Notas sobre

Análisis Armónico No Conmutativo, Probabilidad Cuántica y Espacios de Operadores

Javier Parcet
Centre de Recerca Matemàtica

Enero de 2006

Parcialmente financiado por el "Programa Ramón y Cajal, 2005"
y por el Proyecto MTM2004-00678, Ministerio de Educación y Ciencia

Introducción

Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ esencialmente acotada, podemos representar dicha función como un operador acotado en $L_2(\Omega, \mu)$ determinado por $\Lambda_f : g \mapsto fg$. El proceso de sustituir funciones medibles por operadores lineales ha tenido un gran impacto en las matemáticas desde los orígenes de la Mecánica Cuántica. Así, la Teoría de Representaciones, las C*-álgebras y las álgebras de von Neumann, la Geometría No Conmutativa, la Probabilidad Cuántica y la Probabilidad Libre o los Espacios de Operadores nacen de este proceso tan fértil conocido como cuantización. La característica común a todas estas teorías es la no conmutatividad del producto o composición de operadores. De este modo, se obtienen generalizaciones no conmutativas de teorías clásicas tales como la Teoría de Caracteres, la Teoría de la Medida, la Geometría Diferencial, la Probabilidad o los Espacios de Banach.

El Análisis Armónico No Conmutativo se ha identificado históricamente con el Análisis Armónico Abstracto sobre grupos topológicos no conmutativos. En pocas palabras, el estudio de la transformada de Fourier/representaciones unitarias sobre tales grupos. No obstante, esta teoría se ha desarrollado espectacularmente en los últimos años y aborda hoy en día problemas mucho más generales. Con objeto de poner dicho desarrollo en contexto, debemos rescatar las importantes conexiones entre Análisis Armónico, Probabilidad y Espacios de Banach, establecidas en los años 70 y 80. Las desigualdades de Burkholder/Gundy para martingalas, el teorema de dualidad de Fefferman, la teoría de tipo y cotipo de Maurey/Pisier o los resultados de Rosenthal ilustran dicha interacción. Muchos de estos resultados ya han sido generalizados al contexto no conmutativo y dan forma a una nueva interpretación del Análisis Armónico No Conmutativo. Destacamos el estudio de multiplicadores de Fourier/Schur, sumas de variables aleatorias independientes, desigualdades de martingalas, procesos p-estables, descomposiciones de tipo Calderón-Zygmund o incluso teoremas ergódicos maximales. Este significativo desarrollo, que se basa en la *cuantización* de Análisis Armónico, Probabilidad y Geometría de Espacios de Banach, ha sido posible gracias a la aparición y rápido desarrollo de nuevas y profundas teorías como la Probabilidad Libre o los Espacios de Operadores. El objetivo de estas notas es hacer un esbozo del estado actual de la teoría sin ánimo de completitud y orientadas a un lector sin experiencia en el área.

El Análisis Armónico No Conmutativo está motivado por diversos campos como la Geometría No Conmutativa o la Física Matemática. En todo caso, una de nuestras motivaciones originales proviene del Análisis Armónico Abstracto. Puesto que dicha disciplina no será tratada en estas notas, hemos decidido que ese sea nuestro punto de partida en la Introducción. Sea $\mathbb{G}$ un grupo compacto equipado con una medida de Haar μ normalizada por $\mu(\mathbb{G}) = 1$. Dada una función $f : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ en $L_1(\mathbb{G}, \mu)$ y dada una representación $\pi : \mathbb{G} \to U(\mathcal{H}_\pi)$ unitaria e irreducible, se define el π-ésimo coeficiente de Fourier de f como

$$\widehat{f}(\pi) = \int_{\mathbb{G}} f(g)\pi(g)^* \, d\mu(g) \in M_{d_\pi},$$

donde $d_\pi = \dim \mathcal{H}_\pi$ y M_{d_π} es el álgebra de matrices $d_\pi \times d_\pi$. Nótese que d_π es siempre 1 y que π es un carácter cuando $\mathbb{G}$ es abeliano. Más concretamente, para $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ se tiene que μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y $\pi_n(x) = \exp(2\pi inx)$. El objeto dual $\widehat{\mathbb{G}}$ es el conjunto de las representaciones irreducibles $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ (modulo equivalencia unitaria) y le asociamos el álgebra de von Neumann

$$\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}} = \bigoplus_{\pi \in \widehat{\mathbb{G}}} M_{d_\pi}.$$

En este contexto y gracias Kunze [Ku], la desigualdad de Hausdorff-Young sigue teniendo validez y dado $1 \leq p \leq 2$ el operador transformada de Fourier toma la forma

$$\mathcal{F}_{\mathbb{G}} : f \in L_p(\mathbb{G}, \mu) \mapsto \big(\widehat{f}(\pi)\big)_{\pi \in \widehat{\mathbb{G}}} \in L_{p'}(\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}}, \tau)$$

donde la traza τ en $\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}}$ está determinada por el Teorema de Peter-Weyl

$$\tau\Big(\big(A_\pi\big)_{\pi \in \widehat{\mathbb{G}}}\Big) = \sum_{\pi \in \widehat{\mathbb{G}}} d_\pi \mathrm{tr}(A_\pi).$$

El espacio $L_p(\mathbb{G}, \mu)$ es un espacio L_p clásico o conmutativo. Dicho de otro modo, el álgebra de von Neumann $\mathcal{M}_{\mathbb{G}} = L_\infty(\mathbb{G}, \mu)$ (que sea incluye en $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{G}, \mu))$ vía $f \mapsto \Lambda_f$) es abeliana. Por otro lado, dado que $\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}}$ es un álgebra de von Neumann no conmutativa, $L_p(\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}}, \tau)$ es un espacio L_p no conmutativo. En otras palabras, cuando $\mathbb{G}$ es un grupo compacto no conmutativo, la transformada de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{G}}$ se puede considerar como un operador semi-conmutativo. El operador anterior motiva la pregunta de si existe un operador *puramente no conmutativo* que responda a una situación *natural.* En estas notas encontraremos varios casos que justifican un estudio generalizado de dichos operadores. Es en ese contexto en el que se engloba la noción de Análisis Armónico No Conmutativo que aquí desarrollamos. Comenzamos dando un ejemplo de un tal operador (entre espacios L_p no conmutativos) que se deriva de nuestra discusión de forma natural. Recordamos que $\widehat{\mathbb{G}}$ tiene estructura de grupo cuando $\mathbb{G}$ es abeliano y que esto da lugar al teorema de dualidad de Pontjragin, una forma de generalizar el teorema de inversión de Fourier. Por el contrario, en el contexto no conmutativo, no es posible construir una teoría de dualidad adecuada dentro de la categoría de grupos topológicos. Este problema fue resuelto independientemente por Enock/Schwartz y Kac/Vajnermann en los años 70 sustituyendo los grupos por la categoría (más grande) de álgebras de Kac. Las álgebras de Kac [ES] son álgebras de von Neumann con ciertas propiedades añadidas y proporcionan un operador de transformada de Fourier de la forma

$$\mathcal{F}_{\mathcal{M}} : L_p(\mathcal{M}, \tau) \to L_{p'}(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\tau}).$$

Aquí $\mathcal{M}$ es un álgebra de Kac y $\widehat{\mathcal{M}}$ es el álgebra de Kac dual. Dado un grupo localmente compacto $\mathbb{G}$, casos particulares de álgebras de Kac son las álgebras de von Neumann $\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ y $\mathcal{M}_{\widehat{\mathbb{G}}}$, que son duales entre sí. En tal caso, hemos visto que una de las álgebras es conmutativa y la otra no. Existen no obstante multitud de casos, como el de los *grupos cuánticos*, en los que ambas álgebras de von Neumann son no conmutativas. Esta es una motivación para estudiar operadores entre espacios L_p no conmutativos y el Análisis Armónico que se deriva de ello.

Aunque la transformada de Fourier sobre grupos topológicos o cuánticos es una de nuestras motivaciones, hemos preferido cubrir en estas notas otra línea mucho más reciente de la teoría. Concretamente, estudiaremos recientes generalizaciones al contexto no conmutativo de las principales desigualdades L_p para variables aleatorias en Análisis Armónico. Nos referimos a la desigualdad de Khintchine para funciones de Rademacher; a la de Rosenthal para variables aleatorias independientes y la correspondiente generalización de Burkholder para diferencias de martingalas; a las desigualdades maximales de Doob y el análisis de la función cuadrado de Burkholder y Gundy, etc... Además estudiaremos el significado de dichas desigualdades en el contexto de la Probabilidad Libre, una teoría puramente no conmutativa que maneja una *nueva* noción de independencia con fuertes implicaciones en Análisis Armónico y Algebra de Operadores. Por último incluimos una versión no conmutativa de la descomposición de Gundy (el contrapunto probabilístico de la descomposición de Calderón-Zygmund) así como aplicaciones a la teoría clásica.

Además de por inclinación personal, hemos elegido exponer estos resultados por dos motivos. El primero es que esta disciplina ilustra las similitudes y diferencias entre el contexto clásico y el no conmutativo mejor que ninguna otra. El segundo es que constituye la antesala de la teoría de Calderón-Zygmund no conmutativa, uno de los *agujeros* más notables del Análisis Armónico No Conmutativo. Comenzamos en la Sección 1 con una exposición autocontenida de espacios L_p no conmutativos, esenciales en el desarrollo de la teoría. La Sección 2 contiene las desigualdades de tipo Khintchine y Rosenthal no conmutativas, así como múltiples generalizaciones en el contexto de las variables aleatorias libres. En la Sección 3 recogemos todo lo relacionado con las desigualdades de martingalas no conmutativas. Al final de cada sección incluimos un apartado dedicado a revisar rápidamente los resultados recientes, aplicaciones y problemas abiertos más relevantes en la teoría.

Estas notas han sido escritas en la preparación de varias conferencias que han tenido lugar en la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad de Sevilla y la Universidad de Barcelona/Universidad Autónoma de Barcelona entre los años 2005 y 2006. Puesto que pretendo revisar estas notas en unos meses, agradeceré a todos sus lectores cualquier comentario o sugerencia.

1 Espacios L_p no conmutativos

Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach dotado de una multiplicación respecto de la cual $\|x_1x_2\| \leq \|x_1\|\|x_2\|$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Una involución $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un anti-automorfismo de orden 2. En otras palabras, se tiene que

$$(x_1 + x_2)^* = x_1^* + x_2^*, \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \quad (x_1x_2)^* = x_2^* x_1^*, \quad x^{**} = x.$$

Una C***-álgebra** $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad $\mathbf{1}$ y equipada con una involución $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisface $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Dado Ω un espacio topológico compacto y Hausdorff, el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de las funciones continuas $f: \Omega \to \mathbb{C}$ forma una C*-álgebra conmutativa con la suma y producto puntuales y la involución dada por la conjugación $f \mapsto \overline{f}$. De hecho, toda C*-álgebra conmutativa es de la forma $\mathcal{C}(\Omega)$ para cierto espacio compacto y Hausdorff Ω, véase [KR1]. De este modo, la teoría de C*-álgebras constituye una generalización no conmutativa de los espacios de tipo $\mathcal{C}(\Omega)$. Por otro lado, debido al teorema de Gelfand-Naimark-Segal sabemos que toda C*-álgebra es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales y acotados en cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Esta inclusión es altamente no canónica. No obstante, en el caso en que $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\Omega)$ y Ω viene equipado con una σ-álgebra y una medida μ, es *natural* escoger $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$ puesto que en ese caso $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ se identifica con el multiplicador $\Lambda_f : g \mapsto fg$ en $L_2(\Omega, \mu)$.

A partir de aquí, la extensión no conmutativa de la Teoría de la Medida e Integración aparece de manera natural. Efectivamente, en primer lugar observamos que existe una relación biunívoca entre conjuntos medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y funciones características de $L_\infty(\Omega, \mu)$. Seguidamente notamos que toda función característica χ_A de un conjunto medible A puede aproximarse por funciones continuas en la topología débil de operadores. Dicho de otro modo, se tiene que

$$\int_\mathsf{A} g(\omega)\overline{h(\omega)}\, d\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)g(\omega)\overline{h(\omega)}\, d\mu(\omega)$$

para cierta sucesión $f_1, f_2, \ldots$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ y cualesquiera $g, h \in L_2(\Omega, \mu)$. En otras palabras, el espacio $L_\infty(\Omega, \mu)$ caracteriza al espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y resulta ser el cierre de $\mathcal{C}(\Omega)$ en la topología débil de operadores. En vista de las observaciones anteriores, concluimos que la estructura no conmutativa que generaliza a los espacios de medida es el 'cierre débil de las C*-álgebras'. No obstante, esa es la definición de **álgebra de von Neumann**. Así, la Teoría de Algebras de von Neumann resulta ser el instrumento adecuado para cuantizar la Teoría de la Medida. De hecho, al igual que ocurre para C*-álgebras, toda álgebra de von Neumann conmutativa tiene la forma $L_\infty(\Omega, \mu)$ para cierto espacio de medida.

El estudio de espacios L_p sobre álgebras de von Neumann generales o *espacios L_p no conmutativos* fue iniciado en los años 50 por Schatten, Segal, Dixmier y Kunze entre otros. Hoy en día constituyen una herramienta fundamental en muchas ramas de las matemáticas. Una de nuestras referencias fundamentales será la excelente exposición de Pisier y Xu en [PX2].

1.1 Espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$

Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann. Por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal sabemos que $\mathcal{M}$ es una w^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El **cono positivo** de $\mathcal{M}$ se define como

$$\mathcal{M}_+ = \Big\{ x^* x \;\big|\; x \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Una **traza** en $\mathcal{M}$ es un funcional lineal $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$

- Tracial: $\tau(ab) = \tau(ba)$ para $a, b \in \mathcal{M}$.
- Positivo: $\tau : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, i.e. $\tau(x^* x) \geq 0$ para $x \in \mathcal{M}$.

Decimos que la traza es

- Fiel: Si $x \in \mathcal{M}_+$ y $\tau(x) = 0$ entonces $x = 0$.
- Normal: $\sup_\alpha \tau(x_\alpha) = \tau(\sup_\alpha x_\alpha)$ para $(x_\alpha) \subset \mathcal{M}_+$ creciente y acotada.
- Semifinita: Para todo $a \in \mathcal{M}_+$ no nulo, existe $0 < b \leq a$ tal que $\tau(b) < \infty$.

Al igual que en el contexto conmutativo, estas últimas propiedades son necesarias en muchos resultados. En lo que sigue escribiremos que τ es una traza *n.s.f.* para denotar que satisface dichas propiedades. Un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se llama **semifinita** cuando admite una traza *n.s.f.* En el caso general, siempre podemos considerar **pesos** *n.s.f.* $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ (i.e. funcionales positivos *no traciales*). Esto complica considerablemente las cosas pues hace necesario el uso de la Teoría Modular de Tomita-Takesaki [KR2, Ta1]. Un **espacio de medida no conmutativo** es un par $(\mathcal{M}, \psi)$ formado por un álgebra de von Neumann equipada con un peso *n.s.f.* no necesariamente tracial. Un tal espacio de medida se llama **finito** cuando $\psi(\mathbf{1}) < \infty$ para el operador identidad $\mathbf{1}$ en $\mathcal{M}$. En este caso se suele normalizar el peso por la condición $\psi(\mathbf{1}) = 1$. Los pesos normalizados se llaman **estados**, que denotaremos habitualmente con las letras φ y ϕ. Todo par $(\mathcal{M}, \varphi)$ formado por un álgebra de von Neumann y un estado *n.f.* (normal y fiel) no necesariamente tracial es un **espacio de probabilidad no conmutativo** o **cuántico**. En Probabilidad Cuántica es habitual hablar de estados traciales y no traciales para denotar que, independientemente de la existencia o no de una traza, trabajamos sobre un espacio de probabilidad.

Construimos ahora los espacios L_p no conmutativos. Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann semifinita, equipada con una traza *n.s.f.* τ e isométricamente incluida en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dado $x \in \mathcal{M}_+$, definimos la **proyección soporte** de x como la proyección ortogonal $p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con rango más pequeño que satisface $px = x = xp$ (la segunda igualdad se sigue de la primera tomando adjuntos). Esta definición se puede justificar pensando que la proyección soporte de una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ en $L_\infty(\Omega, \mu)$ es la función característica del soporte de f (dicha función característica es un proyector en $L_2(\Omega, \mu)$ cuando actúa como multiplicador). Escribimos $\operatorname{supp} x$ para denotar a la proyección soporte de x. Definimos entonces

$$\mathcal{S}_+ = \Big\{ x \in \mathcal{M}_+ \;\big|\; \tau(\operatorname{supp} x) < \infty \Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \operatorname{span} \mathcal{S}_+.$$

Por otro lado, dado $x \in \mathcal{M}$ definimos el **módulo** de x como

$$|x| = (x^* x)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilizando la medida espectral $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de $|x|$ podemos definir

$$|x|^p = \int_{\mathbb{R}_+} s^p \, d\gamma(s) \quad \text{para} \quad 0 < p < \infty.$$

Resulta entonces que

$$x \in \mathcal{S} \Rightarrow |x|^p \in \mathcal{S}_+ \Rightarrow \tau(|x|^p) < \infty.$$

Definimos a continuación

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Se puede demostrar que $\| \ \|_p$ es una norma en $\mathcal{S}$ si $1 \leq p < \infty$ y una p-norma si $0 < p < 1$. Utilizando que $\mathcal{S}$ es una $*$-subálgebra w^*-densa en $\mathcal{M}$, definimos el **espacio L_p no conmutativo** asociado a $(\mathcal{M}, \tau)$ y escribimos $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ como la completación de $(\mathcal{S}, \| \ \|_p)$. Por otro lado, debido a nuestra discusión inicial es natural definir $L_\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ equipado con la norma de operadores.

Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y un exponente finito $0 < p < \infty$, es bien conocido que $L_p(\Omega, \mu)$ se define como el espacio de funciones μ-medibles (modulo conjuntos de μ-medida 0) que son p-integrables respecto de μ. En el contexto no conmutativo es importante saber como generalizar la noción de μ-medibilidad. Si $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert donde $\mathcal{M}$ actúa, un operador x cerrado y densamente definido en $\mathcal{H}$ se dice que está **afiliado** con $\mathcal{M}$ si $xu = ux$ para todo operador unitario u en el conmutador

$$\mathcal{M}' = \Big\{ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ \big| \ xy = yx \text{ para todo } x \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Observamos que $\mathcal{M}$ satisface $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ y que esta es una forma de caracterizar a las álgebras de von Neumann [KR1] debido al Teorema del Biconmutador de von Neumann. Por consiguiente, todo $x \in \mathcal{M}$ está afiliado con $\mathcal{M}$ pero el recíproco no es cierto pues no exigimos que los operadores afiliados sean acotados. Sea $\mathcal{A}\!\mathit{ff}_{\mathcal{M}}$ el espacio de operadores afiliados con $\mathcal{M}$. Dado $x \in \mathcal{A}\!\mathit{ff}_{\mathcal{M}}$, consideramos la medida espectral γ de $|x|$ y decimos que x es **τ-medible** cuando existe $\lambda > 0$ tal que

$$\tau\Big(\int_\lambda^\infty d\gamma(s) \Big) < \infty.$$

La integral de arriba denota la resolución espectral de $|x|$ correspondiente a la función característica de (λ, ∞). Si $L_0(\mathcal{M}, \tau)$ es el espacio de operadores τ-medibles, obtenemos la esperada caracterización de $L_p(\mathcal{M}, \tau)$

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \Big\{ x \in L_0(\mathcal{M}, \tau) \ \big| \ \tau(|x|^p) < \infty \Big\}. \tag{1.1}$$

Observación 1.1 Es importante observar que la relación de equivalencia 'modulo conjuntos de medida cero' no es aquí necesaria puesto que nuestra identificación de Ω con $L_\infty(\Omega,\mu)$ ya ha establecido la equivalencia con anterioridad. En el caso de $L_\infty(\mathcal{M},\tau)$, la caracterización (1.1) asegura que $\mathcal{M}$ es el espacio de los operadores que son τ-medibles y acotados, como se sigue de las definiciones. En los espacios $L_p(\mathcal{M},\tau)$ con p finito pueden aparecer operadores no acotados densamente definidos, del mismo modo que en $L_p(\Omega,\mu)$ existen funciones no acotadas. Este fenómeno no ocurre cuando toda función μ-medible es acotada. Los espacios de medida clásicos que cumplen dicha propiedad son los completamente atómicos, que dan lugar a los espacios ℓ_p. En el contexto no conmutativo, la generalización natural de los espacios ℓ_p la encontramos en las clases de Schatten S_p, definidas más abajo. Dichas clases se definen sobre el álgebra $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\ell_2)$, la cual satisface $\mathcal{M} = L_0(\mathcal{M}, \mathrm{tr})$ donde tr denota la traza habitual en $\mathcal{B}(\ell_2)$.

Muchas propiedades fundamentales de los espacios L_p clásicos o conmutativos se extienden de forma natural a este contexto. Las propiedades más relevantes que se conservan son las siguientes:

- La traza τ se extiende a un funcional continuo en $L_1(\mathcal{M},\tau): \ |\tau(x)| \le \|x\|_1$.
- **Desigualdad de Hölder.** Dados tres exponentes $0 < p,q,r \le \infty$ tales que $1/r = 1/p + 1/q$ y dados dos operadores $x \in L_p(\mathcal{M},\tau)$ e $y \in L_q(\mathcal{M},\tau)$ se tiene la desigualdad de Hölder $\|xy\|_r \le \|x\|_p \|y\|_q$.
- **Dualidad.** Cuando $r = 1$, se tiene que $1/p + 1/q = 1$ y la desigualdad de Hölder proporciona un producto de dualidad $\langle x,y\rangle = \tau(xy)$ entre $L_p(\mathcal{M},\tau)$ y $L_q(\mathcal{M},\tau)$. Es decir, $L_p(\mathcal{M},\tau)^* = L_q(\mathcal{M},\tau)$ isométricamente para $1 \le p < \infty$.
- **Interpolación compleja.** $L_p(\mathcal{M},\tau)$ es isométricamente isomorfo al espacio de interpolación $\big[L_{p_0}(\mathcal{M},\tau), L_{p_1}(\mathcal{M},\tau)\big]_\theta$ para $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Los espacios $L_p(\mathcal{M},\tau)$ también se comportan bien respecto del método real de interpolación, véase [PX2] para más detalles.

Observación 1.2 Todavía no hemos definido los espacios L_p sobre álgebras de von Neumann no semifinitas, para las cuales no existe una traza *n.s.f.* como hemos estado asumiendo hasta ahora. Dichos espacios se conocen como *espacios L_p de Haagerup* y su construcción se revisa en el Apéndice B. En estas notas existen algunos resultados que se pueden/deben formular con este grado de generalidad. No obstante, intentaremos evitar tecnicismos innecesarios.

