroups of linear operators: an introduction. Pitman Research Notes in Mathematical Series. Longman Scientific & Technical, 1987.

[45] T. Mei, Operator valued Hardy spaces. Mem. Amer. Math. Soc. **188** (2007).

[46] T. Mei, Tent spaces associated with semigroups of operators. J. Funct. Anal. **255** (2008), 3356-3406.

[47] T. Mei y J. Parcet, Pseudo-localization of singular integrals and noncommutative Littlewood-paley inequalities. Por aparecer en Int. Math. Res. Not.

[48] P.A. Meyer, Quantum Probability for Probabilists. Lecture Notes in Mathematics **1538**, 1995.

[49] A. Nou, Non injectivity of the q-deformed von Neumann algebra. Math. Ann. **330** (2004), 17-38.

[50] J. Parcet, Análisis armónico no conmutativo, probabilidad cuántica y espacios de operadores. Publicación del Centre de Recerca Matemática de Barcelona, 2006.

[51] J. Parcet, Weak type estimates associated to Burkholder's martingale inequality. Rev. Mat. Iberoamericana **23** (2007), 1011-1037.

[52] J. Parcet, Pseudo-localization of singular integrals and noncommutative Calderón-Zygmund theory. J. Funct. Anal. **256** (2009), 509-593.

[53] J. Parcet y G. Pisier, Non-commutative Khintchine type inequalities associated with free groups. Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 531-556.

[54] J. Parcet y N. Randrianantoanina, Gundy's decomposition for non-commutative martingales and applications. Proc. London Math. Soc. **93** (2006), 227-252.

[55] D. Pérez-García, M.M. Wolf, C. Palazuelos, I. Villanueva y M. Junge, Unbounded voilation of tripartite Bell inequalities. Comm. Math. Phys. **279** (2008), 455-486.

[56] M. Perrin, A noncommutative Davis' decomposition for martingales. Preprint 2009.

[57] G. Pisier, Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps. Astérisque (Soc. Math. France) **247** (1998), 1-111.

[58] G. Pisier, Introduction to Operator Space Theory. Cambridge University Press, 2003.

[59] G. Pisier y D. Shlyakhtenko, Grothendieck's theorem for operator spaces. Invent. Math. **150** (2002), 185-217.

[60] G. Pisier y Q. Xu, Non-commutative martingale inequalities. Comm. Math. Phys. **189** (1997), 667-698.

[61] G. Pisier y Q. Xu, Non-Commutative L_p-Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces II (Ed. W.B. Johnson y J. Lindenstrauss) North-Holland (2003), 1459-1517.

[62] D. Pollard, A user's guide to measure theoretical probability. Cambridge Univ. Press, 2002.

[63] N. Randrianantoanina, Non-commutative martingale transforms. J. Funct. Anal. **194** (2002), 181-212.

[64] N. Randrianantoanina, A weak type inequality for non-commutative martingales and applications. Proc. London Math. Soc. **91** (2005), 509-544.

[65] N. Randrianantoanina, Conditioned square functions for non-commutative martingales. Ann. Probab. **35** (2007), 1039-1070.

[66] E.M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1970.

[67] E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univesity Press, 1970.

[68] M. Takesaki, Tomita's theory of Modular Hilbert Algebras and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics **128**, Springer, 1970.

[69] M. Takesaki, Conditional expectations in von Neumann algebras. J. Func. Anal. **9** (1972), 306-321.

[70] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I. Springer, 1979.

[71] M. Terp, L_p spaces associated with von Neumann algebras. Math. Institute Copenhagen University, 1981.

[72] D.V. Voiculescu, K. Dykema y A. Nica, Free random variables. CRM Monograph Series **1**, American Mathematical Society, 1992.

[73] Q. Xu, Recent devepolment on non-commutative martingale inequalities. Functional Space Theory and its Applications. Proceedings of International Conference & 13th Academic Symposium in China. Ed. Research Information Ltd UK. Wuhan 2003, 283-314.

[74] Q. Xu, Operator-space Grothendieck inequalities for noncommutative L_p-spaces. Duke Math. J. **131** (2006), 525-574.