Damos ahora algunos ejemplos básicos de espacios $L_p(\mathcal{M},\tau)$:

(a) **Espacios L_p conmutativos.** Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann semifinita y abeliana. Entonces existe un espacio de medida semifinito $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ para el que se tiene $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega,\mu)$ y $L_p(\mathcal{M},\tau) = L_p(\Omega,\mu)$ con la traza *n.s.f.* τ determinada por la relación

$$\tau(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

(b) Espacios L_p semi-conmutativos. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, consideramos el álgebra de von Neumann $\mathcal{N}_1 = L_\infty(\Omega, \mu)$ equipada con la traza *n.s.f.* dada por $\nu_1 = \int_\Omega \cdot \, d\mu$. Sea $(\mathcal{N}_2, \nu_2)$ otro espacio de medida no conmutativo y semifinito. Es decir, un par formado por un álgebra de von Neumann semifinita equipada con una traza *n.s.f.* Entonces consideramos el par

$$(\mathcal{M}, \tau) = \big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big) = \Big(L_\infty(\Omega, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big).$$

Esto da lugar a

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p\Big(\Omega, \mu; L_p(\mathcal{N}_2, \nu_2)\Big).$$

La última expresión responde a la construcción bien conocida de espacios L_p vectoriales debida a Bochner. En particular, aunque $\mathcal{M}$ es claramente no conmutativa, en este caso $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ se puede interpretar como un espacio L_p conmutativo con valores vectoriales.

(c) Clases de Schatten. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de todos los operadores lineales y acotados en cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Tomamos entonces la traza *n.s.f.* habitual en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es decir, $\tau = \mathrm{tr}$ está dada por

$$\mathrm{tr}(x) = \sum_{\psi \in \Psi} \big\langle x\psi, \psi \big\rangle_{\mathcal{H}},$$

donde $\langle \ , \ \rangle_{\mathcal{H}}$ es el producto interior de $\mathcal{H}$ y Ψ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. De hecho, se puede comprobar que la definición de tr no depende de la base ortonormal elegida. Entonces, el espacio L_p asociado $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ es la clase de Schatten $S_p(\mathcal{H})$. Cuando $\mathcal{H}$ es un espacio separable e infinito-dimensional la clase de Schatten se escribe S_p mientras que $S_p(n)$ denota la clase de Schatten asociada al espacio de Hilbert $\ell_2(n)$. S_p y $S_p(n)$ proporcionan generalizaciones no conmutativas de ℓ_p y $\ell_p(n)$. Además ℓ_p se identifica isométricamente con la diagonal principal de S_p. Nótese que en nuestra notación $S_\infty(\mathcal{H})$ no es el ideal de los operadores compactos en $\mathcal{H}$, sino $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ propiamente. El lector puede acudir a [Si] para profundizar en las propiedades de estos espacios.

(d) Productos tensoriales. Dados dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ definimos $\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2$ como el producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ equipado con el producto interior

$$\Big\langle \sum\nolimits_j \lambda_j \, u_{1j} \otimes u_{2j}, \sum\nolimits_k \xi_k \, v_{1k} \otimes v_{2k} \Big\rangle = \sum\nolimits_{j,k} \lambda_j \bar{\xi}_k \, \langle u_{1j}, v_{1k} \rangle \langle u_{2j}, v_{2k} \rangle.$$

Dadas álgebras de von Neumann $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ actuando sobre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, su producto tensorial algebraico $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ es la subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2)$ generada por los tensores simples $x_1 \otimes x_2$. El cierre débil de $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ es un álgebra de von Neumann y se denota por $\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2$. De forma similar, si ν_1 y ν_2 son trazas *n.s.f.* en $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$, determinamos la traza $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ sobre $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2$ por su acción sobre los tensores simples $x_1 \otimes x_2$

$$\tau\big(x_1 \otimes x_2\big) = \nu_1(x_1)\nu_2(x_2).$$

Esto da lugar a los espacios

$$L_p(\mathcal{M},\tau) = L_p\big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big).$$

Análogamente se construyen los productos tensoriales infinitos

$$(\mathcal{M},\tau) = \overline{\bigotimes_{n\geq 1}} (\mathcal{M}_n, \tau_n).$$

(e) Factor hiperfinito II$_1$. Sea M_n el álgebra de matrices $n \times n$ equipada con la traza normalizada $\sigma_n = \frac{1}{n}\mathrm{tr}$. De este modo y como hemos señalado antes, (M_n, σ_n) se puede considerar como un espacio de probabilidad cuantizado o no conmutativo. Definimos entones el factor hiperfinito II$_1$ como

$$(\mathcal{R},\tau) = \overline{\bigotimes_{n\geq 1}} (\mathcal{M}_n, \tau_n) \quad \text{con} \quad (\mathcal{M}_n, \tau_n) = (M_2, \sigma_2) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

$\mathcal{R}$ es un álgebra de von Neumann y τ es la única traza normalizada en $\mathcal{R}$, de manera que $\mathcal{R}$ vuelve a ser un espacio de probabilidad no conmutativo. Además, cualquier par de variables aleatorias no conmutativas (i.e. operadores en $L_1(\mathcal{R},\tau)$) soportadas en dos factores distintos del producto tensorial se llaman *independientes*. Esto generaliza una propiedad bien conocida de la probabilidad clásica. De hecho, $\mathcal{R}$ es el análogo no conmutativo del espacio de probabilidad

$$\Omega = \big\{-1, +1\big\}^{\mathbb{N}}$$

equipado con la medida de probabilidad usual $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Así, una manera jocosa de interpretar el factor hiperfinito II$_1$ es como el espacio muestral de *lanzar infinitas veces una moneda cuántica*!

$\mathcal{R}$ aparece en muchas situaciones de forma natural. La siguiente construcción también conduce al factor hiperfinito II$_1$. Consideramos una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de operadores unitarios y autoadjuntos en cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que satisfacen las *relaciones canónicas de anticonmutación*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon_j \varepsilon_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}.$$

Definimos $\mathcal{R}_0$ como la C*-álgebra generada por los ε_n's. Entonces $\mathcal{R}_0$ admite una única traza normalizada τ que se define como sigue. Para todo conjunto finito $\mathcal{J} = \big\{j_1, j_2, \ldots, j_n\big\}$ de $\mathbb{N}$ con $j_1 < \cdots < j_n$ escribimos $w_{\mathcal{J}} = \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n}$ y $w_\emptyset = \mathbf{1}$. Entonces τ está completamente determinada por su acción en los $w_{\mathcal{J}}$'s, que a su vez está dada por

$$\tau(w_{\mathcal{J}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{J} = \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En tal caso consideramos a $\mathcal{R}_0$ como una C*-álgebra actuando sobre $L_2(\mathcal{R}_0,\tau)$ y $\mathcal{R}$ resulta isomorfo al cierre débil de $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{B}(L_2(\mathcal{R}_0,\tau))$. Nótese que la familia de los $w_{\mathcal{J}}$'s es w^*-densa en $\mathcal{R}$ y densa en norma en $L_p(\mathcal{R},\tau)$ para $0 < p < \infty$. Además dicha familia es claramente una base ortonormal de $L_2(\mathcal{R},\tau) = L_2(\mathcal{R}_0,\tau)$. Por último, cabe mencionar que la subálgebra de von Neumann generada por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ es isomorfa a M_{2^n} equipada con la traza normalizada σ_{2^n}. El lector puede acudir a [BR] para más información.

Para concluir, el nombre *factor hiperfinito* II_1 nos lleva a introducir cierta terminología. Sin mucho rigor, un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se llama **hiperfinita** cuando se puede aproximar en la topología débil de operadores como límite directo de una red de álgebras de von Neumann de dimensión finita. $\mathcal{M}$ se dice que es un **factor** cuando su centro es el espacio $\mathbb{C}\mathbf{1}$ generado por la identidad $\mathbf{1}$ de $\mathcal{M}$. Por último, un factor es de **tipo** $\mathbf{II}_1$ cuando no posee proyecciones minimales (eso descarta el tipo I), es semifinito (i.e. existe una traza *n.s.f.*, eso descarta el tipo III) y la traza es finita (sino tendríamos un factor II_∞). Para más información véase [Bi].

(f) Algebras de von Neumann de grupos discretos. Dado $\mathbb{G}$ un grupo discreto, escribimos $\lambda : \mathbb{G} \to \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{G}))$ para referirnos a la representación regular a la izquierda, determinada por la acción $\lambda(g)(\delta_h) = \delta_{gh}$ donde $(\delta_g)_{g\in\mathbb{G}}$ denota la base canónica de $\ell_2(\mathbb{G})$. La C*-álgebra generada en $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{G}))$ por $\lambda(\mathbb{G})$ se llama la C**-álgebra reducida de* $\mathbb{G}$ y se denota por $\mathrm{C}^*_\lambda(\mathbb{G})$. Su cierre débil $\lambda(\mathbb{G})''$ es un álgebra de von Neumann que se llama el álgebra de von Neumann del grupo $\mathbb{G}$ y habitualmente se denota por $\mathsf{vN}(\mathbb{G})$. La traza canónica $\tau_{\mathbb{G}} : \mathsf{vN}(\mathbb{G}) \to \mathbb{C}$ se define como sigue

$$\tau_{\mathbb{G}}(x) = \big\langle x(\delta_e), \delta_e \big\rangle_{\ell_2(\mathbb{G})}, \tag{1.2}$$

donde e denota el elemento neutro de $\mathbb{G}$. Esto proporciona una traza *n.s.f.* (de hecho finita con masa total 1) en $\mathsf{vN}(\mathbb{G})$. Un caso particularmente interesante y con muchas aplicaciones en Análisis Armónico se da con $\mathbb{G} = \mathbb{F}_n$, el grupo libre con n generadores. El lector puede acudir a [FP] para más información en Análisis Armónico sobre grupos libres.

(g) Productos libres. Una generalización natural del álgebra de von Neumann del grupo libre $\mathbb{F}_n$ es el producto libre de álgebras de von Neumann. Aunque no vamos a explicar aquí (véase la Sección 2) la construcción del producto libre de álgebras de von Neumann [VDN], podemos al menos discutir algunos aspectos. Consideramos una familia $(\mathsf{A}_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$ de espacios de probabilidad no conmutativos (álgebras de von Neumann con estados no necesariamente traciales). Entonces el producto libre

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{n\geq 1} (\mathsf{A}_n, \varphi_n)$$

admite una descripción similar a la de los grupos libres en términos de *palabras* y *letras*. Es decir, $\mathcal{A}$ está generada por $\mathbf{1}$ y todas las palabras $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ con $m \geq 1$, $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_m$ y donde las letras $x_{j_k} \in \mathsf{A}_{j_k}$ tienen media 0

$$\varphi_{j_k}(x_{j_k}) = 0.$$

Es más, cuando $(\mathsf{A}_n, \varphi_n) = \big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n}\big)$ se tiene que

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{n\geq 1}\big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n}\big) = \big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}), \tau_{\mathbb{G}}\big) \tag{1.3}$$

donde $\mathbb{G}$ es el producto libre de grupos

$$\mathbb{G} = \bigstar_{n\geq 1}\mathbb{G}_n.$$

El lector puede acudir a [VDN] o a la Sección 2 más abajo para más detalles.

(h) **Algebras de von Neumann q-deformadas.** Véase [BKS, No, Xu1].

Concluimos este apartado mencionando ciertas *patologías* que poseen los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y que no aparecen entre los espacios clásicos de funciones. Esta situación fuerza en muchas ocasiones a desarrollar nuevas técnicas para extender resultados clásicos al contexto no conmutativo:

(a) En primer lugar, la *desigualdad triangular* usual para el módulo de funciones deja de tener validez para el módulo de operadores. Es decir, en general no se tiene $|x+y| \leq |x| + |y|$ para $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. No obstante, existe un substituto [AAP] que asegura que para todo $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existen isometrías u y v en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

$$|x+y| \leq u|x|u^* + v|y|v^*.$$

(b) La segunda patología tiene que ver con la *monotonía de funciones*. Dado α un número real positivo y dados $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $x \leq y$, en general no se tiene que $x^\alpha \leq y^\alpha$. En el caso no conmutativo esta implicación sólo se cumple para exponentes $0 < \alpha \leq 1$. Esta segunda patología tiene que ver con la convexidad/concavidad de la función $x \mapsto x^\alpha$ en el cono positivo $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$. Para $\alpha < 1$ obtenemos una función cóncava, pero para $\alpha \geq 1$ la convexidad sólo se da para $1 \leq \alpha \leq 2$.

(c) Otra diferencia fundamental con los espacios clásicos reside en la existencia o no de *bases incondicionales*. En 1970 Kwapień y Pelczynski probaron que la clase de Schatten S_1 no puede ser isomorfa a ningún subespacio de un espacio de Banach con una base incondicional, no así ℓ_1. Pero el resultado más impactante se debe a Gordon y Lewis [GL], que probaron que S_p no tiene una base incondicional para $p \neq 2$, en total contraste con lo que ocurre para ℓ_p o $L_p(\Omega, \mu)$. Citando a Pisier y Xu en [PX2], este resultado negativo muestra que S_p y en general $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ para $\mathcal{M}$ no abeliana son en cierto sentido 'muy no conmutativos'. En la Sección 4 de [PX2] existe un análisis más detallado de los resultados de Gordon y Lewis. Una de las consecuencias que nos llaman la atención de la incondicionalidad de S_p es la dificultad añadida que hay de los multiplicadores de Fourier en $L_p(\Omega, \mu)$/conjuntos $\Lambda(p)$ [Bo] a los multiplicadores de Schur/conjuntos $\sigma(p)$ [Hr].

(d) Por último, una lacra de $L_p(\mathcal{M},\tau)$ con gran impacto en Análisis Armónico es la imposibilidad de construir *operadores maximales* ad hoc. Esto se debe a que la cuantización (identificación de funciones con operadores lineales) nos hace perder las nociones de *función* o *punto* y trabajamos sólo con operadores. En particular, esto imposibilita definir funciones maximales como se hace en el contexto clásico, cuya definición tiene una naturaleza puntual. Este problema se resuelve gracias a una ingeniosa construcción de Junge [Ju2] utilizando técnicas de la teoría vectorial de Pisier [Pi2] y que explicaremos más adelante al tratar el maximal de Doob no conmutativo.

(e) Otras patologías interesantes se pueden encontrar en la Sección 4 de [PX2].

1.2 Espacios $L_{p,q}(\mathcal{M},\tau)$

Los espacios más relevantes que se desprenden de la construcción de los espacios L_p clásicos son los espacios de Lorentz y de Bochner. En este apartado y en el siguiente estudiamos las generalizaciones no conmutativas de estos espacios. Si escribimos $L_0(\mathcal{M},\tau)$ para referirnos al espacio de los operadores τ-medibles, $x \in L_0(\mathcal{M},\tau)$ y $\lambda > 0$, denotamos por $\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)$ a la resolución espectral de $|x|$ correspondiente a la función característica de (λ,∞). Es decir, si $\gamma : \mathbb{R}_+ \to L_0(\mathcal{M},\tau)$ es la medida espectral de $|x|$, se tiene

$$\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|) = \int_{\mathbb{R}_+} \chi_{(\lambda,\infty)}(s)\, d\gamma(s).$$

Los **números singulares generalizados** de x se definen como

$$\mu_t(x) = \inf \Big\{ \lambda > 0 \;\big|\; \tau\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)\big) \le t \Big\} \quad \text{para} \quad t > 0.$$

La función $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t(x) \in \mathbb{R}_+$ es continua por la derecha, no decreciente y constituye el análogo no conmutativo de la *función reordenada*, véase [FK] para más detalles. Sea X un espacio invariante por reordenamiento [BS] sobre el intervalo $[0,\tau(\mathbf{1}))$. Definimos el **espacio simétrico no conmutativo**

$$\mathrm{X}(\mathcal{M},\tau) = \Big\{ x \in L_0(\mathcal{M},\tau) \;\big|\; \mu(x) \in \mathrm{X} \Big\} \quad \text{con} \quad \|x\|_{\mathrm{X}(\mathcal{M},\tau)} = \|\mu(x)\|_{\mathrm{X}}.$$

En particular, los **espacios de Lorentz no conmutativos** se definen como

$$L_{p,q}(\mathcal{M},\tau) = \Big\{ x \in L_0(\mathcal{M},\tau) \;\big|\; \mu(x) \in L_{p,q}[0,\tau(\mathbf{1})) \Big\},$$

con la (quasi)-norma dada por

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \|x\|_{p,q} &= \Big(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}}\, \mu_t(x)^q \, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}}, \\ \|x\|_{p,\infty} &= \sup_{\lambda>0} \lambda \tau\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)\big)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \mu_t(x). \end{aligned}$$

El lector puede acudir a [DDP, FK, PX2, Xu3] para más información.

1.3 Espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$

Al igual que en el caso de los espacios L_p clásicos, existe una generalización vectorial del espacio $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. La teoría vectorial de integración no conmutativa apareció en 1998 gracias al trabajo fundamental de Pisier [Pi2]. El motivo de que una teoría tan natural haya tardado tanto en salir a la luz es que, como explica Pisier en su trabajo, no basta con que el espacio X donde tomamos valores tenga una estructura de espacio de Banach. Efectivamente, es necesario que X venga equipado con una estructura de *espacio de operadores*. Por consiguiente, puesto que la teoría de espacios de operadores nació en 1988 con la Tesis Doctoral de Ruan [Ru], se explica lo novedoso de la teoría.

Los espacios de operadores constituyen una generalización no conmutativa de la teoría de espacios de Banach y han demostrado ser una herramienta fundamental en Algebra de Operadores y Análisis Armónico No Conmutativo. Un **espacio de operadores** X es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Denotemos por $M_n(\mathrm{X})$ al espacio vectorial de matrices $n \times n$ con entradas en X. De acuerdo con el teorema de Ruan [Ru], un espacio de operadores X puede definirse a través de una inclusión isométrica concreta $j : \mathrm{X} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o con una sucesión de *normas matriciales* en $M_n(\mathrm{X})$ para $n \geq 1$ que satisfacen

$$\big\| (x_{ij}) \big\|_{M_n(\mathrm{X})} = \big\| \big(j(x_{ij}) \big) \big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)}.$$

Los axiomas de Ruan [Ru] describen axiomáticamente aquellas sucesiones de normas matriciales que pueden aparecer como consecuencia de una inclusión isométrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Una tal sucesión de normas proporciona a X una *estructura de espacio de operadores*. Todo espacio de Banach se puede equipar con varias (infinitas) estructuras de espacios de operadores. En particular, la información más importante que contiene un espacio de operadores no es el espacio en sí mismo sino la forma en la que se incluye de forma isométrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por esta razón, la principal diferencia entre las teorías de espacios de Banach y operadores yace en los morfismos más que en los espacios. Los morfismos en la categoría de espacios de operadores son los *operadores completamente acotados* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Es decir, operadores lineales que satisfacen

$$\|u\|_{cb(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = \sup_{n \geq 1} \big\| id_{M_n} \otimes u \big\|_{\mathcal{B}(M_n(\mathrm{X}), M_n(\mathrm{Y}))} < \infty.$$

La teoría ha alcanzado hoy en día una madurez inusual para su juventud y conceptos como cocientes, dualidad, interpolación compleja, ultraproductos, tensores, espacios de Hilbert, etc... han sido generalizados desde los espacios de Banach. Para más información, el lector puede acudir a las monografías [ER, Pi4] o al Capítulo 1 de [Pa1] para una exposición sin demostraciones. Aunque no necesitamos tener gran experiencia con espacios de operadores, en lo que sigue asumiremos cierta familiaridad con lo expuesto en el Apéndice A de estas notas.

Una manera sencilla de justificar la necesidad de los espacios de operadores se obtiene tomando el álgebra no conmutativa más sencilla $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\ell_2(n))$. En tal caso, las clases de Schatten vectoriales $S_\infty(n; \mathrm{X})$ con valores en X no son otra cosa que los espacios $M_n(\mathrm{X})$ que aparecen en el teorema de Ruan y que dotan a X de una estructura de espacio de operadores. Pasamos ahora a explicar brevemente la construcción general. Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann hiperfinita (véase la definición en [KR1] o en nuestra construcción del factor hiperfinito II_1) equipada con una traza $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ *n.s.f.* Si $\mathcal{M}$ actúa en $\mathcal{H}$ y X actúa en $\mathcal{K}$, definimos $L_\infty(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$ como el cierre del producto tensorial algebraico $L_\infty(\mathcal{M}, \tau) \otimes \mathrm{X}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{K})$. Esto es el *producto tensorial minimal*

$$L_\infty(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}) = L_\infty(\mathcal{M}, \tau) \otimes_{\min} \mathrm{X}.$$

Utilizando el *producto tensorial proyectivo* se define

$$L_1(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}) = L_1(\mathcal{M}, \tau) \widehat{\otimes} \mathrm{X},$$

donde $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ está equipado con la estructura de espacio de operadores que hereda como subespacio cerrado de $L_\infty(\mathcal{M}^{\mathrm{op}}, \tau)^*$, véase [Pi4] para más información. Así finalmente, los **espacios** $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$ se definen por interpolación compleja en la categoría de espacios de operadores

$$L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}) = \big[L_\infty(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}), L_1(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}) \big]_{\frac{1}{p}}.$$

Nótese que nuestra definición no es rigurosa porque no hemos demostrado que los espacios a interpolar formen un par de interpolación. Por otro lado, la definición dada no proporciona una expresión explícita para la norma. Todos estos detalles e incluso propiedades básicas como teoremas de Fubini, desigualdades de tipo Hölder, un análisis de la dualidad, etc... se pueden encontrar en el texto [Pi2]. Para una exposición sin demostraciones véase el Capítulo 2 de [Pa1].

1.4 Líneas de investigación

Los espacios L_p no conmutativos son una herramienta fundamental en Algebra de Operadores, Geometría No Conmutativa, Probabilidad Cuántica y Libre o Física Matemática. No obstante, el Análisis Armónico y el Análisis Funcional son los campos donde (por razones obvias) esta teoría tiene un mayor impacto. En este apartado comentamos algunas líneas de investigación en Análisis en las que los espacios L_p no conmutativos juegan un papel esencial.

(a) Desde el punto de vista del Análisis Funcional, encontramos resultados que tienen que ver con la *geometría de los espacios* $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. El hecho de que $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ es *uniformemente convexo* para $1 < p < \infty$ es una consecuencia de las desigualdades de Clarkson no conmutativas [H2, Ko]. El *tipo* y *cotipo* de $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ se comporta como en el caso conmutativo. Esto fue demostrado por Tomczak-Jaegermann [To] para las clases de Schatten y por Fack [Fa] en el caso general. Otras nociones de convexidad o la validez de la *propiedad de Radon-Nikodym* se analizan en la Sección 5 de [PX2].

(b) En el contexto del Análisis Armónico destacamos aquí los multiplicadores de Schur. Dadas dos matrices infinito-dimensionales $\mathsf{A} = (a_{ij})$ y $\mathsf{B} = (b_{ij})$, se define el *producto de Schur* como

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = \Big(a_{ij} b_{ij} \Big),$$

también conocido como el *producto del mal estudiante* por razones obvias. Dada una matriz infinito-dimensional A, decimos que A es un *multiplicador de Schur* en S_p cuando el operador $\Phi_{\mathsf{A}} : \mathsf{B} \mapsto \mathsf{A} \cdot \mathsf{B}$ está acotado en la clase de Schatten S_p. La teoría de multiplicadores de Schur presenta muchas similitudes con la de multiplicadores de Fourier. No obstante, las técnicas disponibles están mucho más limitadas debido fundamentalmente a que S_p no posee una base incondicional a menos que $p = 2$. Una de las ramas más de moda en la teoría es la noción de *conjunto* $\sigma(p)$, un análogo no conmutativo de los conjuntos $\Lambda(p)$ de Rudin [Rd] y estudiados por Bourgain [Bo]. Asma Harcharras [Hr, HNO] posee los progresos más relevantes en esta línea.

(c) Nos centramos ahora en la teoría de isomorfismo e inclusión L_p. Con esto nos referimos a la clasificación de los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ salvo isomorfismo y a las inclusiones isomorfas entre ellos usando métodos probabilísticos. En contraste con la teoría clásica, donde sólo existen dos clases de espacios L_p (separables e infinito dimensionales) salvo isomorfismo, la situación en el caso no conmutativo está lejos de ser sencilla. Mencionemos por ejemplo el trabajo [HRS] de Haagerup, Rosenthal y Sukochev donde encontramos *trece* clases de espacios L_p salvo isomorfismo y sólo trabajando con álgebras de von Neumann semifinitas e hiperfinitas, véanse también [Su1, Su2, SX]. En cuanto a la teoría de inclusiones entre espacios L_p no conmutativos con diferentes exponentes, el lector puede acudir al último apartado de la Sección 2 para un análisis más detallado.

(d) Concluimos revisando dos problemas de la teoría vectorial. En primer lugar, la construcción de $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$ en [Pi2] exige que $\mathcal{M}$ sea *hiperfinita*. Esto es una restricción fuerte pues existen importantes álgebras de von Neumann, como los productos libres descritos antes, que no lo son. Recientemente, Junge ha resuelto este problema en [Ju4] extendiendo la definición de Pisier a álgebras de von Neumann QWEP, mucho más generales que las hiperfinitas, véase [Pi4]. El segundo problema es que por el momento no se dispone de una definición natural de los *espacios de Lorentz no conmutativos y vectoriales*

$$L_{p,q}(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X}).$$

Como veremos, esto es importante en teoría de martingalas no conmutativas.

(e) Otras líneas de investigación donde los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ aparecen se pueden encontrar nuevamente en el excelente artículo de Pisier y Xu [PX2]. Una de dichas líneas que no hemos tratado aquí y que tiene gran interés son los espacios de Hardy no conmutativos. No obstante, trataremos una parte de la materia más adelante en nuestro estudio de martingalas no conmutativas.

2 Desigualdades de Khintchine y Rosenthal

Comenzamos nuestra incursión en el Análisis Armónico No Conmutativo con un estudio de las desigualdades de tipo Khintchine [Kh] y de tipo Rosenthal [Ro1] para variables aleatorias no conmutativas. Aunque utilizaremos puntualmente variables aleatorias clásicas (como familias de Bernoullis independientes) y algunas nociones de independencia no conmutativa, los resultados existentes en la teoría utilizan fundamentalmente *variables aleatorias libres*. Los motivos que justifican su uso se expondrán más adelante. La Probabilidad Libre fue descubierta por Dan Voiculescu [Vo1] en 1985. El propósito original de su creador era importar herramientas de la Probabilidad Clásica para estudiar los *factores de grupos libres* $\mathbf{F}_n = \mathsf{vN}(\mathbb{F}_n)$ introducidos en la Sección 1. Más concretamente, el problema consistía en saber si $\mathbf{F}_n \simeq \mathbf{F}_m$ para $n \neq m$. Este problema se ha resistido a todos los ataques hasta ahora y permanece abierto. No obstante, la Probabilidad Libre se ha convertido en una profunda teoría que ha demostrado tener un impacto fortísimo en Análisis Armónico y Algebra de Operadores.

La idea básica que rige la noción de *libertad* es sencilla. A saber, como es bien conocido, la forma más directa de generar una familia $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de variables aleatorias independientes es hacer depender a cada f_α de una y sólo una coordenada dentro del espacio de probabilidad Ω, que se define a su vez como un producto cartesiano equipado con la medida producto

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha),$$

de modo que se tiene

$$w_{\alpha_0} = w'_{\alpha_0} \Rightarrow f_{\alpha_0}\big((w_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\big) = f_{\alpha_0}\big((w'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\big).$$

En el contexto no conmutativo, lo natural es reemplazar productos cartesianos de espacios de probabilidad por productos tensoriales de *espacios de probabilidad no conmutativos*. En otras palabras, dada una familia $(\mathcal{M}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de álgebras de von Neumann finitas equipadas con estados *n.f.* (normales y fieles) no necesariamente traciales, tomamos

$$(\mathcal{M}, \varphi) = \overline{\bigotimes_{\alpha \in \Lambda}} (\mathcal{M}_\alpha, \varphi_\alpha).$$

Esta construcción nos permite construir variables aleatorias *independientes* sin más que tomar $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ con $x_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$. Es más, si escogemos $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_0$ para cierta $\mathcal{M}_0$ fija, también es sencillo construir una familia independiente e *idénticamente distribuida*. Pues bien, la noción de libertad es el sustituto de la independencia no conmutativa cuando reemplazamos productos tensoriales por productos libres de álgebras de von Neumann. Aunque esto no es más que una definición informal del concepto de libertad (la definición es algo más intrínseca, sin referencia explícita a un producto libre de álgebras, ver más abajo) ya se obtiene una consecuencia importante: la Probabilidad Libre es una teoría *puramente no conmutativa*. Esto se sigue del hecho de que nuestra definición sólo puede tener lugar en álgebras de von

Neumann que son a su vez el producto libre de *dos o más* álgebras. En particular, no es posible trabajar sobre álgebras de von Neumann abelianas. Esto explica entre otras cosas porqué la noción de libertad, o una versión simplificada de la misma, nunca ha aparecido en la Probabilidad Clásica. Las aplicaciones de la Probabilidad Libre son numerosas y aquí sólo estudiaremos aquellas que tienen que ver con el Análisis Armónico. Por ejemplo, entre otros muchos aspectos, ignoraremos en estas notas la estrecha relación entre Probabilidad Libre y Combinatoria, o la noción de *entropía libre* definida por Voiculescu y con profundas aplicaciones en la teoría. En los siguientes dos apartados daremos una breve introducción que sirva a nuestros propósitos. Los textos [NS] y [VDN] contienen una exposición más completa.

2.1 Productos libres

Antes de definir rigurosamente la noción de independencia libre, formalizamos la construcción del producto libre de una familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de álgebras de von Neumann. Supongamos que cada A_α está equipada con un estado φ_α *n.f.* de manera que el par $(\mathsf{A}_\alpha, \varphi_\alpha)$ constituye un espacio de probabilidad no conmutativo. Definimos

$$\mathring{\mathsf{A}}_\alpha = \Big\{ a_\alpha \in \mathsf{A}_\alpha \ \big| \ \varphi_\alpha(a_\alpha) = 0 \Big\}.$$

Esto nos permite consider los espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_\alpha = L_2(\mathring{\mathsf{A}}_\alpha, \varphi_\alpha) \subset L_2(\mathsf{A}_\alpha, \varphi_\alpha).$$

El correspondiente **espacio de Fock** se define entonces como

$$\mathcal{F}_\Omega = \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{\alpha_1\neq\alpha_2\neq\cdots\neq\alpha_m} \mathcal{H}_{\alpha_1} \otimes_2 \mathcal{H}_{\alpha_2} \otimes_2 \cdots \otimes_2 \mathcal{H}_{\alpha_m},$$

donde el término asociado a $m = 0$ es un subespacio unidimensional generado por un vector distinguido Ω que llamaremos *vector vacío*. Mostramos ahora de qué modo los elementos de A_α se pueden interpretar como operadores en el espacio de Fock. Descomponemos cualquier $a_\alpha \in \mathsf{A}_\alpha$ como sigue

$$a_\alpha = \mathring{a}_\alpha + \varphi_\alpha(a_\alpha)\mathbf{1}_{\mathsf{A}_\alpha}.$$

La acción de $\varphi_\alpha(a_\alpha)\mathbf{1}_{\mathsf{A}_\alpha}$ en $\mathcal{F}_\Omega$ transforma un vector ξ en $\varphi_\alpha(a_\alpha)\xi$. Por consiguiente nos es suficiente con definir la acción de elementos de A_α con media 0. En otras palabras, nuestro objeto es construir representaciones $\pi_\alpha : \mathsf{A}_\alpha \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_\Omega)$ y para ello nos queda definir el vector

$$\sigma = \pi_\alpha(\mathring{a}_\alpha)(\xi_{\alpha_1} \otimes \xi_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\alpha_m}).$$

Dichas acciones se definen como sigue:

- Si $m > 0$ y $\alpha_1 \neq \alpha$ tenemos

$$\sigma = \mathring{a}_\alpha \otimes \xi_{\alpha_1} \otimes \xi_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\alpha_m}.$$

- Si $m > 0$ y $\alpha_1 = \alpha$ tenemos

$$\sigma = \varphi_\alpha(\mathring{a}_\alpha \xi_{\alpha_1}) \xi_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\alpha_m} \oplus \big(\mathring{a}_\alpha \xi_{\alpha_1} - \varphi_\alpha(\mathring{a}_\alpha \xi_{\alpha_1}) \mathbf{1} \big) \otimes \xi_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\alpha_m}.$$

- Finalmente, si $m = 0$ tenemos

$$\sigma = \pi_\alpha(\mathring{a}_\alpha)(\gamma \Omega) = \gamma \mathring{a}_\alpha.$$

Nótese que hemos utilizado la contención de $\mathring{\mathsf{A}}_\alpha$ en $\mathcal{H}_\alpha = L_2(\mathring{\mathsf{A}}_\alpha, \varphi_\alpha)$ (cuando se trabaja con estados no traciales aparecen espacios L_p de Haagerup y este punto es algo más delicado, véase el Apéndice B más abajo). Esto completa la definición del $*$-homomorfismo $\pi_\alpha : \mathsf{A}_\alpha \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_\Omega)$. Ahora definimos el **producto libre**

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{\alpha \in \Lambda} (\mathsf{A}_\alpha, \varphi_\alpha)$$

como el cierre en la topología débil de operadores de la C*-álgebra generada por los operadores $\pi_\alpha(a_\alpha)$ con $a_\alpha \in \mathsf{A}_\alpha$ y $\alpha \in \Lambda$. En otras palabras, el producto libre de $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es nuevamente un álgebra de von Neumann. De hecho, después de identificar A_α con $\pi_\alpha(\mathsf{A}_\alpha)$, podemos pensar en el producto libre $\mathcal{A}$ como el álgebra de von Neumann

$$\mathcal{A} = \Big(\bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_m} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2} \cdots \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m} \Big)''$$

equipada con el estado

$$\phi : a \in \mathcal{A} \mapsto \big\langle \pi(a)\Omega, \Omega \big\rangle_{\mathcal{F}_\Omega} \in \mathbb{C},$$

donde $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_\Omega)$ es la representación del producto libre en el espacio de Fock.

Observación 2.1 Sean $(\mathcal{A}, \phi)$ y $(\mathsf{A}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ como antes. Entonces, si φ_α es un estado tracial para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que ϕ también es un estado tracial. La demostración es muy sencilla utilizando la noción de libertad definida más abajo, véase [VDN] para más detalles.

2.2 Variables aleatorias libres

Damos ahora la definición intrínseca de libertad, sin hacer mención explícita a los productos libres. Sea $(\mathcal{A}, \phi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo. Una familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{A}$ se dice **libremente independiente** sobre ϕ si

$$\phi(a_1 a_2 \cdots a_m) = 0$$

cuando $\phi(a_k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$ y $a_k \in \mathsf{A}_{\alpha_k}$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_m$. De forma similar, dada una familia $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de variables aleatorias de $\mathcal{A}$, construimos para cada $\alpha \in \Lambda$ el álgebra de von Neumann A_α generada por a_α. Diremos que $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de **variables aleatorias libres** cuando la familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ sea libremente independiente sobre ϕ. Repasamos a continuación dos propiedades básicas de la independencia libre, véase [VDN].

(a) Comenzamos estableciendo la relación ya anunciada entre libertad y productos libres. Si $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia libremente independiente en $(\mathcal{A},\phi)$ y $\mathcal{A}$ está generada por dicha familia, entonces se tiene

$$(\mathcal{A},\phi) = \bigstar_{\alpha\in\Lambda}\big(\mathsf{A}_\alpha, \phi_{|\mathsf{A}_\alpha}\big).$$

(b) Sea $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia libremente independiente en $(\mathcal{A},\phi)$ y consideremos una partición $\Lambda = \sqcup_{\beta\in\Sigma}\Lambda_\beta$. Entonces, si definimos B_β como el álgebra de von Neumann generada por $\cup_{\alpha\in\Lambda_\beta}\mathsf{A}_\alpha$, se tiene que la familia $(\mathsf{B}_\beta)_{\beta\in\Sigma}$ también es libremente independiente en $(\mathcal{A},\phi)$. Esto nos permite agrupar familias libres en bloques disjuntos para obtener otras familias libres menos finas. De forma recíproca, la libertad es una propiedad transitiva. Es decir, familias libres de familias libres son nuevamente familias libres.

Observación 2.2 En un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A},\phi)$ es claro que el estado ϕ (normal, fiel y no necesariamente tracial) desempeña el mismo papel que la *esperanza* en Probabilidad Clásica. Del mismo modo, dada una subálgebra de von Neumann $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, podemos considerar la *esperanza condicionada* $\mathsf{E}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Al final del Apéndice B damos una definición rigurosa. En tal caso, existe una definición más general de la noción de libertad. Efectivamente, sea $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{A}$ que contienen a $\mathcal{B}$ como una subálgebra común. Entonces la familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ se llama *libremente independiente sobre* E si

$$\mathsf{E}(a_1 a_2 \cdots a_m) = 0$$

cuando $\mathsf{E}(a_k) = 0$ para todo $1 \le k \le m$ y $a_k \in \mathsf{A}_{\alpha_k}$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_m$. Esta noción guarda una relación directa con el *productos libre de* $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *amalgamado sobre* $\mathcal{B}$, del mismo modo que la libertad respecto del estado ϕ la guarda con el producto libre habitual. Los productos libres amalgamados así como esta noción de libertad son mucho más fuertes y tienen gran importancia en muchos de los resultados que siguen. El lector encontrará en el Apéndice C la construcción de los productos libres amalgamados. Dicho de un modo muy sencillo, la diferencia entre ambas formulaciones es similar a la diferencia entre la teoría escalar y la teoría vectorial, véase el Apéndice C para una exposición más detallada.

En Probabilidad Clásica, las variables aleatorias gaussianas juegan un papel esencial. Por regla general se trabaja con familias $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de gaussianas (reales o complejas) independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza 1. En el contexto de la Probabilidad Libre, el sustituto natural está dado por la variables semi-circulares y circulares. Este descubrimiento de Voiculescu se fundamenta en un destacado teorema límite para matrices aleatorias obtenido por Wigner en 1955. En dicho resultado, una distribución de probabilidad juega un papel central. A saber, la medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ soportada en $[-2,2]$ que se define como

$$d\mu_{\mathrm{W}}(s) = 1_{[-2,2]}\frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi}\,ds.$$

Diremos que una familia $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de variables aleatorias libres y autoadjuntas en $(\mathcal{A},\phi)$ forman un **sistema semi-circular libre** si cada a_α está equipada con la distribución de Wigner. En otras palabras, se tiene

$$\phi(a_\alpha^k) = \int_{[-2,2]} s^k \, d\mu_W(s)$$

para todo $k \geq 0$. Los sistemas semi-circulares libres sustituyen en Probabilidad Libre a los sistemas independientes de gaussianas reales estándar. Además, dado un tal sistema $(a'_\alpha, a''_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ con dos variables libres por cada $\alpha \in \Lambda$, podemos construir su *complexificación*

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a'_\alpha + i a''_\alpha\big).$$

Esto es un **sistema circular libre** y sustituye a los sistemas independientes de gaussianas complejas estándar. Las variables aleatorias semi-circulares y circulares también se suelen llamar *gaussianas libres* por razones obvias. Al igual que las gaussianas clásicas, los sistemas semi-circulares/circulares son *invariantes por la acción del grupo ortogonal/unitario* de donde se deduce que

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha a_\alpha \Big\|_{\mathcal{A}} = 2 \Big(\sum_{\alpha\in\Lambda} |\lambda_\alpha|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Como veremos más adelante, esta desigualdad es el primer paso en una larga cadena de desigualdades de tipo Khintchine o Rosenthal. Además de la invarianza por rotaciones, uno de los principales resultados de la teoría es el **Teorema Central del Límite para gaussianas libres**, un resultado de Voiculescu que profundiza en las ideas originales de Wigner, véase [VDN].

Mostramos por último cómo construir sistemas semi-circulares libres de forma explícita utilizando los operadores de creación y aniquilación. Efectivamente, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert cuya dimensión coincide con el cardinal de Λ. Tómese por ejemplo $\mathcal{H} = \ell_2(\Lambda)$. Definimos el espacio de Fock

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{H}_{\otimes m},$$

donde $\mathcal{H}_{\otimes m}$ denota el producto tensorial hilbertiano de $\mathcal{H}$ consigo mismo m veces y el término asociado a $m = 0$ está generado por el vector vacío Ω. Dado ξ en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$, el operador de **creación** $\ell(\xi) : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$ está definido por la relación $\ell(\xi)\eta = \xi \otimes \eta$. Es decir, si $\eta = \Omega$ se tiene $\ell(\xi)\eta = \xi$ mientras que si $\eta = \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_m$ obtenemos $\ell(\xi)\eta = \xi \otimes \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_m$. El operador adjunto se llama operador de **aniquilación** y satisface la relación $\ell(\xi)^*\eta = 0$ para $\eta = \Omega$ y $\ell(\xi)\eta = \langle \xi, \eta_1 \rangle \, \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_m$ para $\eta = \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \cdots \otimes \eta_m$. El álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ está equipada con el estado ϕ determinado por el vector vacío

$$\phi(a) = \langle a\Omega, \Omega \rangle_{\mathcal{F}(\mathcal{H})}.$$

Dada una base ortonormal $(\xi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, definimos la subálgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ generada por las variables aleatorias $(w_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ determinadas por

$$w_\alpha = \ell(\xi_\alpha) + \ell(\xi_\alpha)^*.$$

El sistema $(w_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es semi-circular libre en el espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \phi)$.

Observación 2.3 El estado ϕ es tracial en $\mathcal{A}$. Es decir, para todo $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ se tiene que $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_2 a_1)$. Sin embargo, es importante observar que ϕ *no* es tracial en todo $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Efectivamente, $\phi(\ell(\xi)^*\ell(\xi)) = \langle \xi, \xi \rangle$ y $\phi(\ell(\xi)\ell(\xi)^*) = 0$.

Observación 2.4 Dado $q \in [-1, 1]$, consideramos el producto interior

$$\big\langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m,\ \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_{m'} \big\rangle_q = \delta_{mm'} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} q^{i(\pi)} \langle \xi_1,\ \eta_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle \xi_m,\ \eta_{\pi(m)} \rangle$$

en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{S}_m$ denota el grupo simétrico de permutaciones de m elementos y $i(\pi)$ es el número de inversiones de π. En este caso también se pueden construir operadores de creación y aniquilación. La misma construcción que hemos utilizado antes da lugar en este caso a *variables q-gaussianas*, véase [BKS, No, Xu1] para más información. Las variables libres se corresponden con el caso $q = 0$.

2.3 Desigualdades de tipo Khintchine

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad no atómico y sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ una familia de variables aleatorias independientes de Bernoulli equidistribuidas en ± 1. Si así lo prefiere el lector, podemos tomar Ω el intervalo unidad con la medida de Lebesgue y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ las funciones de Rademacher

$$\varepsilon_k(w) = \operatorname{sgn}\big(\operatorname{sen}(2^k \pi w)\big).$$

Dado $0 < p < \infty$, la **desigualdad de Khintchine** [Kh] asegura que

$$\Big(\int_\Omega \Big| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_k(w) \Big|^p d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

donde ahora y en lo que sigue $\mathsf{A} \sim_c \mathsf{B}$ denota que $c^{-1}\mathsf{A} \le \mathsf{B} \le c\mathsf{A}$. Una manera de interpretar la desigualdad de Khintchine es la siguiente. Denotemos por $\mathcal{K}_p$ al subespacio cerrado de $L_p(\Omega, \mu)$ generado por las variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Entonces la desigualdad de Khintchine muestra que $\mathcal{K}_p$ es isomorfo a ℓ_2 con constantes relevantes controladas por c_p. Existen otras familias independientes de variables aleatorias que satisfacen las mismas desigualdades, aunque con constantes diferentes. Por ejemplo podemos tomar una familia independiente $z_1, z_2, \ldots$ de Steinhaus (i.e. z_k está uniformemente distribuida en el circulo unidad del plano complejo) o una familia independiente $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ de gaussianas estándar reales o complejas. En este último caso y debido a la invarianza por rotaciones mencionada en (2.1), se tiene que

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \gamma_k \Big\|_{L_p(\Omega,\mu)} = \|\gamma_1\|_p \Big(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

de manera que el cierre $\mathcal{G}_p$ en $L_p(\Omega,\mu)$ del subespacio generado por $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ es *isométrico* a ℓ_2. La desigualdad de Khintchine juega un papel central en diversas áreas del Análisis. Así por ejemplo, la desigualdad de Rosenthal [Ro1] o la de Burkholder/Gundy [BG] están inspiradas por la desigualdad de Khintchine. Entre otras aplicaciones, estas técnicas probabilísticas son esenciales en la teoría de tipo y cotipo de Maurey/Pisier [MP] o la geometría de espacios L_p [Ro2].

En este apartado estudiaremos generalizaciones de todas estas desigualdades en el contexto no conmutativo. Para ello, comenzamos reemplazando los coeficientes escalares $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ por funciones $f_1,f_2,\ldots$ en $L_p(\Sigma,\nu)$ para cierto espacio de medida $(\Sigma,\mathcal{F},\nu)$. El teorema de Fubini combinado con la desigualdad de Khintchine nos asegura que

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\otimes\varepsilon_k\Big\|_{L_p(\Sigma\otimes\Omega,\nu\otimes\mu)}\sim_{c_p}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n|f_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L_p(\Sigma,\nu)}. \tag{2.2}$$

Nuestro objetivo es cuantizar dicho resultado. Es decir, queremos reemplazar las funciones $f_1,f_2,\ldots$ en $L_p(\Sigma,\nu)$ por operadores $a_1,a_2,\ldots$ en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ para un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ dada y equipada con una traza *n.s.f.* τ. Aquí no es necesario asumir que τ es finita. De hecho, ni siquiera es necesario que τ sea una traza, basta trabajar con pesos *n.s.f.* En todo caso preferimos trabajar con trazas por simplicidad. Si atendemos a la forma de la última desigualdad, el término

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k\otimes\varepsilon_k\Big\|_{L_p(\mathcal{M}\otimes\Omega,\tau\otimes\mu)}$$

debería ser comparable a la norma en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ de la *función cuadrado* asociada a los operadores $a_1,a_2,\ldots,a_n$. El problema que surge aquí es que en el contexto no conmutativo existen dos funciones cuadrado igualmente legítimas. Definimos el operador **función cuadrado fila** como

$$\mathcal{S}_r(a)=\Big(\sum_{k=1}^n a_ka_k^*\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Similarmente, el operador **función cuadrado columna** se define como

$$\mathcal{S}_c(a)=\Big(\sum_{k=1}^n a_k^*a_k\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Observación 2.5 Nótese que ambas sumas son operadores positivos y podemos así tomar raíces cuadradas. Por otro lado, debido a la no conmutatividad, ambos operadores no tienen porqué coincidir. Para justificar la terminología *fila/columna* observamos que las sumas arriba empleadas se pueden interpretar como la entrada

$(1,1)$ de las siguientes matrices $n \times n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k a_k^* &= \left[\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & & \\ \vdots & & \\ a_n^* & & \end{pmatrix} \right]_{11}, \\ \sum_{k=1}^n a_k^* a_k &= \left[\begin{pmatrix} a_1^* & \cdots & a_n^* \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ \vdots & & \\ a_n & & \end{pmatrix} \right]_{11}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Estas identificaciones no son sólo importantes para justificar nuestra terminología, sino que dan pie a unas identidades que serán utilizadas frecuentemente en lo que sigue. Recordamos que $S_p(n)$ denota la p-clase de Schatten sobre el álgebra de matrices M_n equipada con su traza habitual tr. Entonces, si

$$\Big\{ e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \Big\}$$

denota la base canónica de M_n, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n a_k a_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau)} &= \Big\| \sum_{k=1}^n e_{1k} \otimes a_k \Big\|_{L_p(M_n \otimes \mathcal{M}, \mathrm{tr} \otimes \tau)}, \\ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n a_k^* a_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau)} &= \Big\| \sum_{k=1}^n e_{k1} \otimes a_k \Big\|_{L_p(M_n \otimes \mathcal{M}, \mathrm{tr} \otimes \tau)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por simetría es claro que ninguna de las dos funciones cuadrado consideradas es más importante que la otra. A la hora de generalizar la desigualdad de Khintchine en este contexto, esto plantea el problema de construir normas L_p en las que las dos funciones cuadrado arriba consideradas jueguen el *mismo* papel. Este problema fue resuelto por Lust-Piquard [Lu] para $1 < p < \infty$ y por Lust-Piquard/Pisier [LP] para $p = 1$. Ambos resultados dieron lugar a lo que hoy se conoce como la **desigualdad de Khintchine no conmutativa** y que se enuncia como sigue.

Teorema 2.6 *Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un álgebra de von Neumann equipada con una traza n.s.f. y sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ una familia independiente de Bernoullis equidistribuidas en ± 1 sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces, dado un exponente $1 \leq p < \infty$ y dados $a_1, a_2, \ldots$ en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, se cumplen las siguientes desigualdades*:

- *Si* $1 \leq p \leq 2$

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k \otimes \varepsilon_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M} \otimes \Omega, \tau \otimes \mu)} \sim_{c_p} \inf_{a = b + c} \left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n b_k b_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n c_k^* c_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \right\}.$$

- *Si* $2 \leq p < \infty$

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k \otimes \varepsilon_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M} \otimes \Omega, \tau \otimes \mu)} \sim_{c_p} \max \left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n a_k a_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p, \ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n a_k^* a_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \right\}.$$

Para dar una interpretación adecuada del resultado de Lust-Piquard/Pisier, es necesario definir los espacios fila y columna R_p y C_p. Concretamente, R_p es el subespacio de la clase de Schatten S_p formado por la matrices con todas sus entradas nulas salvo quizás en la primera fila. Si tomamos en cambio entradas no nulas en la primera columna, obtenemos el espacio C_p. En otras palabras

$$R_p = \Big\{ \sum\nolimits_k \lambda_k e_{1k} \mid \lambda_k \in \mathbb{C} \Big\} \subset S_p,$$

$$C_p = \Big\{ \sum\nolimits_k \lambda_k e_{k1} \mid \lambda_k \in \mathbb{C} \Big\} \subset S_p.$$

Nótese que en la terminología de los espacios de operadores R_p/C_p y utilizando la definición de los espacios L_p no conmutativos y vectoriales, las identidades de (2.4) se pueden reescribir como sigue

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_r(a)\|_p &= \Big\| \sum_{k=1}^n e_{1k} \otimes a_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;R_p)}, \\ \|\mathcal{S}_c(a)\|_p &= \Big\| \sum_{k=1}^n e_{k1} \otimes a_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;C_p)}. \end{aligned}$$

Observación 2.7 En lo que sigue necesitaremos utilizar la estructura de espacios de operadores de S_p. Aunque ya hemos definido estructuras más generales en el Apartado 1.3 preferimos recordar aquí la definición en este caso particular. En primer lugar $S_\infty = \mathcal{B}(\ell_2)$ está equipado con una estructura natural de espacio de operadores. Seguidamente definimos en S_1 la estructura que hereda como subespacio cerrado del espacio de operadores dual $\mathcal{B}(\ell_2)^*$. Finalmente, utilizamos el método de interpolación compleja para espacios de operadores [Pi1] y definimos

$$S_p = [S_\infty, S_1]_{\frac{1}{p}}.$$

Explicamos brevemente la última identidad. Lo primero que es necesario notar es que el par (S_1, S_∞) forma un par compatible, algo bien conocido. Por otro lado y según [Pi1], la identidad de interpolación de arriba expresa que todas las normas matriciales de Ruan (que caracterizan unívocamente la estructura de espacio de operadores) vienen dadas por las siguientes isometrías

$$M_m(S_p) = \big[M_m(S_\infty), M_m(S_1) \big]_{\frac{1}{p}}.$$

Ambos espacios R_p y C_p son isométricamente isomorfos a ℓ_2 para todo exponente $1 \le p \le \infty$. Es decir, como espacios de Banach, todos los espacios R_p y C_p son indistinguibles. No obstante, si equipamos a R_p y C_p con la estructura de espacio de operadores que heredan como subespacios cerrados de S_p, obtenemos una familia infinita de espacios de operadores *no completamente isomorfos*. Efectivamente, si denotamos por R y C a los espacios R_∞ y C_∞ (como se denotan habitualmente en la literatura) se tiene que R y C no son completamente isomorfos (de hecho son antagónicos en cierto sentido) y además obtenemos las siguientes isometrías completas

$$R_p = [R, C]_{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad C_p = [C, R]_{\frac{1}{p}}.$$

De hecho, los así llamados *espacios de Hilbert fila* y *columna* R y C son duales el uno del otro en la categoría de espacios de operadores. En particular, se tiene que $R_p^* = R_{p'} = C_p$ y viceversa. Los espacios R_p y C_p son piezas esenciales en Análisis Armónico No Conmutativo y proporcionan la interpretación adecuada de la desigualdad de Khintchine no conmutativa. Efectivamente, si denotamos por $\mathcal{K}_p$ al cierre en $L_p(\Omega, \mu)$ del subespacio generado por nuestra familia de Bernoullis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ y utilizamos la nomenclatura del Apartado 1.3, el Teorema 2.6 establece los siguientes isomorfismos entre espacios de Banach

$$L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathcal{K}_p) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} L_p(\mathcal{M}, \tau; R_p) + L_p(\mathcal{M}, \tau; C_p) & \text{si } 1 \le p \le 2, \\ L_p(\mathcal{M}, \tau; R_p) \cap L_p(\mathcal{M}, \tau; C_p) & \text{si } 2 \le p < \infty. \end{array} \right.$$

En particular, si tomamos $(\mathcal{M}, \tau) = (\mathcal{B}(\ell_2), \mathrm{tr})$ y atendemos a un resultado bien conocido de Pisier en la teoría de espacios de operadores [Pi2, Corollary 1.2], la desigualdad de Khintchine no conmutativa proporciona los siguientes *isomorfismos completos* entre espacios de operadores

$$\mathcal{K}_p \simeq_{cb} \left\{ \begin{array}{ll} R_p + C_p & \text{si } 1 \le p \le 2, \\ R_p \cap C_p & \text{si } 2 \le p < \infty. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Observación 2.8 En el isomorfismo completo (2.5), el espacio $\mathcal{K}_p$ está obviamente equipado con la estructura de espacio de operadores que hereda como subespacio cerrado de $L_p(\Omega, \mu)$. Por otro lado, si nos fijamos únicamente en las estructuras de espacio de Banach a derecha e izquierda, recuperamos el isomorfismo Banach $\mathcal{K}_p \simeq \ell_2$ que proporciona la desigualdad de Khintchine clásica.

El Teorema 2.6 utiliza *coeficientes* en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y no en $\mathbb{C}$ o en $L_p(\Sigma, \nu)$, como nos permite la desigualdad clásica. No obstante, la *variables aleatorias* utilizadas son conmutativas. En nuestros siguientes resultados trabajaremos con variables no conmutativas. Como veremos, esto da lugar a resultados más profundos. El equivalente en Probabilidad Libre de la familia de Bernoullis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ está dado por generadores de un grupo libre. Efectivamente, sea $\mathbb{G} = \mathbb{F}_\infty$ el grupo libre con generadores $g_1, g_2, \ldots$ Escribiremos $(\mathcal{A}, \phi)$ para referirnos al espacio de probabilidad cuántico $(\mathsf{vN}(\mathbb{G}), \tau_{\mathbb{G}})$ definido en el ejemplo (f) de la Sección 1, véase (1.2). Dado que $\mathbb{G}$ es el producto libre de infinitas copias de $\mathbb{Z}$, resulta que $(\mathcal{A}, \phi)$ es el producto libre de infinitas copias del espacio de probabilidad

$$\Big(L_\infty(\mathbb{T}, \mu), \int_{\mathbb{T}} \cdot \, d\mu \Big),$$

donde μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Aquí utilizamos (1.3)

$$\mathbb{G} = \bigstar_{n \ge 1} \mathbb{G}_n \Rightarrow (\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{n \ge 1} \big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n} \big)$$

donde $\mathbb{G}_n = \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 1$ y

$$\big(\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}_n}\big) = \Big(L_\infty(\mathbb{T}, \mu), \int_{\mathbb{T}} \cdot \, d\mu\Big).$$

Por consiguiente, si denotamos por $\pi_n : L_\infty(\mathbb{T}, \mu) \to \mathcal{A}$ a la inclusión natural del n-ésimo factor del producto libre $\mathcal{A}$ en sí mismo y por $\lambda_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(L_2(\mathbb{T}, \mu))$ a la representación regular a la izquierda de $\mathbb{Z}$ dada por

$$m \in \mathbb{Z} \mapsto \exp(2\pi i m \, \cdot) \in L_\infty(\mathbb{T}, \mu),$$

deducimos que la familia de *generadores libres*

$$\Big\{\lambda(g_n) = \pi_n(\lambda_{\mathbb{Z}}(1)) \, \big| \, n \geq 1\Big\}$$

forman un sistema de variables aleatorias libres en $(\mathcal{A}, \phi)$. Es decir, sustituiremos independencia estocástica por independencia libre en lo que sigue. Como veremos, una de las diferencias más significativas es que las desigualdades de tipo Khintchine para este tipo de variables satisfacen *estimaciones* L_∞, en contra de lo que ocurre en el contexto clásico, donde la desigualdad de Khintchine sólo se satisface para $0 < p < \infty$ y las constantes c_p verifican $c_p \sim \sqrt{p}$ cuando $p \to \infty$.

La primera desigualdad de tipo Khintchine para generadores libres se debe a Leinert [Le], quien demostró en 1974 que para una familia dada de escalares $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \lambda(g_k) \Big\|_{L_\infty(\mathcal{A}, \phi)} \sim \Big(\sum_{k=1}^\infty |\gamma_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

El hecho de que la primera desigualdad de tipo Khintchine (anterior al resultado de Lust-Piquard/Pisier, aunque con coeficientes escalares) fuese una estimación L_∞ responde a un fenómeno en Probabilidad Libre, en donde las estimaciones L_p para $p < \infty$ son *más complicadas*. Esto se debe fundamentalmente a que no se dispone en la teoría L_p de una representación en el espacio de Fock, que simplifica mucho las cosas. La desigualdad de Leinert fue generalizada por Haagerup en [H1], quién reemplazó generadores libres $\lambda(g_k)$ por palabras reducidas de longitud d

$$\lambda\big(g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_d}\big).$$

Concretamente, dado un entero positivo d, definimos W_d como el subconjunto del grupo libre $\mathbb{G}$ formado por las palabras reducidas de longitud d y $\mathcal{W}_p(d)$ como el cierre en $L_p(\mathcal{A}, \phi)$ del subespacio generado por $\lambda(\mathrm{W}_d)$

$$\mathcal{W}_p(d) = \overline{\mathrm{span}\Big\{\lambda(w) \, \big| \, w \in \mathrm{W}_d\Big\}} \subset L_p(\mathcal{A}, \phi).$$

Entonces la desigualdad de Haagerup establece que

$$\Big\| \sum_{w \in \mathrm{W}_d} \gamma_w \lambda(w) \Big\|_{\mathcal{W}_\infty(d)} \sim_{1+d} \Big(\sum_{w \in \mathrm{W}_d} |\gamma_w|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

El resultado de Haagerup para $d = 1$ recupera la desigualdad de Leinert (2.6).

Observación 2.9 Nuestra noción de *palabra reducida* es un poco restrictiva pues habitualmente se permite que aparezcan los inversos de los generadores. Es decir, palabras de la forma

$$g_{j_1}^{\alpha_1} g_{j_2}^{\alpha_2} \cdots g_{j_d}^{\alpha_d} \quad \text{con} \quad \alpha_k \in \pm 1$$

sin cancelaciones. Con esta definición de W_d, la desigualdad de Haagerup también es válida. De hecho, otra noción posible de palabra reducida es aquella que permite cualquier combinación de potencias enteras α_k y exige $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_d$. Esta noción, que es más natural en álgebras $\mathcal{A} \neq \mathsf{vN}(\mathbb{F}_\infty)$, será la utilizada en el próximo apartado donde trabajaremos con variables más generales.

Existen dos maneras de extender este tipo de desigualdades. La *primera* es tomar operadores y no escalares como coeficientes, como ya hicimos al formular la desigualdad de Khintchine no conmutativa. En este contexto, el resultado de Leinert fue generalizado por Haagerup y Pisier en [HP] mientras que la desigualdad de Haagerup fue generalizada por Buchholz [Bu]. De este modo, Buchholz obtuvo un resultado que englobaba de una vez a todas las desigualdades. No obstante, al igual que con las desigualdades de Leinert y Haagerup, el resultado de Buchholz sólo estudia estimaciones L_∞. Este problema ha sido recientemente resuelto en nuestro trabajo conjunto con Pisier [PP], donde extendemos el resultado de Buchholz para exponentes arbitrarios $1 \le p \le \infty$. Puesto que el resultado central de [PP] es el más general de todos ellos, basta con analizar dicho resultado para entender todos los anteriores. La *segunda* forma de extender este tipo de resultados es reemplazar los generadores libres $\lambda(g_k)$ por variables aleatorias libres más generales. Esta segunda fase será principalmente tratada en el siguiente apartado. Aquí sólo explicaremos la validez del resultado central de [PP] para sistemas semi-circulares/circulares libres, que se sigue del Teorema Central del Límite de Voiculescu.

Para motivar el resultado de [PP] comenzamos tomando palabras de longitud 1 o generadores. Este caso particular fue analizado por Pisier con anterioridad a [PP] y su formulación es casi idéntica a la desigualdad de Khintchine no conmutativa enunciada en el Teorema 2.6. Efectivamente, dado $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de medida no conmutativo, se tiene para $1 \le p \le 2$

$$\Big\| \sum_{w \in \mathrm{W}_1} a_w \otimes \lambda(w) \Big\|_{L_p(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})} \sim \inf_{a=b+c} \left\{ \Big\| \Big(\sum_{w \in \mathrm{W}_1} b_w b_w^* \Big)^{\frac12} \Big\|_p + \Big\| \Big(\sum_{w \in \mathrm{W}_1} c_w^* c_w \Big)^{\frac12} \Big\|_p \right\},$$

mientras que para $2 \le p \le \infty$ se obtiene

$$\Big\| \sum_{w \in \mathrm{W}_1} a_w \otimes \lambda(w) \Big\|_{L_p(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})} \sim \max \left\{ \Big\| \Big(\sum_{w \in \mathrm{W}_1} a_w a_w^* \Big)^{\frac12} \Big\|_p, \ \Big\| \Big(\sum_{w \in \mathrm{W}_1} a_w^* a_w \Big)^{\frac12} \Big\|_p \right\}.$$

En otras palabras, argumentando como antes, equipamos a $\mathcal{W}_p(1)$ con la estructura de espacio de operadores que hereda de $L_p(\mathcal{A}, \phi)$. Entonces tomamos $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\ell_2)$ con su traza habitual $\tau = \mathrm{tr}$ y deducimos

$$\mathcal{W}_p(1) \simeq_{cb} \left\{ \begin{array}{ll} R_p + C_p & \text{si } 1 \le p \le 2, \\ R_p \cap C_p & \text{si } 2 \le p \le \infty. \end{array} \right.$$

Es decir, la diferencia fundamental con el Teorema 2.6 reside en que el isomorfismo completo sigue siendo válido para $\mathcal{W}_\infty(1)$, en contra de lo que ocurre con $\mathcal{K}_\infty$. La siguiente cuestión que aparece de forma natural es cómo caracterizar al subespacio de $L_p(\mathcal{A},\phi)$

$$\mathcal{W}_p(2) = \overline{\mathrm{span}\Big\{\lambda(g_i g_j) \ \big| \ i,j \geq 1\Big\}}.$$

Antes de analizar el espacio $\mathcal{W}_p(2)$, necesitamos aprender a *combinar* espacios fila y columna en S_p. Dados dos espacios de operadores X_1 y X_2, existe una estructura de espacio de operadores para el producto tensorial algebraico $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ que no tiene contrapunto en la categoría de espacios de Banach. Dicha estructura está dada por el *producto tensorial de Haagerup* $\mathrm{X}_1 \otimes_h \mathrm{X}_2$. Para una definición precisa de dicha estructura, véase el Apéndice A. Aquí sólo nos interesa saber que el producto tensorial de Haagerup permite factorizar la clase de Schatten S_p como $C_p \otimes_h R_p$. En otras palabras, existe una isometría completa

$$e_{ij} \in S_p \mapsto e_{i1} \otimes e_{1j} \in C_p \otimes_h R_p.$$

En lo que sigue también será necesario trabajar con las versiones finito-dimensionales de R_p y C_p. Es decir, R_p^n y C_p^n denotarán los subespacios de $S_p(n)$ con entradas nulas salvo quizás en la primera fila/columna. En particular, si $S_p(n,m)$ denota la p-clase de Schatten sobre $M_{nm} \simeq \mathcal{B}(\ell_2(m), \ell_2(n))$, se tiene que

$$S_p(n,m) \simeq_{cb} C_p^n \otimes_h R_p^m.$$

Volvamos a nuestro análisis de $\mathcal{W}_p(2)$. Más concretamente, fijado un entero positivo n, consideramos el subespacio de $\mathcal{W}_p(2)$ en el que sólo intervienen los n primeros generadores de $\mathbb{G}$

$$\mathcal{W}_p(n,2) = \mathrm{span}\Big\{\lambda(g_i g_j) \ \big| \ 1 \leq i,j \leq n\Big\} \subset \mathcal{W}_p(2) \subset L_p(\mathcal{A},\phi).$$

Sabemos que $\mathcal{W}_p(n,1)$ es suma/intersección de C_p^n y R_p^n. En $\mathcal{W}_p(n,2)$ tenemos n^2 variables y la idea es que vamos a obtener sumas/intersecciones de los productos tensoriales

$$R_p^n \otimes_h R_p^n, \quad R_p^n \otimes_h C_p^n, \quad C_p^n \otimes_h R_p^n, \quad C_p^n \otimes_h C_p^n.$$

Nótese que el producto tensorial de Haagerup no conmuta pues

$$S_p(n) = C_p^n \otimes_h R_p^n \neq R_p^n \otimes_h C_p^n = C_{p'}^n \otimes_h R_{p'}^n = S_{p'}(n).$$

Una de las observaciones centrales en [PP] es que el *término cruzado* $R_p^n \otimes_h C_p^n$ no aparece en la desigualdad de Khintchine correspondiente, pues domina $(1 \leq p \leq 2)$ o está dominado $(2 \leq p \leq \infty)$ por los otros tres. De este modo, podemos resumir la desigualdad de Khintchine para $\mathcal{W}_p(n,2)$ como sigue

$$\mathcal{W}_p(n,2) \simeq_{cb} \left\{ \begin{array}{ll} R_p^{n^2} + (C_p^n \otimes_h R_p^n) + C_p^{n^2}, & \text{si } 1 \leq p \leq 2, \\ R_p^{n^2} \cap (C_p^n \otimes_h R_p^n) \cap C_p^{n^2}, & \text{si } 2 \leq p \leq \infty. \end{array} \right.$$

A partir de aquí es más sencillo generalizar la desigualdad de Khintchine para polinomios homogéneos de grado d respecto de los generadores libres $\lambda(g_1), \lambda(g_2), \ldots$ Efectivamente, el siguiente teorema es el resultado principal de [PP] y caracteriza la estructura de espacio de operadores de

$$\mathcal{W}_p(n,d) = \mathrm{span}\Big\{ \lambda(g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_d}) \, \Big| \, 1 \leq j_k \leq n \Big\} \subset L_p(\mathcal{A}, \phi).$$

Consideramos los espacios de operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p(n,d) &= \sum_{k=0}^{d} C_p^{n^k} \otimes_h R_p^{n^{d-k}} \qquad \text{para} \qquad 1 \leq p \leq 2, \\ \mathcal{K}_p(n,d) &= \bigcap_{k=0}^{d} C_p^{n^k} \otimes_h R_p^{n^{d-k}} \qquad \text{para} \qquad 2 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Teorema 2.10 *Se tiene que*

$$\mathcal{W}_p(n,d) \simeq_{cb} \mathcal{K}_p(n,d)$$

con constantes independientes de $n \geq 1$ y de $1 \leq p \leq \infty$. Más concretamente, dado un espacio de medida no conmutativo $(\mathcal{M}, \tau)$ y una familia $\mathbb{A} = (a_{j_1 j_2 \cdots j_d})_{1 \leq j_k \leq n}$ de operadores en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, la norma

$$\sigma(a) = \Big\| \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_d = 1}^{n} a_{j_1 j_2 \cdots j_d} \otimes \lambda(g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_d}) \Big\|_{L_p(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \phi)}$$

se caracteriza como sigue. Para cada $0 \leq k \leq d$, la familia $\mathbb{A}$ de coeficientes se puede interpretar como una matriz donde los k primeros índices indexan las filas y los $d-k$ restantes indexan las columnas. Así definimos

$$\gamma_k(a) = \Big\| \Big(a_{(j_1 \cdots j_k), (j_{k+1} \cdots j_d)} \Big) \Big\|_{L_p(\mathcal{M}, \tau; S_p(n^k, n^{d-k}))}.$$

Pues bien, tenemos las siguientes equivalencias

- $\sigma(a) \sim_{c_d} \inf \Big\{ \sum_{k=0}^{d} \gamma_k(a^k) \, \Big| \, a = \sum_k a^k \Big\}$ *cuando* $1 \leq p \leq 2$.
- $\sigma(a) \sim_{c_d} \max \Big\{ \gamma_0(a), \gamma_1(a), \ldots, \gamma_d(a) \Big\}$ *cuando* $2 \leq p \leq \infty$.

Observación 2.11 El Teorema 2.10 es susceptible de algunas generalizaciones. En primer lugar, la noción de *palabra reducida* se puede cambiar como en la Observación 2.9 sin consecuencias en el resultado. En segundo lugar, las identificaciones entre Bernoullis y generadores libres así como entre gaussianas y variables circulares hacen suponer que el Teorema 2.10 debería satisfacerse cuando reemplazamos generadores libres por variables circulares libres. Efectivamente, la versión libre del Teorema Central del Límite [VDN] es exactamente lo que se necesita aquí. Por último, resultados similares para q-gaussianas aparecen en el trabajo de Nou [No] y en el trabajo reciente [JPX] con Junge y Xu.

Observación 2.12 La noción de suma p-ortogonal en espacios L_p no conmutativos y su generalización multilineal para familias multi-indexadas están muy relacionadas con los resultados expuestos en este apartado. El lector interesado puede acudir a [Pa3, Pi3] para más información.

2.4 Desigualdades de tipo Rosenthal

Dado $2 \le p < \infty$ y fijado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, consideramos una familia $f_1, f_2, \ldots$ de variables aleatorias independientes con media 0 en $L_p(\Omega, \mu)$. En tal caso, la **desigualdad de Rosenthal** [Ro1] asegura que

$$\Big(\int_\Omega \Big| \sum_{k=1}^n f_k(w) \Big|^p d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nótese que la desigualdad de Khintchine se sigue fácilmente de la desigualdad de Rosenthal, al menos (de momento) para $2 \le p < \infty$. Motivados por un fenómeno típicamente no conmutativo que ya hemos encontrado en el apartado anterior, Junge y Xu extendieron en [JX1] la desigualdad de Rosenthal al rango de exponentes $1 < p \le 2$. Efectivamente, dado que el lado derecho de la desigualdad de Rosenthal es una norma en el espacio intersección $L_p(\Omega, \mu; \ell_p) \cap L_2(\Omega, \mu; \ell_2)$, es natural que en el caso $1 < p \le 2$ nos encontremos con la suma de los espacios duales. Así obtenemos las desigualdades

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_{L_p(\Omega,\mu)} \sim_{c_p} \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle \inf_{f=g+h} \Big\{ \Big(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n \|h_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\} & \text{si } 1 < p \le 2, \\ \displaystyle \max \Big\{ \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} , \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\} & \text{si } 2 \le p < \infty. \end{array} \right.$$

La desigualdad de Rosenthal fue la motivación de Burkholder para su desigualdad de martingalas sobre la función cuadrado condicional, que será analizada más adelante en estas notas. Una de las principales aplicaciones de la desigualdad de Rosenthal es la construcción de inclusiones entre espacios L_p de diferentes exponentes. Esta relación, así como una *interpretación geométrica* del resultado de Rosenthal (y otras generalizaciones) serán estudiados en los siguientes apartados, tanto en el contexto clásico como en el no conmutativo. Desigualdades débiles de tipo $(1,1)$ que extienden la desigualdad de Rosenthal se pueden encontrar en [Pa4] o en la Sección 3.

Como ya hicimos en el apartado anterior, nuestro objetivo es estudiar versiones no conmutativas de la desigualdad de Rosenthal reemplazando coeficientes escalares por *operadores* y variables independientes con media 0 por *variables libres*. Para ello es importante notar que en [JSZ] se probó que el orden de crecimiento de c_p (que no depende de n) cuando $p \to \infty$ es $p/\log p$. En particular, la desigualdad clásica de Rosenthal no se satisface en $L_\infty(\Omega, \mu)$. Nuevamente, en contraste directo con la teoría clásica, encontramos la desigualdad de Voiculescu [Vo2] y su extensión con valores en operadores [Ju3], que se formulan en L_∞. Efectivamente, dada una familia

$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ de álgebras de von Neumann equipadas con estados *n.f.* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ construimos su producto libre

$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{1 \le k \le n} (\mathsf{A}_k, \varphi_k).$$

Entonces, dados $a_1 \in \mathsf{A}_1, a_2 \in \mathsf{A}_2, \ldots, a_n \in \mathsf{A}_n$ variables con media 0 (i.e. libremente independientes en $\mathcal{A}$) y $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores lineales acotados en cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la desigualdad de Voiculescu nos asegura que

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k \Big\|_{\mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})} \sim \sup_{1 \le k \le n} \big\| a_k \otimes b_k \big\|_{\mathsf{A}_k \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})} + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \varphi_k(a_k^* a_k) b_k^* b_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \varphi_k(a_k a_k^*) b_k b_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}. \tag{2.8}$$

Observación 2.13 Si tomamos coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ escalares, recuperamos una versión libre de la desigualdad de Rosenthal en L_∞. Más concretamente, si asumimos por simplicidad que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son traciales, el segundo y el tercer término colapsan en uno solo que resulta ser el término de variación cuadrática. El primer término es obviamente una generalización en ℓ_∞ de la p-variación.

La desigualdad (2.8) la demostró Voiculescu [Vo2] en el caso tracial y escalar apuntado en la Observación 2.13 El caso general enunciado en (2.8) lo obtuvo Junge en [Ju3]. Antes de pasar a resultados más generales, reescribimos (2.8) en un lenguaje más adecuado. Utilizamos la esperanza condicionada $\mathsf{E} : \mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por $\mathsf{E}(a \otimes b) = \phi(a) b$. En tal caso, las variables $\alpha_k = a_k \otimes b_k$ son libres en $\mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})$ respecto de E en el sentido de la Observación 2.2. En otras palabras, utilizando el lenguaje de los productos libres amalgamados (Apéndice C), se tiene que

$$\big(\mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathsf{E} \big) = \bigstar_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \big(\mathsf{A}_k \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathsf{E}_k \big)$$

con $1 \le k \le n$ y $\mathsf{E}_k = \varphi_k \otimes id_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. En particular, como las variables aleatorias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pertenecen a factores distintos del producto libre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-amalgamado de arriba y satisfacen $\mathsf{E}_k(\alpha_k) = 0$, son libres y (2.8) se reescribe

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \Big\|_{\mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})} \sim \sup_{1 \le k \le n} \| \alpha_k \|_\infty + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}(\alpha_k^* \alpha_k) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}(\alpha_k \alpha_k^*) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty. \tag{2.9}$$

En lo que sigue presentamos el resultado central de [JPX]. Este resultado, al que nos referiremos como *desigualdad de Rosenthal libre*, es una generalización de la desigualdad de Voiculescu en varios sentidos:

(a) Obtenemos desigualdades L_p para todo exponente $1 \leq p \leq \infty$. Nótese que la desigualdad clásica de Rosenthal no sólo falla en $L_\infty(\Omega, \mu)$ sino que en esta ocasión tampoco se satisface en $L_1(\Omega, \mu)$. Esto justifica que nuestros resultados hacen uso esencial de la noción de libertad.

(b) Trabajamos sobre productos libres amalgamados. Más concretamente, dadas álgebras de von Neumann $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ con esperanzas condicionadas $\mathbb{E}_k : \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$, trabajaremos sobre

$$\big(\widehat{\mathcal{A}}, \mathbf{E}\big) = \bigstar_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}_k, \mathbb{E}_k) \quad \text{con} \quad \mathbf{E} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbf{B}.$$

Así, utilizaremos variables aleatorias libres sobre $\mathbf{E}$. En (2.9) ya hemos visto un caso particular de esta formulación general tomando las siguientes álgebras y esperanzas condicionadas

$$\big(\widehat{\mathcal{A}}, \mathbf{A}_k, \mathbf{B}\,; \mathbf{E}, \mathbb{E}_k\big) = \Big(\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathsf{A}_k\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{H}); \phi \otimes id_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}, \varphi_k \otimes id_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\Big).$$

Una vez hechas estas identificaciones, volvemos a la notación habitual

$$\big(\widehat{\mathcal{A}}, \mathbf{A}_k, \mathbf{B}\,; \mathbf{E}, \mathbb{E}_k\big) \rightsquigarrow \big(\mathcal{A}, \mathsf{A}_k, \mathcal{B}; \mathsf{E}, \mathsf{E}_k\big).$$

Si $\mathcal{B}$ está equipado con un estado *n.f.* φ, equipamos a $\mathcal{A}$ con el estado $\phi = \varphi \circ \mathsf{E}$.

(c) Usando la terminología

$$(\mathcal{A}, \mathsf{E}) = \bigstar_{\mathcal{B}}(\mathsf{A}_k, \mathsf{E}_k),$$

una palabra reducida de longitud d tiene la forma $a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_d}$ con $a_{j_k} \in \overset{\circ}{\mathsf{A}}_{j_k}$ y $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_d$, mientras que las palabras vacías son los elementos de $\mathcal{B}$. Así, un polinomio homogéneo de grado d se escribe en general como

$$a = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_d} a_{j_1}(\alpha) a_{j_2}(\alpha) \cdots a_{j_d}(\alpha), \tag{2.10}$$

con $a_{j_k}(\alpha) \in \overset{\circ}{\mathsf{A}}_{j_k}$ y α recorriendo un conjunto finito Λ. Escribiremos $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}(p, d)$ para denotar el cierre en $L_p(\mathcal{A}, \phi)$ del subespacio de polinomios homogéneos de grado d. En particular, $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}(p, 0) = L_p(\mathcal{B}, \varphi)$. Pues bien, la generalización consiste en permitir polinomios homogéneos de un grado fijo $d \geq 0$. Esto ya se hizo antes en el contexto de los generadores de un grupo libre. En este caso y en analogía con el *caos gaussiano*, obtendremos desigualdades de tipo Rosenthal para el *caos libre*. El trabajar sobre polinomios homogéneos y no sobre polinomios arbitrarios (formados por palabras arbitrariamente largas) es esencial en este contexto, véase [JPX] para más información.

Observación 2.14 La forma general dada en (2.10) para polinomios d-homogéneos no es del todo correcta en $L_p(\mathcal{A}, \phi)$ para p finito. Efectivamente, en tal caso hay que utilizar la densidad d_ϕ asociada (Apéndice B) cuando ϕ es no tracial. Nosotros evitaremos dicha terminología por la claridad de la presentación. El lector puede acudir a [JPX] para una exposición más detallada.

Dado $1 \leq k \leq n$, consideramos el operador $\mathcal{Q}_k : \mathbf{P}_\mathcal{A}(p,d) \to \mathbf{P}_\mathcal{A}(p,d)$ que colecciona aquellas palabras reducidas que comienzan y finalizan con una letra en A_k. Más concretamente, utilizando la forma (2.10), se tiene que

$$\mathcal{Q}_k(a) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{k=j_1 \neq \cdots \neq j_d = k} a_{j_1}(\alpha) a_{j_2}(\alpha) \cdots a_{j_d}(\alpha).$$

Teorema 2.15 *Si $2 \leq p \leq \infty$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{P}_\mathcal{A}(p,d)$, tenemos*

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=1}^n \mathcal{Q}_k(a_k) \Big\|_p \ \sim_{cd^7} & \ \Big(\sum_{k=1}^n \big\| \mathcal{Q}_k(a_k) \big\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
+ & \ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}\big(\mathcal{Q}_k(a_k)^* \mathcal{Q}_k(a_k) \big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \\
+ & \ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}\big(\mathcal{Q}_k(a_k) \mathcal{Q}_k(a_k)^* \big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p .
\end{aligned}$$

Observación 2.16 Un buen ejercicio para el lector es comprobar que el Teorema 2.15 constituye una generalización de la desigualdad de Rosenthal clásica así como de la desigualdad de Voiculescu en los términos descritos arriba en (a), (b) y (c).

Observación 2.17 Puesto que la noción de independencia libre es más fuerte que la de independencia no conmutativa, el Teorema 2.15 para $2 \leq p < \infty$ y polinomios homogéneos libres de grado 1 se sigue de la desigualdad de Rosenthal no conmutativa [JX1, JX4] que trataremos en el Teorema 3.8. No obstante, las constantes obtenidas de este modo dependen de p y divergen cuando $p \to \infty$.

Observación 2.18 Finalmente, observamos que el Teorema 2.15 se generaliza al caso $1 \leq p \leq 2$ fácilmente por un argumento de dualidad. De este modo y como viene siendo habitual, reemplazamos intersecciones por sumas de espacios de Banach, véase [JPX] para más detalles.

Nuestro segundo resultado central en este apartado es una *formula de reducción de longitud* para polinomios homogéneos libres en $L_p(\mathcal{A}, \phi)$. De nuevo necesitamos fijar algo de notación. En lo que sigue, Λ denotará un conjunto de índices finito y mantendremos nuestra terminología para $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathsf{E} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. También introducimos la siguiente notación motivada por la Mecánica Cuántica

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda} b(\alpha) \big\langle a(\alpha) \big| \Big\|_p &= \Big\| \Big(\sum_{\alpha, \beta \in \Lambda} b(\alpha) \mathsf{E}\big(a(\alpha) a(\beta)^* \big) b(\beta)^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p , \\
\Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda} \big| a(\alpha) \big\rangle b(\alpha) \Big\|_p &= \Big\| \Big(\sum_{\alpha, \beta \in \Lambda} b(\alpha)^* \mathsf{E}\big(a(\alpha)^* a(\beta) \big) b(\beta) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p .
\end{aligned}$$

Por último, dado $1 \leq k \leq n$ consideramos el operador $\mathcal{L}_k$ (resp. $\mathcal{R}_k$) en $\mathbf{P}_\mathcal{A}(p,d)$ que colecciona las palabras reducidas que comienzan (resp. finalizan) con una letra en A_k. Así obtenemos $\mathcal{Q}_k = \mathcal{L}_k \mathcal{R}_k = \mathcal{R}_k \mathcal{L}_k$. Escribiremos $\mathbf{P}_\mathcal{A}(d)$ para referirnos al espacio $\mathbf{P}_\mathcal{A}(\infty, d)$. El segundo resultado de [JPX] es el siguiente.

Teorema 2.19 *Dado $2 \leq p \leq \infty$, sea $x_k(\alpha) \in L_p(\mathsf{A}_k, \phi_{\mathsf{A}_k})$ con $\mathsf{E}(x_k(\alpha)) = 0$ para cada $1 \leq k \leq n$ y cada $\alpha \in \Lambda$. Dado un entero no negativo d, sea $w_k(\alpha) \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}}(d)$ tal que $\mathcal{R}_k(w_k(\alpha)) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$ y todo $\alpha \in \Lambda$. Entonces, se tiene la equivalencia*

$$\Big\| \sum_{k,\alpha} w_k(\alpha) x_k(\alpha) \Big\|_{L_p(\mathcal{A})} \sim_{cd^2} \Big\| \sum_{k,\alpha} w_k(\alpha) \langle x_k(\alpha)| \Big\|_p + \Big\| \sum_{k,\alpha} |w_k(\alpha)\rangle x_k(\alpha) \Big\|_p.$$

Similarmente, si $\mathcal{L}_k(w_k(\alpha)) = 0$ tenemos

$$\Big\| \sum_{k,\alpha} x_k(\alpha) w_k(\alpha) \Big\|_{L_p(\mathcal{A})} \sim_{cd^2} \Big\| \sum_{k,\alpha} |x_k(\alpha)\rangle w_k(\alpha) \Big\|_p + \Big\| \sum_{k,\alpha} x_k(\alpha) \langle w_k(\alpha)| \Big\|_p.$$

Observación 2.20 Nótese que las palabras en el lado izquierdo del Teorema 2.19 son de longitud $d+1$ mientras que las que aparecen en el lado derecho tienen longitudes d y 1 respectivamente. En esto consiste la fórmula de reducción. Nuestra principal aplicación de la fórmula de reducción es una *desigualdad de Khintchine generalizada*. Efectivamente, del mismo modo que en el Teorema 2.10 sobreviven los $d+1$ términos no cruzados (recuérdese nuestro análisis para longitud 2) de los 2^d términos que se producen al iterar la desigualdad de Khintchine no conmutativa (longitud 1) d veces, el Teorema 2.19 proporciona la desigualdad que hay que iterar para obtener el resultado deseado, que en este caso produce $2d+1$ términos. Para más detalles, el lector puede acudir al Teorema C de [JPX].

Observación 2.21 Si descomponemos un polinomio libre de grado d en sus partes homogéneas, obtenemos automáticamente generalizaciones triviales de los Teoremas 2.15 y 2.19 para polinomios libres no homogéneos de un grado fijado d. Esta es una generalización que se aplica a muchos otros resultados en [JPX].

2.5 Normas mixtas de variables aleatorias

La desigualdad de Rosenthal clásica y su contrapunto libre motivan un estudio más exhaustivo de este tipo de desigualdades y de sus aplicaciones. En este apartado analizamos una variante más de la desigualdad de Rosenthal, una caracterización de normas mixtas de familias de variables aleatorias independientes/libres. Tomemos una colección finita $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de variables aleatorias independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces afirmamos que

$$\Big(\int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^n |f_k|^2 \Big]^{\frac{p}{2}} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big\| \sum_{k=1}^n f_k \otimes \varepsilon_k \Big\|_p \sim_{c_p} \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ es como de costumbre una familia independiente de Bernoullis equidistribuida en ± 1. Efectivamente, la primera equivalencia se sigue de la forma que toma la desigualdad de Khintchine en (2.2). Ahora bien, puesto que las $f_k \otimes \varepsilon_k$'s siguen siendo independientes y tienen media 0 (las f_k's no tienen necesariamente media 0 pero las ε_k's son simétricas), la segunda equivalencia es consecuencia de la desigualdad de Rosenthal clásica y de la unimodularidad de las ε_k's.

Ahora es sencillo calcular normas mixtas de la familia $f_1, f_2, \ldots, f_n$. A saber, si tomamos $1 \leq q \leq p < \infty$ y definimos $g_1, g_2, \ldots, g_n$ por la relación $g_k = |f_k|^{q/2}$ para $1 \leq k \leq n$, entonces obtenemos la siguiente identidad para $s = 2p/q$

$$\Big(\int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^n |f_k|^q \Big]^{\frac{p}{q}} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^n |g_k|^2 \Big]^{\frac{s}{2}} d\mu \Big)^{\frac{2}{qs}}.$$

Por consiguiente, la equivalencia de antes origina

$$\Big(\int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^n |f_k|^q \Big]^{\frac{p}{q}} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \max_{r \in \{p,q\}} \Big\{ \Big(\sum_{k=1}^n \int_\Omega |f_k|^r d\mu \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\}. \tag{2.11}$$

Observación 2.22 Esto proporciona una realización natural de

$$\mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu) = n^{\frac{1}{p}} L_p(\Omega, \mu) \cap n^{\frac{1}{q}} L_q(\Omega, \mu)$$

en $L_p(\Omega, \mu; \ell_q^n)$. Más en concreto, si tomamos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ copias independientes de una variable aleatoria f, el lado derecho de (2.11) es la norma de f en el espacio intersección $\mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu)$ y la desigualdad (2.11) genera una inclusión isomorfa

$$f \in \mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu) \mapsto (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in L_p(\Omega, \mu; \ell_q^n).$$

Por otro lado, un sencillo argumento de dualidad nos permite también construir una inclusión isomorfa del espacio $\mathcal{K}_{p',q'}^n(\Omega, \mu)$ (que resulta de sumar los espacios duales de los que aparecen en $\mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu)$) en el espacio $L_{p'}(\Omega, \mu; \ell_{q'})$. A estas alturas, esto ya no es sorprendente en absoluto.

La versión libre de la desigualdad (2.11) es el resultado principal de [JP2]. Puesto que su formulación es excesivamente técnica, se sale de nuestros objetivos aquí. Así que nos contentaremos con una explicación informal. En primer lugar, es necesario notar que no sólo estamos interesados en una versión de (2.11) para variables libres, sino que además buscamos que la inclusión obtenida en la Observación 2.22 sea completamente isomorfa. Eso requiere generalizar el espacio $\mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu)$ en el contexto de las variables aleatorias libres y equiparlo con una estructura natural de espacio de operadores. La *sorpresa* principal que encontramos es que dicho espacio es el resultado de intersecar *cuatro* espacios y no dos como sucede en el contexto clásico, utilizando los así llamados *espacios L_p asimétricos.* La primera vez que apareció este fenómeno fue cuando estudiábamos el caso $q = 1$ en [JP1]. Con objeto de explicarlo, en lugar de acudir a definiciones técnicas, observamos que la desigualdad de Hölder da lugar a $L_p = L_{2p} L_{2p}$, queriendo decir con ello que la p-norma de f es el ínfimo de $\|g\|_{2p} \|h\|_{2p}$ sobre todas las posibles factorizaciones $f = gh$. Si L_p^r y L_p^c denotan las cuantizaciones fila y columna de L_p (ir al Capítulo 1 de [JP2] para la definición), la versión para espacios de operadores de la isometría de arriba está dada por la isometría completa

$$L_p = L_{2p}^r L_{2p}^c.$$

Así definimos
$$\mathcal{J}_{p,q}^n = \Big(n^{\frac{1}{2p}} L_{2p}^r \cap n^{\frac{1}{2q}} L_{2q}^r\Big)\Big(n^{\frac{1}{2p}} L_{2p}^c \cap n^{\frac{1}{2q}} L_{2q}^c\Big).$$
Esto da lugar al espacio intersección
$$\mathcal{J}_{p,q}^n = n^{\frac{1}{p}} L_{2p}^r L_{2p}^c \cap n^{\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p}} L_{2q}^r L_{2p}^c \cap n^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}} L_{2p}^r L_{2q}^c \cap n^{\frac{1}{q}} L_{2q}^r L_{2q}^c.$$

Observación 2.23 Como espacios de Banach
$$L_{2p}^r L_{2q}^c = L_s = L_{2q}^r L_{2p}^c \quad \text{con} \quad 1/s = 1/2p + 1/2q.$$
Es más, utilizando de nuevo la desigualdad de Hölder está claro que
$$n^{\frac{1}{s}} \|f\|_s \leq \max\Big\{n^{\frac{1}{p}} \|f\|_p, n^{\frac{1}{q}} \|f\|_q\Big\}.$$
Así, los términos cruzados del medio desaparecen a nivel de espacios de Banach. No obstante, sustituyendo escalares por operadores en el contexto de *libertad sobre una subálgebra de von Neumann*, las estimaciones Banach ya no son válidas y los cuatro términos contribuyen significativamente en el resultado.

Observación 2.24 Fue exactamente la necesidad de entender en profundidad la estructura natural de espacio de operadores de los espacios L_p asimétricos lo que condujo en [JP2] a introducir los *espacios L_p amalgamados* y también los *espacios L_p condicionales*. Ambas familias generalizan a una amplia gama de espacios de funciones no conmutativos que han aparecido en la literatura reciente, véanse los Capítulos 2, 3 y 4 de [JP2] para más detalles.

Con objeto de enunciar el resultado principal de [JP2], definimos formalmente la versión libre del espacio intersección $\mathcal{J}_{p,q}^n(\Omega, \mu)$, que ya ha sido descrita antes sin mucho rigor. Dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ equipada con un estado *n.f.* φ y dados $1 \leq q \leq p \leq \infty$, definimos para cada $n \geq 1$ el espacio
$$\mathcal{J}_{p,q}^n(\mathcal{M}, \varphi) = \bigcap_{u,v \in \{2p,2q\}} n^{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}} L_u^r(\mathcal{M}, \varphi) L_v^c(\mathcal{M}, \varphi).$$
Por otro lado, consideramos el producto libre
$$(\mathcal{A}, \phi) = \bigstar_{1 \leq k \leq n} (\mathsf{A}_k, \varphi_k)$$
donde $\mathsf{A}_k = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ para $1 \leq k \leq n$ y $\varphi_k : \mathsf{A}_k \to \mathbb{C}$ es el estado
$$\varphi_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)\big).$$
Sea $\pi_k : \mathsf{A}_k \to \mathcal{A}$ la inclusión natural de A_k en $\mathcal{A}$. Entonces, dado un elemento $x \in \mathcal{M}$, escribiremos x_k como una abreviación de $\pi_k(x, -x)$. Nótese que los x_k's tienen media 0. El resultado principal de [JP2] es como sigue.

Teorema 2.25 *Sea $1 \leq q \leq p \leq \infty$. El operador*

$$u : x \in \mathcal{J}^n_{p,q}(\mathcal{M}, \varphi) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \otimes \delta_k \in L_p(\mathcal{A}, \phi; \ell^n_q)$$

es un isomorfismo con imagen cb-complementada y constantes independientes de n.

Observación 2.26 Concluimos con alguna nota sobre el Teorema 2.25. En primer lugar, nuevamente por dualidad podemos caracterizar el caso $1 \leq p \leq q \leq \infty$ sin más que reemplazar nuestro espacio intersección por la suma de los duales, véase [JP1, JP2] para más detalles. En segundo término y como de costumbre, el Teorema 2.25 para $\mathcal{J}^n_{\infty,q}(\mathcal{M}, \varphi)$ se sigue gracias a la sustitución de independencia estocástica por independencia libre, pues en el contexto de variables aleatorias clásicas dicho resultado no es cierto. Además, el comentario anterior motiva la pregunta de si el Teorema 2.25 (excluyendo el caso $\mathcal{J}^n_{\infty,q}(\mathcal{M}, \varphi)$) se satisface con independencia no conmutativa, una noción más débil que la de independencia libre. Dicho resultado también es cierto, véase [JP1, JP2]. En último lugar, conviene notar que el Teorema 2.25 es el caso más sencillo del resultado central de [JP2]. Efectivamente, el caso general se formula en términos de productos libres amalgamados (como ya hicimos en el Teorema 2.15). Los espacios L_p amalgamados y condicionales mencionados antes provienen de esta formulación más general.

2.6 Líneas de investigación

Una de las principales aplicaciones de las desigualdades de tipo Khintchine es la teoría de *tipo y cotipo* de espacios de Banach, iniciada por Maurey y Pisier [MP] en 1976. Una generalización de dicha teoría en la categoría de espacios de operadores se inició en [Pa1] estudiando las nociones de tipo y cotipo de Fourier [GMP, GP1] o de tipo y cotipo de Rademacher y Gauss [GP2, JP1, Pa2]. No obstante, uno de los resultados de [JP1] evidencia que dicha noción de tipo y cotipo no permite generalizar el Teorema de Maurey/Pisier [MP], resultado central de la teoría.

El Teorema de Maurey/Pisier estableció una conexión fortísima entre Análisis Armónico y Geometría de Espacios de Banach, pues proporciona una relación entre la validez de ciertas desigualdades de tipo Khintchine (tipo y cotipo) con el rango de p's para los que el espacio ℓ_p es finitamente representable en el espacio de Banach considerado. Una piedra angular en la demostración de dicho resultado fue el uso de técnicas probabilísticas en la teoría L_p. Así, la primera aportación se debe a Bretagnolle, Dacunha-Castelle y Krivine [BDK] en 1966. Ellos construyeron una inclusión isométrica de L_q en L_p $(1 \leq p < q \leq 2)$ utilizando la representación de Lévy-Khintchine de variables aleatorias infinitamente divisibles. Este resultado fue una motivación fundamental y el famoso Teorema de Rosenthal [Ro2] se puede considerar como la siguiente aportación relevante. Sea (Ω, μ) una espacio de medida. En su forma más sencilla, el Teorema de Rosenthal afirma que todo subespacio reflexivo de $L_1(\Omega, \mu)$ se incluye isomórficamente en $L_p(\Omega, \nu)$ para cierto $p > 1$ y cierta medida absolutamente continua $\nu \ll \mu$ determinada por una densidad de probabilidad f tal que $d\nu = f d\mu$.

Hoy por hoy parece claro que una versión del Teorema de Maurey/Pisier para espacios de operadores pasa por entender la teoría de inclusiones de espacios L_p no conmutativos en la categoría de espacios de operadores. En este contexto, cabe mencionar los recientes resultados de [JP3, JP4] en los que se obtienen versiones no conmutativas de los resultados de Bretagnolle et al. y Rosenthal. Más en concreto, el primero de dichos resultados [JP3] se enuncia como sigue.

Inclusión completa de L_q en L_p. *Si $1 \leq p < q \leq 2$ y $\mathcal{M}$ es un álgebra de von Neumann cualquiera, existe un álgebra de von Neumann (suficientemente grande) $\mathcal{A}$ así como una inclusión completamente isomorfa de $L_q(\mathcal{M})$ en $L_p(\mathcal{A})$, donde ambos espacios están equipados con su estructura natural de espacio de operadores. Es más, se cumplen las siguientes propiedades*

(**a**) *Si* $\dim \mathcal{M} = \infty$, *$\mathcal{A}$ es necesariamente de tipo* III.

(**b**) *Si $\mathcal{M}$ es hiperfinita, podemos escoger $\mathcal{A}$ hiperfinita.*

(**c**) *Si $\mathcal{M}$ es* QWEP*, el álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ se puede tomar* QWEP.

El segundo resultado [JP4] es el siguiente.

Teorema de Rosenthal no conmutativo. *Sean $1 \leq p < q \leq 2$ y sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann σ-finita equipada con un estado normal y fiel φ. Sea* X *un subespacio de $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$ con tipo de Rademacher q. Entonces existe una inclusión isomorfa de* X *en cierto L_r para todo índice r en (p, q). Más en concreto, existe una inclusión isomorfa $u : \mathrm{X} \to L_r(\mathcal{M}, \phi) \oplus L_r(\mathcal{M}, \phi)$ (con ϕ un estado normal y fiel en $\mathcal{M}$) tal que, si π_1 y π_2 denotan las proyecciones coordenadas y d_ϕ es la densidad asociada a ϕ, todo $x \in \mathrm{X}$ satisface*

$$x = \frac{d_\phi^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \pi_1(u(x)) + \pi_2(u(x)) d_\phi^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}{2}.$$

El primer resultado está formulado en la categoría de espacios de operadores. Si sólo trabajamos en la categoría de espacios de Banach, el correspondiente resultado fue obtenido en [Ju1]. Nótese que la diferencia entre ambas categorías es notable en este contexto. Efectivamente, el apartado (a) nos asegura que si queremos construir un cb-embedding (inclusión completamente isomorfa entre espacios de operadores) de ℓ_q en cierto espacio L_p, dicho espacio se tiene que construir sobre un álgebra de tipo III!! Esto entra en contraste directo con los resultados clásicos, que usan la categoría de espacios de Banach. Por último, cabe mencionar que el caso particular que toma $(p, q) = (1, 2)$ es un resultado reciente de Junge [Ju3].

El segundo resultado está formulado en la categoría de espacios de Banach. La generalización de dicho resultado para espacios de operadores sería fundamental en la tarea de generalizar el Teorema de Maurey/Pisier. La demostración de ambos resultados se basa principalmente en el método desarrollado en [JP2] para estudiar normas mixtas de variables aleatorias libres.

Por último y sin que guarde ninguna relación con lo anterior, cabe mencionar que la desigualdad de Khintchine clásica tiene validez para $0 < p < \infty$, mientras que la extensión no conmutativa y sus generalizaciones a variables aleatorias libres sólo se han estudiado para $1 \leq p < \infty$ y también para $p = \infty$ en el caso de variables aleatorias libres. Esto sugiere el problema de encontrar una extensión natural para $0 < p < 1$ de las desigualdades de tipo Khintchine estudiadas. Hoy por hoy no existe ningún progreso en esta línea.

3 Desigualdades de martingalas no conmutativas

Estudiamos ahora las desigualdades recientes de martingalas no conmutativas. Una de nuestras referencias principales aquí será la excelente exposición de Xu [Xu1] que incluye casi todos los resultados obtenidos hasta la fecha. Aquí recogemos también los recientes progresos obtenidos tras la publicación del trabajo de Xu. En lo que sigue, trabajaremos sobre espacios de probabilidad no conmutativos $(\mathcal{M}, \tau)$ formados por un álgebra de von Neumann finita $\mathcal{M}$ equipada con un estado tracial τ normal y fiel. La mayor parte de nuestros resultados son ciertos también sobre estados no traciales o incluso sobre álgebras de von Neumann no finitas. No obstante eludiremos tales generalidades (que se pueden encontrar en las referencias de los resultados originales que daremos a lo largo del texto) para mayor claridad.

Consideramos ahora una subálgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ del álgebra $\mathcal{M}$. Es decir, una $*$-subálgebra con la identidad $\mathbf{1}$ de $\mathcal{M}$ que es cerrada en la topología débil de operadores. Entonces la restricción $\tau_{|\mathcal{N}}$ de τ a $\mathcal{N}$ es un estado tracial *n.f.* que también denotaremos por τ. Por otro lado, es claro que

$$L_p(\mathcal{N}, \tau) \hookrightarrow L_p(\mathcal{M}, \tau)$$

de forma isométrica. Entonces, dada la inclusión natural $j : L_1(\mathcal{N}, \tau) \to L_1(\mathcal{M}, \tau)$, podemos considerar el operador adjunto $\mathsf{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Es sencillo comprobar que el operador E satisface las siguientes propiedades [Ta3]

(a) E es una *proyección contractiva.*

(b) E *preserva la traza*: $\tau \circ \mathsf{E} = \tau$.

(c) E es *positiva*: $x \in \mathcal{M}_+ \Rightarrow \mathsf{E}(x) \geq 0$.

(d) E es *bimodular*: $\mathsf{E}(axb) = a\mathsf{E}(x)b$ para $a, b \in \mathcal{N}$ y $x \in \mathcal{M}$.

Se puede probar que un operador con semejantes propiedades es único y como el lector habrá podido imaginar, el operador E se llama **esperanza condicionada** de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{N}$. La esperanza condicionada se puede extender por densidad a un operador $\mathsf{E} : L_p(\mathcal{M}, \tau) \to L_p(\mathcal{N}, \tau)$ para $1 \leq p \leq \infty$. En este contexto más general E es una proyección contractiva que conserva las propiedades (b), (c) y la siguiente forma generalizada de (d). Si $a \in L_u(\mathcal{N}, \tau)$, $b \in L_v(\mathcal{N}, \tau)$ y $x \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ con $1/u + 1/p + 1/v = 1/q \leq 1$, entonces se tiene

$$\mathsf{E}(axb) = a\mathsf{E}(x)b \in L_q(\mathcal{N}, \tau).$$

Por otro lado, al igual que en el caso conmutativo, la esperanza condicionada debe suponer una generalización del concepto *esperanza* o *estado*. Así aparecen las nociones de *normalidad* y *fidelidad* de una esperanza condicionada, que son importantes en ciertos contextos. Un estudio algo más detallado de la esperanza condicionada incluyendo el caso no tracial, se puede encontrar al final del Apéndice B. Para un análisis de la esperanza condicionada sobre los espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ con $0 < p < 1$, véase el Teorema 7.1 de [JX1].

Una **filtración** de $\mathcal{M}$ es una sucesión creciente $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{M}$, tales que su unión es w^*-densa en $\mathcal{M}$. Si denotamos por E_n a la esperanza condicionada de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_n$, observamos que

$$\mathsf{E}_n \circ \mathsf{E}_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathsf{E}_{n+1} \circ \mathsf{E}_n$$

son también esperanzas condicionadas de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_n$. De modo que por unicidad se obtienen las identidades $\mathsf{E}_n \circ \mathsf{E}_{n+1} = \mathsf{E}_n = \mathsf{E}_{n+1} \circ \mathsf{E}_n$. Definimos una **martingala no conmutativa** respecto de la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ como una sucesión $x = (x_n)_{n\geq 1}$ en $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ que satisface

$$\mathsf{E}_n(x_{n+1}) = x_n \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Si además los x_n's están en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, decimos que x es una *L_p-martingala no conmutativa* y añadimos que x está *acotada en* $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ cuando $\|x\|_p = \sup_n \|x_n\|_p$ es finito. Además, observando que E_n es un operador contractivo, deducimos que la sucesión $\|x_n\|_p$ es no decreciente por lo que

$$\|x\|_p = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p.$$

Dado $1 \leq p < \infty$ y dado un elemento $x_\infty \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty)$ es una martingala acotada en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y que converge a x_∞ en norma si $1 \leq p < \infty$. Efectivamente, la afirmación es trivial cuando

$$x_\infty \in \bigcup_{n\geq 1} L_p(\mathcal{M}_n, \tau)$$

puesto que en ese caso la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es constante a partir de un momento dado. El caso general se sigue por densidad. Recíprocamente, dado $1 < p < \infty$ y una martingala $(x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, existe cierto $x_\infty \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ tal que $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty) \to x_\infty$ en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ cuando $n \to \infty$. Efectivamente, puesto que $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ es un espacio dual y la bola unidad es débilmente compacta por el teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a cierto $x_\infty \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ en dicha topología. Esto nos lleva a que $x_n = \mathsf{E}_n(x_\infty)$ y a la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p = \|x_\infty\|_p.$$

Por consiguiente, puesto que $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$ deducimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_∞ en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. En definitiva, en virtud de la discusión anterior, dado $1 < p < \infty$ podemos identificar el espacio de martingalas acotadas en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ con $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ propiamente dicho.

Observación 3.1 De acuerdo con la teoría clásica, también es de esperar que $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ se identifique con las martingalas *uniformemente integrables*. Esto se demostró en [PX1] utilizando la siguiente definición de integrabilidad uniforme. Un subconjunto K de $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ es **uniformemente integrable** si es acotado y para toda sucesión decreciente de proyecciones $p_1, p_2, \ldots$ convergente a 0 en $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \Big\{ \big\|p_n x p_n\big\|_1 \mid x \in \mathrm{K} \Big\} = 0.$$

Dada una martingala no conmutativa $x = (x_n)_{n\geq 1}$, la sucesión $dx = (dx_k)_{k\geq 1}$ de **diferencias de martingala** se define por $dx_k = x_k - x_{k-1}$ para todo $k \geq 1$ y con la convención de que $x_0 = 0$. Como es bien sabido, esto da lugar a otra forma de caracterizar las martingalas. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es una martingala respecto de la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ cuando su sucesión de diferencias $(dx_k)_{k\geq 1}$ está adaptada a la filtración y satisface

$$\mathsf{E}_{k-1}(dx_k) = 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq 2.$$

Consideramos ahora algunos ejemplos de martingalas no conmutativas que se corresponden con los ejemplos sobre espacios L_p no conmutativos que se consideran en la Sección 1:

(a) Martingalas clásicas. Dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ finita y abeliana equipada con una traza normalizada τ y una filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}$, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ así como una sucesión creciente $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ de σ-subálgebras de $\mathcal{A}$ tales que

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{y} \quad L_p(\mathcal{M}_n, \tau) = L_p(\Omega, \mathcal{A}_n, \mu)$$

para todo $n \geq 1$. Así, las martingalas clásicas aparecen como caso particular.

(b) Martingalas semi-conmutativas. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y tomemos $\mathcal{N}_1 = L_\infty(\Omega, \mu)$ equipada con la traza $\nu_1 = \int_\Omega \cdot \, d\mu$. Sea $(\mathcal{N}_2, \nu_2)$ otro espacio de probabilidad no conmutativo. Dada $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ una filtración creciente de σ-subálgebras de $\mathcal{A}$, consideramos la filtración

$$(\mathcal{M}_n, \tau) = \Big(L_\infty(\Omega, \mathcal{A}_n, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big),$$

de

$$(\mathcal{M}, \tau) = \big(\mathcal{N}_1 \bar{\otimes} \mathcal{N}_2, \nu_1 \otimes \nu_2\big) = \Big(L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathcal{N}_2), \int_\Omega \nu_2(\cdot)\, d\mu\Big).$$

En este caso, las esperanzas condicionadas están dadas por $\mathsf{E}_n = \mathbb{E}_n \otimes id_{\mathcal{N}_2}$ donde $\mathbb{E}_n$ denota la esperanza en Ω condicionada a la σ-subálgebra $\mathcal{A}_n$. Una vez más, en esta situación se transforman las martingalas no conmutativas en martingalas conmutativas con valores vectoriales.

(c) Martingalas finitas. En el caso de las clases de Schatten no existe una traza finita *natural* a menos que tratemos con clases finito-dimensionales $S_p(n)$, donde podemos considerar la traza $\sigma_n = \frac{1}{n}\mathrm{tr}$. Puesto que trabajamos sobre un espacio de dimensión finita, las filtraciones y por ende las martingalas resultantes serán finitas. Una filtración *natural* se obtiene tomando $(\mathcal{M}_k, \sigma_n)$ la subálgebra de matrices $n \times n$ con entradas nulas en las $n - k$ últimas filas y columnas (i.e. el soporte es la *esquina* $k \times k$ superior izquierda). Esta elección es muy útil a la hora de obtener contraejemplos. Efectivamente, si queremos ver que alguna propiedad no se cumple para martingalas no conmutativas, este es el primer caso que uno tiene que comprobar, véase [JX2].

(d) Martingalas diádicas. Dada una familia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de v.a. de Bernoulli independientes con función de masa equidistribuida en ± 1, las *martingalas diádicas* se construyen sobre la filtración dada por

$$\mathcal{A}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n).$$

Puesto que se trata de uno de los ejemplos más relevantes de martingalas, es interesante saber como construir 'martingalas diádicas no conmutativas'. En este caso tomamos el *factor hiperfinito* II_1, definido más arriba y equipado con la filtración

$$(\mathcal{R}_n, \tau) = \overline{\bigotimes_{m \le n}} (\mathcal{M}_m, \tau_m)$$

con $(\mathcal{M}_m, \tau_m) = (M_2, \sigma_2)$ para todo $m, n \ge 1$. Aquí $\mathcal{R}_n$ se incluye en el factor hiperfinito $\mathcal{R}$ identificando $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ con $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \otimes 1 \cdots$. Además, la esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{R} \to \mathcal{R}_n$ está completamente determinada por

$$\mathsf{E}_n \big(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes 1 \otimes 1 \cdots \big) = \Big(\prod_{k=n+1}^{r} \sigma_2(a_k) \Big) a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \otimes 1 \cdots$$

para $1 \le n \le r$. Esta construcción se generaliza de manera natural cuando consideramos productos tensoriales arbitrarios de espacios de probabilidad no conmutativos $(\mathcal{N}_n, \nu_n)$, véase e.g. [Xu1].

(e) Martingalas sobre grupos discretos. Dado $\mathbb{G}$ un grupo discreto y $(\mathbb{G}_n)_{n \ge 1}$ una familia creciente de subgrupos de $\mathbb{G}$ tales que $\bigcup_n \mathbb{G}_n = \mathbb{G}$, definimos el espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M}, \tau) = (\mathsf{vN}(\mathbb{G}), \tau_{\mathbb{G}})$ equipado con la filtración $(\mathcal{M}_n, \tau) = (\mathsf{vN}(\mathbb{G}_n), \tau_{\mathbb{G}})$. La esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_n$ sobre combinaciones lineales finitas de generadores está dada por

$$\mathsf{E}_n \Big(\sum_{g \in \mathbb{G}} \alpha_g \lambda(g) \Big) = \sum_{g \in \mathbb{G}_n} \alpha_g \lambda(g).$$

(f) Martingalas libres. Tomamos

$$(\mathcal{M}, \tau) = \bigstar_{n \ge 1} (\mathcal{N}_n, \nu_n) \quad \text{y} \quad (\mathcal{M}_n, \tau) = \bigstar_{m \le n} (\mathcal{N}_m, \nu_m).$$

Es decir, en este caso procedemos de forma similar al caso de las martingalas diádicas, pero sustituyendo productos tensoriales por productos libres. Por otro lado, la esperanza condicionada $\mathsf{E}_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_n$ está determinada como sigue. Sea $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ una *palabra reducida* (i.e. $j_1 \neq \cdots \neq j_m$ y $x_{j_k} \in \mathcal{N}_{j_k}$ con media 0), entonces

$$\mathsf{E}_n \big(x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m} \big) = 0$$

a menos que $\max(j_1, j_2, \ldots, j_m) \le n$, en cuyo caso E_n deja invariante la palabra $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$. Puesto que el producto libre $\mathcal{M}$ está generado por la identidad $\mathbf{1}$ (que queda fijada por E_n para todo $n \ge 1$) y las palabras reducidas, esta definición determina E_n por completo.

(g) Martingalas q-deformadas. Véase [Xu1].

A continuación nos centramos en la teoría de *desigualdades* de martingalas no conmutativas. Es decir, la versión no conmutativa de la teoría desarrollada por Burkholder, Davis, Doob y Gundy entre otros entre los años 50 y 70. Como es bien conocido, los resultados mencionados tienen una fuerte conexión con el Análisis Armónico y más en particular con la teoría de Integrales Singulares desarrollada por Calderón y Zygmund. Como hemos indicado al comienzo de estas notas, cabe pensar que las técnicas desarrolladas en martingalas no conmutativas sean la antesala de una *teoría de Calderón-Zygmund no conmutativa*.

El primer resultado sobre martingalas no conmutativas se remonta a 1971 con el trabajo de Cuculescu [Cu], quién obtuvo una extensión al contexto no conmutativo de la desigualdad maximal de Doob de tipo débil $(1,1)$. Después del trabajo de Cuculescu, las desigualdades de martingalas no conmutativas entraron en un período de relativa calma hasta el trabajo de Pisier y Xu [PX1] en 1997, a partir del cual han alcanzado un espectacular desarrollo. Este largo paréntesis sin progresos en la teoría se explica fundamentalmente por el hecho de que las técnicas clásicas como las *funciones maximales*, los *tiempos de parada*, etc... ya no tienen cabida en el contexto no conmutativo. De este modo, transferir los resultados clásicos al contexto no conmutativo es por lo general altamente no trivial y require técnicas adicionales del Análisis Funcional y la Combinatoria. No obstante, la teoría ha alcanzado hoy por hoy un punto satisfactorio de madurez y muchas de las desigualdades clásicas han sido transferidas con éxito al contexto no conmutativo.

3.1 El maximal de Doob

Dado $1 < p \leq \infty$, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una martingala $f = (f_n)_{n \geq 1}$ acotada en $L_p(\Omega, \mu)$ respecto de cierta sucesión $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ de σ-subálgebras de $\mathcal{A}$, la **desigualdad maximal de Doob** [Do] nos asegura que

$$\Big(\int_\Omega f^*(w)^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \lim_{n \to \infty} \Big(\int_\Omega |f_n(w)|^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1}$$

En otras palabras, tenemos

$$\|f^*\|_p \leq \delta_p \|f\|_p,$$

donde la *función maximal* de Doob f^* se define como

$$f^*(w) = \sup_{n \geq 1} |f_n(w)|.$$

Aquí la mejor constante δ_p crece como $(p-1)^{-1}$ cuando $p \to 1$. Por supuesto, la desigualdad (3.1) es falsa para $p = 1$. En todo caso, tenemos un sustituto que está dado por la siguiente **desigualdad de tipo débil** $(1,1)$

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu \big\{ f^* > \lambda \big\} \leq \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |f_n(w)| \, d\mu(w) = \|f\|_1. \tag{3.2}$$

Al intentar extender estas desigualdades al contexto no conmutativo, la primera dificultad que uno encuentra es cómo formular un análogo no conmutativo de la función maximal. Efectivamente, dados dos operadores a y b en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y como ya hemos señalado en la Sección 1, la expresión $\max(a,b)$ no tienen ningún sentido. No obstante, en lugar de considerar la *cota superior mínima* podemos buscar una cota superior que desempeñe la función que necesitamos. Comenzamos con la desigualdad débil de Cuculescu [Cu].

Teorema 3.2 *Dado un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M},\tau)$ y dada una martingala $x=(x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_1(\mathcal{M},\tau)$, existe para todo $\lambda>0$ una proyección $q(\lambda)\in\mathcal{M}$ que satisface*

$$\big\|q(\lambda)x_nq(\lambda)\big\|_\infty \leq \lambda \quad \textit{para todo } n\geq 1 \quad \textit{y} \quad \tau\big(\mathbf{1}-q(\lambda)\big)\leq \frac{4\|x\|_1}{\lambda}.$$

Es muy sencillo justificar por qué el resultado de Cuculescu es una generalización no conmutativa de la desigualdad maximal de Doob de tipo débil $(1,1)$. Basta con recordar que las proyecciones se corresponden en el caso clásico con las funciones características. De manera que la proyección $q(\lambda)$ se corresponde con la función característica del conjunto

$$\Big\{\sup_{n\geq 1}|f_n(w)|\leq\lambda\Big\}.$$

Así, una nueva lectura del Teorema 3.2 conduce en este caso a (3.2). Puesto que la prueba de este resultado es muy sencilla y muestra algunas técnicas habituales en la teoría, la incluimos aquí. En primer lugar, todo operador x se escribe como

$$x=\frac{1}{2}\big(x+x^*\big)+i\,\frac{1}{2i}\big(x-x^*\big).$$

Las partes real e imaginaria son ahora operadores autoadjuntos y, utilizando teoría espectral, podemos escribirlos como la diferencia entre dos operadores positivos. En definitiva, todo operador x se escribe como una combinación lineal

$$(a-b)+i(c-d)$$

de operadores positivos. Si aplicamos esto a cada x_n, obtenemos una descomposición de la martingala $x=(x_n)_{n\geq 1}$ en cuatro martingalas positivas. Efectivamente, el hecho de que las sucesiones resultantes son martingalas se sigue de la descomposición de Krickeberg para martingalas no conmutativas, demostrada en [Cu]. De este modo, basta probar el Teorema 3.2 para martingalas positivas y con constante 1 en lugar de 4. Ahora definimos inductivamente una sucesión $q(\lambda)_0,q(\lambda)_1,q(\lambda)_2,\ldots$ de proyecciones tomando $q(\lambda)_0=\mathbf{1}$ y las resoluciones espectrales

$$q(\lambda)_n=q(\lambda)_{n-1}\chi_{[0,\lambda]}\big(q(\lambda)_{n-1}x_nq(\lambda)_{n-1}\big)=\chi_{[0,\lambda]}\big(q(\lambda)_{n-1}x_nq(\lambda)_{n-1}\big)q(\lambda)_{n-1}.$$

Entonces tomamos

$$q(\lambda)=\bigwedge_{n\geq 1}q(\lambda)_n,$$

la proyección cuyo rango es el resultado de intersecar los rangos de $q(\lambda)_n$ para $n \geq 1$. Nótese que $q(\lambda)_n \in \mathcal{M}_n$ y que la sucesión $(q(\lambda)_n)_{n\geq 1}$ es decreciente. Veamos que $q(\lambda)$ es la proyección deseada. Por un lado tenemos

$$q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n = q(\lambda)_n \big(q(\lambda)_{n-1} x_n q(\lambda)_{n-1} \big) q(\lambda)_n \leq \lambda q(\lambda)_n.$$

Por consiguiente, obtenemos

$$q(\lambda) x_n q(\lambda) = q(\lambda) \big(q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n \big) q(\lambda) \leq \lambda q(\lambda) \leq \lambda \mathbf{1}.$$

De aquí se sigue la primera parte del Teorema 3.2. Para la segunda observamos que

$$\lambda \tau \big(\mathbf{1} - q(\lambda)_n \big) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \tau \big(q(\lambda)_{k-1} - q(\lambda)_k \big) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \tau \big(p(\lambda)_k \big),$$

donde $p(\lambda)_k = q(\lambda)_{k-1} - q(\lambda)_k$ es una proyección dado que la sucesión de q's es decreciente. Por otro lado, según la definición de $q(\lambda)_k$, sabemos que el espectro del operador $p(\lambda)_k q(\lambda)_{k-1} x_k q(\lambda)_{k-1} p(\lambda)_k$ está contenido en (λ, ∞). Esto nos lleva a la desigualdad

$$p(\lambda)_k = p(\lambda)_k^2 \leq \frac{1}{\lambda} p(\lambda)_k \big(q(\lambda)_{k-1} x_k q(\lambda)_{k-1} \big) p(\lambda)_k = \frac{1}{\lambda} p(\lambda)_k x_k p(\lambda)_k.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \lambda \tau \big(\mathbf{1} - q(\lambda)_n \big) & \leq \sum_{k=1}^{n} \tau \Big(\mathsf{E}_k \big(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k \big) \Big) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \tau \left(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k \right) \\ & \leq \sum_{k=1}^{n} \tau \left(p(\lambda)_k x_n p(\lambda)_k \right) + \tau \big(q(\lambda)_n x_n q(\lambda)_n \big) = \tau(x_n). \end{aligned}$$

La prueba se concluye haciendo $n \to \infty$. Observamos aquí que en [PR] se da una construcción similar $(q(\lambda)_n)_{n\geq 0}$ partiendo de una martingala $(x_n)_{n\geq 1}$ autoadjunta no necesariamente positiva. Esto completa el estudio de la desigualdad débil.

Nos centramos ahora en la generalización no conmutativa de la desigualdad maximal fuerte (3.1). En el caso de la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ hemos sorteado la imposibilidad de construir una función maximal con la ingeniosa construcción de Cuculescu. Pero la desigualdad débil sólo exige conocer *donde* la función maximal se comporta mal y estimar la medida de dicho conjunto. En la desigualdad fuerte necesitamos ser algo más agudos. Puesto que no podemos construir la función maximal, observamos que podemos reescribir la parte izquierda de (3.1) como sigue

$$\Big(\int_\Omega f^*(w)^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} = \big\| \big(f_1, f_2, f_3, \dots \big) \big\|_{L_p(\Omega,\mu;\ell_\infty)}.$$

Es decir, utilizando el espacio con valores vectoriales $L_p(\Omega, \mu; \ell_\infty)$ evitamos hacer uso de la función maximal en (3.1). Inspirado por la teoría de espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$ desarrollada por Pisier [Pi2] y descrita en la Sección 1, Junge explotó esta idea para obtener la desigualdad de Doob no conmutativa. Como hemos indicado antes, es difícil dar expresiones explícitas de la norma en $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$. No obstante, en el caso en el que $\mathrm{X} = \ell_\infty$, Junge [Ju2] obtuvo la siguiente caracterización

$$L_p(\mathcal{M}, \tau; \ell_\infty) = L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)\ell_\infty\big(L_\infty(\mathcal{M}, \tau)\big)L_{2p}(\mathcal{M}, \tau).$$

En otras palabras, dado $x = (x_1, x_2, \ldots) \in L_p(\mathcal{M}, \tau; \ell_\infty)$ se tiene que

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty)} = \inf \Big\{ \|a\|_{2p} \big(\sup_{n\geq 1} \|y_n\|_\infty \big) \|b\|_{2p} \, \big| \, x_n = a y_n b \Big\},$$

donde el ínfimo recorre todas las factorizaciones de x en la forma $(x_n) = a(y_n)b$ con $a, b \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$ e $(y_n) \in \ell_\infty\big(L_\infty(\mathcal{M}, \tau)\big)$. Un análisis mucho más general de este tipo de expresiones explícitas para normas L_p vectoriales se puede encontrar en la primera mitad de [JP2]. Presentamos ahora el resultado de Junge [Ju2].

Teorema 3.3 *Dado $1 < p \leq \infty$, un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M}, \tau)$ y dada una martingala $x = (x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, existen $a, b \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$ e $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ tales que*

$$x_n = a y_n b, \quad \|a\|_{2p}\|b\|_{2p} \leq \gamma_p \, \|x\|_p, \quad \|y_n\|_\infty \leq 1 \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

En otras palabras, se tiene que

$$\big\| \big(x_1, x_2, x_3, \ldots\big) \big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\ell_\infty)} \leq \gamma_p \, \|x\|_p.$$

Para $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad clásico/conmutativo, recuperamos la desigualdad de Doob clásica (3.1). Cuando x es una martingala positiva se pueden tomar a, b e y_n positivos. Es más, se puede escoger una factorización con $a = b$. De este modo se deduce del resultado de Junge que x_n está uniformemente acotado por $a^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ y que a^2 satisface la desigualdad

$$\|a^2\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p.$$

Es decir, en el caso de martingalas positivas es más transparente la relación entre los mundos conmutativo y no conmutativo. La demostración original de Junge [Ju2] se apoya fuertemente en la teoría de *módulos de Hilbert* [La] y resulta bastante compleja. Una demostración casi automática se obtiene utilizando un resultado muy profundo [JX3] sobre interpolación real de espacios $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Esto permite obtener el Teorema 3.3 a partir del resultado de Cuculescu y el caso trivial para $p = \infty$. Además, esta nueva demostración permite obtener el orden de crecimiento óptimo de la constant γ_p

$$\gamma_p \sim (p-1)^{-2} \quad \text{cuando} \quad p \to 1.$$

Es decir, γ_p se comporta como δ_p^2 donde δ_p es la constante en la desigualdad de Doob clásica, véase [JX2, Xu1] para una exposición más detallada. Por último concluimos observando que las técnicas de Cuculescu y Junge en sus respectivos trabajos nos conducen a un conocimiento mucho más depurado de la noción de *operador maximal no conmutativo.* Esto se ha explotado recientemente en [JX3] para obtener versiones no conmutativas de teoremas ergódicos maximales.

3.2 Las funciones cuadrado

Dado $1 < p < \infty$, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una martingala $f_1, f_2, \ldots$ acotada en $L_p(\Omega, \mu)$, la **desigualdad de Burkholder-Gundy** [BG] proporciona la siguiente equivalencia de normas

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega |f_n(w)|^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big(\int_\Omega \mathcal{S}(f)(w)^p d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

En otras palabras, se tiene que

$$\sigma_p^{-1} \|\mathcal{S}(f)\|_p \le \|f\|_p \le \xi_p \|\mathcal{S}(f)\|_p,$$

donde la *función cuadrado* $\mathcal{S}(f)$ asociada se define como

$$\mathcal{S}(f)(w) = \Big(\sum_{k=1}^\infty |df_k(w)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

El espacio de Hardy de martingalas $\mathcal{H}_p(\Omega, \mu)$ es el espacio de las martingalas en $L_p(\Omega, \mu)$ cuya función cuadrado está en $L_p(\Omega, \mu)$ (otra definición equivalente usa el maximal de Doob) y con la norma dada por la expresión

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p(\Omega,\mu)} = \Big(\int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^\infty |df_k|^2 \Big]^{\frac{p}{2}} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

La desigualdad de Burkholder-Gundy para martingalas no conmutativas [PX1] supuso el renacimiento de la teoría a finales de los años 90. Antes de enunciar dicho resultado, definimos los espacios de Hardy para martingalas no conmutativas $\mathcal{H}_p(\mathcal{M}, \tau)$, introducidos en [PX1]. Dados $1 \le p \le \infty$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una martingala finita en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, las *funciones cuadrado fila* y *columna* asociadas a x se definen como ya lo hicimos en la Sección 2

$$\mathcal{S}_r(x) = \Big(\sum_{k\ge1} dx_k dx_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_c(x) = \Big(\sum_{k\ge1} dx_k^* dx_k \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces definimos

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} = \Big\| \Big(\sum_{k\ge1} dx_k dx_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p = \Big\| \sum_{k\ge1} e_{1k} \otimes dx_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;R_p)},$$

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} = \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} dx_k^* dx_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p = \Big\| \sum_{k\geq 1} e_{k1} \otimes dx_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;C_p)}.$$

Esto proporciona dos normas en el espacio de las martingalas finitas. Los espacios de Hardy *fila* y *columna* se definen como las correspondientes completaciones y los denotaremos por $\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)$ y $\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)$ respectivamente. El **espacio de Hardy de martingalas no conmutativas** $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ se define entonces como sigue

$$\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau) + \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau), & \text{si } 1 \leq p \leq 2 \\ \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau) \cap \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau), & \text{si } 2 \leq p \leq \infty. \end{array} \right.$$

Las normas que así se obtienen son

- Si $1 \leq p \leq 2$

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} = \inf_{x=y+z} \Big\{ \|y\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} + \|z\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} \Big\}.$$

- Si $2 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} = \max \Big\{ \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M},\tau)} , \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M},\tau)} \Big\}.$$

Esto sigue una analogía completa con la desigualdad de Khintchine no conmutativa [Lu, LP]. La versión no conmutativa de la desigualdad (3.3) de Burkholder-Gundy es el resultado principal del trabajo de Pisier y Xu [PX1].

Teorema 3.4 *El espacio de Hardy $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ es isomorfo a $L_p(\mathcal{M},\tau)$ para todo $1 < p < \infty$. Concretamente, existen constantes positivas α_p y β_p que dependen sólo de p y tal que cualquier martingala x acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ satisface*

$$\alpha_p^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)} \leq \|x\|_{L_p(\mathcal{M},\tau)} \leq \beta_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)}.$$

Concluimos este apartado con una serie de observaciones:

(a) Sea $g_1, g_2, \ldots$ una martingala acotada en $L_p(\Omega,\mu)$ y sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ una familia de Bernoullis en $[0,1]$ independientes y equidistribuidas en ± 1. En ese caso, las funciones $df_k = dg_k \otimes \varepsilon_k$ son diferencias de martingalas respecto de la filtración $(\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{B}_{[0,1]})_{n\geq 1}$ donde g es una martingala adaptada a $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ y $\mathcal{B}_{[0,1]}$ denota la σ-álgebra de Borel. Entonces, las desigualdades de Burkholder-Gundy nos ofrecen la forma (2.2) de la desigualdad de Khintchine con valores en $L_p(\Omega,\mu)$

$$\Big(\int_\Omega \int_0^1 \Big| \sum_{k\geq 1} \varepsilon_k(s) dg_k(w) \Big|^p ds\, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} |dg_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L_p(\Omega,\mu)}.$$

Del mismo modo, la desigualdad de Burkholder-Gundy no conmutativa nos lleva a la desigualdad de Khintchine no conmutativa [Lu, LP]. Por supuesto con la salvedad de que $c_p \to \infty$ cuando $p \to 1$, a diferencia de lo que ocurre con la desigualdad de Khintchine.

(b) Hoy en día existen al menos tres demostraciones distintas del resultado de Pisier y Xu. La prueba original utiliza como ingrediente principal, una versión no conmutativa de la *desigualdad de Stein* [St]. Esta prueba fue extendida al caso no tracial en [JX1]. Las otras dos se deben a Randrianantoanina. La primera [Ra1] combina las desigualdades de Khintchine no conmutativas con su acotación débil $(1,1)$ de las transformadas de martingalas no conmutativas (ver más abajo). La segunda se obtiene por interpolación real desde la versión débil $(1,1)$ de la desigualdad de Burkholder-Gundy [Ra2]. Estas dos últimas se simplifican mucho utilizando la *descomposición de Gundy para martingalas no conmutativas* [PR]. Consideramos que la prueba más sencilla se obtiene por este camino. Más adelante daremos más detalles.

(c) Los *órdenes de crecimiento* de las constantes óptimas α_p y β_p se han estudiado en [JX1, JX2, Pi3, Ra1, Ra2]. Se tiene que $\beta_p \sim p$ cuando $p \to 1$ y cuando $p \to \infty$ mientras que $\alpha_p \sim (p-1)^{-1}$ cuando $p \to 1$ y $\alpha_p \sim p$ cuando $p \to \infty$. Todos estos órdenes de crecimiento coinciden con los que se obtienen en el caso conmutativo con la salvedad de α_p, que crece como $\sqrt{p}$ cuando $p \to \infty$ en el caso conmutativo. Por otro lado, puesto que β_p está acotado a medida que $p \to 1$, es razonable pensar que la segunda desigualdad del Teorema 3.4 sea cierta para $p = 1$. Efectivamente así es. No obstante, la primera desigualdad no es cierta en ese caso y se reemplaza por una desigualdad de tipo débil $(1,1)$ de la que hablaremos más abajo.

(d) En [PX1] también se construye una versión no conmutativa del espacio BMO de martingalas y se demuestra la versión del teorema de dualidad de Fefferman [Fe] para martingalas no conmutativas, que asegura que el dual de $\mathcal{H}_1(\mathcal{M},\tau)$ es el espacio $\mathcal{BMO}(\mathcal{M},\tau)$, acudir a [PX1] para más detalles.

3.3 Las funciones cuadrado condicionales

La función cuadrado condicional fue introducida por Burkholder [Br] en un intento de generalizar la desigualdad de Rosenthal para diferencias de martingalas. Junge y Xu han generalizado en [JX1] dicha desigualdad al contexto no conmutativo. Como siempre, comenzamos por recordar la desigualdad clásica. Sea $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ una filtración con esperanzas condicionadas

$$\mathsf{E}_n : L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to L_p(\Omega,\mathcal{A}_n,\mu).$$

Asumiremos también en lo que sigue la convención $\mathsf{E}_0 = 0$. Dado $2 \leq p < \infty$ y $f = (f_n)_{n\geq 1}$ una martingala acotada en $L_p(\Omega,\mu)$, la **desigualdad de Burkholder** [Br] nos asegura que

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \Big(\int_\Omega \mathcal{S}_{\mathrm{cnd}}(f)(w)^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega |df_k(w)|^p \, d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

En otras palabras, se tiene que

$$\zeta_p^{-1}\|f\|_p \leq \big\|\mathcal{S}_{\mathrm{cnd}}(f)\big\|_p + \Big(\sum\nolimits_k \|df_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \eta_p \|f\|_p,$$

donde la *función cuadrado condicional* $\mathcal{S}_{\mathrm{cnd}}(f)$ se define como

$$\mathcal{S}_{\mathrm{cnd}}(f)(w) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{k-1}\big(|df_k|^2\big)(w) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La generalización no conmutativa de (3.4) se debe a Junge y Xu [JX1].

Teorema 3.5 *Dado un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{M},\tau)$ y dada una martingala $x = (x_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\mathcal{M},\tau)$ para cierto exponente $2 \leq p < \infty$, se tiene que existen constantes positivas ρ_p y ψ_p tales que*

$$\rho_p^{-1} \|x\|_p \leq \mathcal{S}_{p,\mathrm{cnd}}(x) \leq \psi_p \|x\|_p,$$

donde $\mathcal{S}_{p,\mathrm{cnd}}(x)$ toma la forma

$$\mathcal{S}_{p,\mathrm{cnd}}(x) = \Big(\sum_{k\geq 1} \|dx_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} \mathsf{E}_{k-1}\big(|dx_k|^2\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p + \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} \mathsf{E}_{k-1}\big(|dx_k^*|^2\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p.$$

Observación 3.6 Si reemplazamos $\mathcal{S}_{p,\mathrm{cnd}}(x)$ por

$$\inf \left\{ \Big(\sum_{k\geq 1} \|d\alpha_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} \mathsf{E}_{k-1}\big(|d\beta_k|^2\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p + \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} \mathsf{E}_{k-1}\big(|d\gamma_k^*|^2\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \right\},$$

donde el ínfimo recorre las descomposiciones de x en una suma $x = \alpha + \beta + \gamma$ de martingalas en $L_p(\mathcal{M},\tau)$, entonces el Teorema 3.5 pasa a tener validez para $1 < p \leq 2$. Efectivamente, la idea es similar a lo que ocurre en las desigualdades de Khintchine, Rosenthal y Burkholder-Gundy. Esta extensión para $1 < p \leq 2$ era desconocida incluso en el caso conmutativo hasta la aparición de [JX1] y está motivada por el enfoque dado a la teoría desde el Análisis Funcional, que fuerza el contexto no conmutativo. Más adelante estudiaremos lo que ocurre para $p = 1$.

La desigualdad de Rosenthal [Ro1] es un caso particular de la desigualdad de Burkholder (para martingalas con diferencias independientes) y es especialmente relevante pues sirvió de motivación para Burkholder además de para muchos otros resultados relacionados con la geometría de los espacios L_p, como hemos indicado al final de la Sección 2. En sus trabajos [JX1, JX4], Junge y Xu dedujeron una forma no conmutativa de la desigualdad de Rosenthal distinta de la ofrecida en el Teorema 2.15. Efectivamente, ellos utilizaron una noción de independencia estocástica para variables aleatorias no conmutativas menos restrictiva que la independencia libre. Por un lado, esto significa que su resultado es aplicable a una familia más extensa de variables aleatorias. Por el otro, la desigualdad resultante es más débil. Así, como ya notásemos en la Observación 2.17, la constante de equivalencia $c_p \to \infty$ cuando $p \to \infty$. Además, aquí no podemos considerar polinomios homogéneos de grado $d > 1$ como hiciésemos en el Teorema 2.15.

Observación 3.7 Existen varias nociones diferentes de independencia para una familia de variables aleatorias no conmutativas, todas ellas no obstante relacionadas. La que presentamos a continuación se introduce en [JX4, Xu1]. Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo, $\mathcal{N}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$ y $\mathsf{E}_{\mathcal{N}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ la correspondiente esperanza condicionada. Una sucesión $(\mathcal{L}_n)_{n\geq 1}$ de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{M}$ se llama **independiente por orden** respecto de $\mathsf{E}_{\mathcal{N}}$ si para todo $n \geq 1$, $\mathcal{L}_n$ contiene a $\mathcal{N}$ y para todo $a \in \mathcal{L}_n$ y b en el álgebra de von Neumann generada por $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}$, se tiene que

$$\mathsf{E}_{\mathcal{N}}(ab) = \mathsf{E}_{\mathcal{N}}(a)\mathsf{E}_{\mathcal{N}}(b).$$

Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ se llama independiente por orden respecto de $\mathsf{E}_{\mathcal{N}}$ cuando existe una familia $(\mathcal{L}_n)_{n\geq 1}$ de subálgebras de von Neumann independientes por orden respecto de $\mathsf{E}_{\mathcal{N}}$ y tales que $a_n \in L_p(\mathcal{L}_n, \tau)$ para todo $n \geq 1$. Cuando $\mathcal{N} = \mathbb{C}$ se tiene que $\mathsf{E}_{\mathcal{N}} = \tau\mathbf{1}$ y hablamos de 'independencia respecto de τ'.

Teorema 3.8 *Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y $\mathcal{N}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$ con la correspondiente esperanza condicionada $\mathsf{E}_{\mathcal{N}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Dado $2 \leq p < \infty$ y $(a_n)_{n\geq 1}$ en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ una sucesión independiente por orden respecto de $\mathsf{E}_{\mathcal{N}}$ tal que $\mathsf{E}_{\mathcal{N}}(a_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, se tiene que*

$$\Big\| \sum\nolimits_k a_k \Big\|_p \sim_{c_p} \Big\| \Big(\sum\nolimits_k \mathsf{E}_{\mathcal{N}}\big(a_k a_k^* + a_k^* a_k\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p + \Big(\sum\nolimits_k \|a_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular, si $\mathcal{N} = \mathbb{C}$ se tiene que

$$\Big\| \sum\nolimits_k a_k \Big\|_p \sim_{c_p} \Big(\sum\nolimits_k \|a_k\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum\nolimits_k \|a_k\|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

3.4 La descomposición de Gundy

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $\lambda > 0$ y $f = (f_1, f_2, \ldots)$ una martingala acotada en $L_1(\Omega, \mu)$, la **descomposición de Gundy** [Gu] permite descomponer f como una suma $f = \alpha + \beta + \gamma$ de martingalas α, β, γ adaptadas a la misma filtración y que satisfacen las siguientes estimaciones para cierta constante absoluta c

(a) La martingala α satisface

$$\|\alpha\|_1 \leq c\|f\|_1 \quad \text{y} \quad \|\alpha\|_\infty \leq c\lambda.$$

(b) La martingala β satisface

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|d\beta_k\|_1 \leq c\|f\|_1.$$

(c) La martingala γ satisface

$$\lambda\mu\Big(\sup_{k\geq 1} |d\gamma_k| > 0 \Big) \leq c\|f\|_1.$$

Además, la desigualdad de Hölder proporciona la estimación

$$\frac{1}{\lambda}\|\alpha\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda}\|\alpha\|_1\|\alpha\|_\infty \leq c\|f\|_1.$$

La descomposición de Gundy juega un papel central en la teoría de martingalas clásicas y se puede interpretar como el contrapunto probabilístico de la conocida descomposición de Calderón-Zygmund en Análisis Armónico [CZ]. Concretamente, es muy útil a la hora de establecer desigualdades de tipo débil $(1,1)$ para ciertos operadores quasi-lineales como la función cuadrado o el maximal de Doob. Véase también [Br, BG] para ciertas variaciones del resultado de Gundy. En el contexto no conmutativo existe una generalización muy reciente de la descomposición de Gundy [PR]. En este trabajo aparecen esencialmente dos dificultades. La primera es *emular* el conjunto donde $\sup_k |d\gamma_k| > 0$, que está definido en términos de una función maximal. Aquí la idea consiste en identificar dicho conjunto como una unión de *soportes*

$$\Big\{\sup_{k\geq 1}|d\gamma_k| > 0\Big\} = \bigcup_{k\geq 1}\Big\{|d\gamma_k| > 0\Big\} = \bigcup_{k\geq 1}\operatorname{supp}|d\gamma_k|.$$

Es decir, la estimación (c) es equivalente a

$$\lambda\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1}\operatorname{supp}|d\gamma_k|\Big) \leq c\|f\|_1.$$

Una formulación no conmutativa de esta condición se obtiene utilizando la noción de *proyección soporte* de un operador medible, introducida en la Sección 1. Por otro lado, la segunda dificultad que aparece es que las demostraciones clásicas de la descomposición de Gundy y sus variantes necesitan en todos los casos hacer uso de al menos un *tiempo de parada*. Nuevamente la noción de tiempo de parada es *puntual* y no tiene ningún sentido en el contexto no conmutativo. Esta dificultad se solventa en [PR] utilizando una construcción de tipo Cuculescu para martingalas autoadjuntas no positivas, como la descrita en la prueba del Teorema 3.2. Efectivamente, un momento de reflexión lleva a observar que dicha construcción es lo *más parecido* a un tiempo de parada.

Teorema 3.9 *Sea $(\mathcal{M},\tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ una filtración de $\mathcal{M}$. Si $x=(x_n)_{n\geq 1}$ es una martingala respecto de $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_1(\mathcal{M},\tau)$ y λ es un número real positivo, existe una descomposición de x como suma $x=\alpha+\beta+\gamma^r+\gamma^c$ de martingalas adaptadas a $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ y tales que:*

(a) *La martingala α satisface*

$$\|\alpha\|_1 \leq c\|x\|_1, \quad \frac{1}{\lambda}\|\alpha\|_2^2 \leq c\|x\|_1, \quad \|\alpha\|_\infty \leq c\lambda.$$

(b) *La martingala β satisface*

$$\sum_{k=1}^\infty \|d\beta_k\|_1 \leq c\|x\|_1.$$

(**c**) *Las martingalas γ^r y γ^c están en $L_1(\mathcal{M},\tau)$ y satisfacen*

$$\max \left\{ \lambda\tau\Big(\bigvee_{k\geq 1} \mathrm{supp}\, |(d\gamma_k^r)^*| \Big),\ \lambda\tau\Big(\bigvee_{k\geq 1} \mathrm{supp}\, |d\gamma_k^c| \Big) \right\} \leq c\|x\|_1.$$

Observación 3.10 Dadas p y q dos proyecciones, $p \vee q$ denota la proyección con

$$\mathrm{rg}(p \vee q) = \mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q).$$

La diferencia más relevante entre la descomposición original de Gundy [Gu] y su versión no conmutativa [PR] reside en que la primera utiliza tres martingalas mientras que la segunda *necesita* cuatro martingalas. Efectivamente, sin mucho rigor se puede decir que este fenómeno se debe a la naturaleza fila/columna de los espacios de Hardy $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$ de martingalas no conmutativas. Más concretamente, γ^r y γ^c se pueden interpretar como las *partes* fila y columna respectivamente de su contrapunto conmutativo γ. En el trabajo [PR] se puede encontrar un sencillo argumento que justifica que no existe una posible descomposición en tres martingalas con estas propiedades, porque ello conduciría a la negación de las desigualdades de Burkholder-Gundy no conmutativas [PX1]. Por último, la descomposición en [PR] no es sólo un resultado de existencia sino una descomposición explícita donde, como hemos señalado antes, se utiliza la construcción de Cuculescu [Cu] como pieza clave. Esto permite *emular* los tiempos de parada que aparecen en la demostración original de Gundy. No damos aquí la descomposición explícita de x, véase [PR] para los detalles y para otras descomposiciones relacionadas.

Al igual que en el contexto clásico, la descomposición de Gundy es un arma poderosa para obtener desigualdades de tipo débil. En el trabajo [PR] se han obtenido dos aplicaciones en esta línea. Concretamente, la acotación débil $(1,1)$ de la *transformada de martingalas no conmutativas* así como el análogo no conmutativo de la desigualdad débil para la función cuadrado, debida a Burkholder. En otras palabras, la *acotación débil* $(1,1)$ *de la desigualdad de Burkholder-Gundy* que no fue estudiada en [PX1]. Estos dos resultados habían sido probados con anterioridad por Randrianantoanina [Ra1, Ra2] utilizando argumentos mucho menos directos. No obstante, la principal contribución de las demostraciones dadas en [PR] reside en su simplicidad, que se deriva del enfoque proporcionado por la descomposición de Gundy para martingalas no conmutativas.

3.5 Desigualdades de tipo débil

Estudiamos tres desigualdades de tipo débil $(1,1)$. A saber, en primer lugar la acotación débil para transformadas de martingalas no conmutativas. En segundo lugar, la estimación de tipo débil asociada a la desigualdad de Burkholder-Gundy no conmutativa. Por último nos centraremos en las desigualdades débiles que surgen (curiosamente existen dos) en relación a la desigualdad de Burkholder para la función cuadrado condicional. De acuerdo con este esquema, dividiremos este apartado en tres partes.

3.5.1 Transformadas de martingalas

Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y sea $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ una filtración de subálgebras de von Neumann de $\mathcal{M}$. Consideramos una sucesión $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ en $\mathcal{M}$ adaptada a $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\xi_0 = \mathbf{1}$,
- $\sup_{n\geq 1} \|\xi_n\|_{\mathcal{M}_n} \leq 1$,
- $\xi_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1} \cap \mathcal{M}_n'$ para $n \geq 1$,

donde $\mathcal{M}_n'$ denota el conmutador de $\mathcal{M}_n$. Dado $1 \leq p \leq \infty$, sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una martingala adaptada a la filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ y acotada en $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Entonces, el operador **transformada de martingalas** Λ_ξ se define como

$$\Lambda_\xi\Big(\sum_{k=1}^\infty dx_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \xi_{k-1} dx_k = \sum_{k=1}^\infty dx_k \xi_{k-1}.$$

Las transformadas de martingalas conmutativas son de tipo (p,p) fuerte para todo $1 < p < \infty$ y de tipo $(1,1)$ débil. En el contexto no conmutativo es obvio que el operador Λ_ξ está acotado en $L_2(\mathcal{M}, \tau)$. En particular, combinando el método de interpolación real con un argumento de dualidad, es claro que basta con probar la estimación débil para obtener el resto. Para ello es necesario utilizar el espacio $L_{1,\infty}(\mathcal{M}, \tau)$ introducido en (1.4). El resultado principal de [Ra1] es el siguiente.

Teorema 3.11 *Se tiene que*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)} \leq c \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_{L_1(\mathcal{M},\tau)}$$

para todo $n \geq 1$ y cierta constante absoluta c independiente de $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$.

La demostración original de [Ra1] es bastante técnica. No obstante, haciendo uso del Teorema 3.9, el argumento es tan sumamente sencillo que merece la pena incluirlo en estas notas. De acuerdo con (1.4), tenemos que ver que

$$\lambda\, \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|\Big)\Big) \leq c \Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_{L_1(\mathcal{M},\tau)}, \tag{3.5}$$

para todo $\lambda > 0$. Aplicando el Teorema 3.9 para λ, se tiene

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|^2 &\leq 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big|^2 + 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|^2 \\ &+ 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^r\Big|^2 + 4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c\Big|^2,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad

$$|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$$

para operadores. Tomando trazas y usando la desigualdad quasi-triangular

$$\begin{aligned}
&\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} dx_k\Big|\Big)\Big) \\
\leq \ & 4\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big|^2\Big)\Big) + 4\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|^2\Big)\Big) \\
+ \ & 4\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^r\Big|^2\Big)\Big) + 4\lambda\tau\Big(\chi_{(\lambda^2/4,\infty)}\Big(4\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c\Big|^2\Big)\Big) \\
= \ & \mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c} + \mathsf{d}.
\end{aligned}$$

Para el primer término utilizamos la desigualdad de Chebychev

$$\mathsf{a} \leq \frac{64}{\lambda}\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\alpha_k\Big\|_2^2 = \frac{64}{\lambda}\sum_{k=1}^n \|\xi_{k-1} d\alpha_k\|_2^2 \leq \frac{64}{\lambda}\sum_{k=1}^n \|d\alpha_k\|_2^2 \leq c\Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.$$

El segundo término se estima de forma similar

$$\begin{aligned}
\mathsf{b} &= 4\lambda\,\tau\Big(\chi_{(\lambda/2,\infty)}\Big(2\Big|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big|\Big)\Big) \\
&\leq 16\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\beta_k\Big\|_1 \leq 16\sum_{k=1}^n \|d\beta_k\|_1 \leq c\Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.
\end{aligned}$$

Para el término d, notamos que $|\sum_{k=1}^n \xi_{k-1} d\gamma_k^c|^2$ está soportado por la proyección

$$\bigvee_{1\leq k\leq n} \operatorname{supp}|d\gamma_k^c|.$$

Con esta observación, se sigue que

$$\mathsf{d} \leq 4\lambda\tau\Big(\bigvee_{1\leq k\leq n} \operatorname{supp}|d\gamma_k^c|\Big) \leq c\Big\|\sum_{k=1}^n dx_k\Big\|_1.$$

Para el último término basta con observar que la norma en $L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ es invariante al tomar adjuntos y que ξ_{k-1} conmuta con dx_k. De este modo, estimamos c del mismo modo que d. Esto concluye la prueba. El Teorema 3.11 tiene profundas implicaciones tanto en teoría de martingalas no conmutativas como a la hora de estimar constantes UMD de ciertos espacios de funciones no conmutativos, véase [Ra1] o la exposición de Xu en [Xu1].

3.5.2 Desigualdad de Burkholder-Gundy

Nos ocupamos ahora de la estimación de tipo débil asociada a la desigualdad de Burkholder-Gundy no conmutativa. En primer lugar definimos el espacio de Hardy $\mathcal{H}_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ en consonancia con $\mathcal{H}_p(\mathcal{M},\tau)$. En otras palabras, los espacios de Hardy *fila* y *columna* $\mathcal{H}_{1,\infty}^r(\mathcal{M},\tau)$ y $\mathcal{H}_{1,\infty}^c(\mathcal{M},\tau)$ se definen como la completación de las martingalas finitas en $L_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ respecto de las normas

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{1,\infty}^r(\mathcal{M},\tau)} = \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} dx_k dx_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty},$$

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{1,\infty}^c(\mathcal{M},\tau)} = \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} dx_k^* dx_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty}.$$

El **espacio de Hardy débil** $\mathcal{H}_{1,\infty}(\mathcal{M})$ se define entonces como

$$\mathcal{H}_{1,\infty}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}_{1,\infty}^r(\mathcal{M}) + \mathcal{H}_{1,\infty}^c(\mathcal{M}).$$

De acuerdo con [PX1], la segunda desigualdad en el Teorema 3.4 se satisface incluso para $p = 1$ como consecuencia de la dualidad entre $\mathcal{H}_1(\mathcal{M},\tau)$ and $\mathcal{BMO}(\mathcal{M},\tau)$. No así la primera. Es por tanto natural preguntarse si existe una formulación de tipo débil $(1,1)$ para dicha desigualdad. Randrianantoanina resolvió este problema en [Ra2]. No obstante, la prueba original es de nuevo demasiado técnica y susceptible de ser simplificada por medio de la descomposición de Gundy [PR].

Desafortunadamente y en contraste con lo que ocurre en la teoría clásica, la desigualdad de tipo débil que buscamos no se sigue de la descomposición de Gundy de forma trivial. Efectivamente, en el contexto conmutativo, dado $\lambda > 0$ uno prueba la desigualdad débil para dicho λ estimando por separado las tres partes de la descomposición de Gundy. Además, dichas estimaciones son automáticas utilizando la desigualdad de Chebychev y poco más, como hicimos por ejemplo en nuestra prueba del Teorema 3.11. La principal dificultad en el contexto no conmutativo reside en que, al ser $\mathcal{H}_{1,\infty}(\mathcal{M},\tau)$ un espacio que viene dado como suma de espacios de Banach, su norma es el ínfimo de las descomposiciones de x en suma de dos martingalas y y z. Esto nos conduce a buscar la descomposición $x = y + z$ adecuada antes de ser capaces de aplicar la descomposición de Gundy!! Nótese que uno podría pensar a priori que la misma dificultad aparece en la prueba del Teorema 3.4 para los exponentes $1 < p \leq 2$, pues los correspondientes espacios de Hardy son también sumas de espacios fila/columna. No obstante, en esa situación la dificultad se puede sortear probando el caso $2 \leq p < \infty$ y utilizando un argumento de dualidad.

La descomposición adecuada $x = y + z$ en suma de dos martingalas para obtener la estimación de tipo débil está dada por una descomposición triangular. Otra dificultad que aparece es que no podemos hacer las descomposiciones de Gundy de y y z por separado, porque ni siquiera sabemos que estén en $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Eso hace que la forma en la que la descomposición de Gundy ayuda a demostrar este resultado sea bastante sutil, véase [PR] para más detalles.

Teorema 3.12 *Sea $(\mathcal{M},\tau)$ un espacio de probabilidad no conmutativo. Dada una filtración $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$, sea $x=(x_n)_{n\geq 1}$ una martingala acotada en $L_2(\mathcal{M},\tau)$ adaptada a dicha filtración. Entonces x se puede escribir como suma $x=y+z$ de dos martingalas adaptadas a la misma filtración y que satisfacen la siguiente desigualdad para cierta constante absoluta c*

$$\Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} dy_k dy_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} + \Big\| \Big(\sum_{k\geq 1} dz_k^* dz_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} \leq c\|x\|_1.$$

La necesidad de que x esté acotada en $L_2(\mathcal{M},\tau)$ es una consecuencia de la descomposición triangular elegida y el problema de decidir si dicha hipótesis es evitable sigue abierto. No obstante, esto no supone un problema para obtener la principal aplicación del Teorema 3.12. A saber, existe una prueba alternativa del Teorema 3.4 combinando interpolación real y dualidad. De hecho, dicha prueba proporciona el orden óptimo de crecimiento de la constante α_p cuando $p\to 1$.

Corolario 3.13 *El comportamiento de α_p cuando $p\to 1$ es $\alpha_p \sim 1/(p-1)$.*

Observación 3.14 La descomposición de Gundy [PR] proporciona un nuevo modo de reconstruir la teoría conocida de martingalas no conmutativas. Efectivamente, los resultados expuestos sobre transformadas de martingalas y funciones cuadrado se siguen de dicha descomposición. Lo que de momento se queda al margen son las desigualdades maximales y las funciones cuadrado condicionales. Las primeras son de hecho necesarias (construcción de Cuculescu) para probar la descomposición de Gundy. En cuanto a las segundas, en seguida veremos que la descomposición de Gundy juega nuevamente un papel central.

3.5.3 Desigualdad de Burkholder/Rosenthal

Como ya hemos dicho, la formulación de la desigualdad de Burkholder para la función cuadrado condicional en el rango $1<p\leq 2$ es un resultado reciente (incluso en el contexto conmutativo) que se desprende del trabajo de Junge y Xu [JX1]. En particular, el problema de encontrar una desigualdad de tipo débil que complete el cuadro es bastante nuevo. Dicho problema se estudia en profundidad en [Pa4] para martingalas clásicas y de forma algo indirecta en [Ra3] para martingalas no conmutativas. La solución obtenida en [Pa4] es muy curiosa, pues parecen existir dos desigualdades de tipo débil no equivalentes que desempeñan ese papel. Nosotros nos centraremos fundamentalmente en el caso clásico, pero resumimos brevemente al final los resultados de [Ra3].

Observación 3.15 La desigualdad de Rosenthal es un caso particular de la de Burkholder. En particular, las desigualdades débiles que aquí presentamos también generalizan a la de Rosenthal. Recuérdese no obstante que esta generalización sólo tiene sentido para variables independientes (conmutativas o no) no así para variables libres, para las que hemos visto en la Sección 2 que se tienen desigualdades de tipo fuerte en L_1, véase el Teorema 2.15.

Antes de presentar las desigualdades de tipo débil, formulamos la desigualdad de Burkholder de una manera más conveniente. Sea $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ una filtración de σ-subálgebras en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con esperanzas condicionadas correspondientes $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \ldots$ Dado $1 < p < \infty$ y una martingala $f = (f_1, f_2, \ldots)$ acotada en $L_p(\Omega, \mu)$ y adaptada a esta filtración, tenemos

$$\|f\|_p \sim_{c_p} \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\inf_{f=g+h} \left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{k-1}(|dg_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |dh_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_p \right\} \\ \displaystyle\max \left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{k-1}(|df_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \, , \, \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_p \right\} \end{array} \right. , \tag{3.6}$$

de acuerdo como siempre con el valor de p. Por otro lado, el problema de determinar el comportamiento de la desigualdad de Burkholder en $L_1(\Omega, \mu)$ salió a la luz de forma natural como consecuencia del trabajo de Junge y Xu. De hecho, como se observa en [JX1], la estimación superior se satisface con una constante absoluta c

$$\|f\|_1 \leq c \inf_{f=g+h} \left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{k-1}(|dg_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_1 + \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} |dh_k| \Big\|_1 \right\}.$$

Para la otra desigualdad, nuestra primera estimación de tipo débil es la siguiente.

Teorema 3.16 *Dada una martingala $f = (f_1, f_2, \ldots)$ acotada en $L_1(\Omega, \mu)$, existe una descomposición de f como suma $f = g + h$ de dos martingalas adaptadas a la misma filtración y que satisfacen la siguiente desigualdad con cierta constante absoluta c*

$$\Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{k-1}(|dg_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} + \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} |dh_k| \Big\|_{1,\infty} \leq c \, \|f\|_1. \tag{3.7}$$

La primera dificultad que aparece en la demostración del Teorema 3.16 reside en el hecho de que necesitamos conjeturar cuál es la descomposición *adecuada* de f antes de estimar las normas de los correspondientes espacios de Hardy. Nótese que este problema se evitó en [JX1] utilizando un argumento de dualidad que no es válido en nuestro caso. La solución a este problema resulta elegante. De forma sorprendente, la descomposición adecuada está dada por la descomposición clásica de Davis [Da]. Una vez utilizada dicha descomposición, la prueba resulta algo complicada porque se hace necesario combinar a la vez las descomposiciones de Davis y Gundy.

Observación 3.17 La descomposición de Davis es una herramienta fundamental en desigualdades de martingalas. Davis la aplicó inicialmente en [Da] para probar su conocido teorema sobre la equivalencia en $L_1(\Omega, \mu)$ entre la función cuadrado de martingalas y la función maximal de Doob

$$\|f^*\|_1 \sim_c \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |df_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_1.$$

Tomando las funciones maximales truncadas

$$f_n^*(w) = \sup_{1\le k\le n} |f_k(w)|,$$

formulamos la **descomposición de Davis** $f = g + h$ por medio de las diferencias

$$\begin{aligned} dg_k &= df_k \chi_{\{f_k^* < 2f_{k-1}^*\}} - \mathsf{E}_{k-1}\big(df_k \chi_{\{f_k^* < 2f_{k-1}^*\}}\big), \\ dh_k &= df_k \chi_{\{f_k^* \ge 2f_{k-1}^*\}} - \mathsf{E}_{k-1}\big(df_k \chi_{\{f_k^* \ge 2f_{k-1}^*\}}\big). \end{aligned}$$

Es claro que dg_k y dh_k son diferencias de martingalas, de modo que g y h son martingalas adaptadas a la misma filtración que f. Las propiedades fundamentales de la descomposición de Davis son las siguientes

$$|dg_k| \le 8f_{k-1}^* \quad \text{y} \quad \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} |dh_k| \Big\|_p \le (4+4p)\, \|f^*\|_p \tag{3.8}$$

para $1 \le p < \infty$. La demostración de estas propiedades es bastante sencilla, en contraste con sus análogos de tipo débil que aparecen en el Teorema 3.16. En otras palabras, nuestra desigualdad de tipo débil también puede considerarse como una *mejora* de la descomposición de Davis (3.8). El lector interesado puede acudir a [Pa4] para una explicación más detallada.

El primer término a la izquierda de (3.7) es claramente el análogo débil del término correspondiente en (3.6). Sin embargo, el segundo término a la izquierda de (3.7) es sólo una posible interpretación del correspondiente término L_p. A saber, hemos elegido la norma $L_{1,\infty}$ de la variación absoluta de h. En otras palabras, la norma de la sucesión de diferencias de martingala dh en $L_{1,\infty}(\Omega,\mu;\ell_1)$. Esta elección está motivada por el hecho de que el término L_p es exactamente la norma de dh en $L_p(\Omega,\mu;\ell_p)$. En todo caso, otra posible interpretación aparece al escribir el espacio con valores vectoriales $L_p(\Omega,\mu;\ell_p)$ como un espacio con valores escalares $L_p(\Omega_{\oplus\infty},\mu_{\oplus\infty})$ donde la medida asociada es

$$\mu_{\oplus\infty}\Big(\bigoplus_{k\ge 1} \mathrm{A}_k \Big) = \sum_{k\ge 1} \mu(\mathrm{A}_k).$$

Visto así, el análogo débil de la p-variación está dado por

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \otimes dh_k \Big\|_{L_{1,\infty}(\Omega_{\oplus\infty})} = \sup_{\lambda>0} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big\{ |dh_k| > \lambda \Big\},$$

donde $(\delta_k)_{k\ge 1}$ denota la base canónica. En este momento es importante observar que las normas de $L_{1,\infty}(\Omega,\mu;\ell_1)$ y $L_{1,\infty}(\Omega_{\oplus\infty},\mu_{\oplus\infty})$ no son equivalentes, ni siquiera comparables. De hecho, tomando $\varphi_k = \chi_{[0,1/k]}$ y $\xi_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,1]}$, se tiene

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\mu\Big\{ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k > \lambda \Big\} \sim 1 << \log m \sim \sup_{\lambda>0} \lambda \sum_{k=1}^{m} \mu\Big\{ \varphi_k > \lambda \Big\},$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\mu\Big\{ \sum_{k=1}^m \xi_k > \lambda \Big\} \sim \log m >> 1 \sim \sup_{\lambda>0} \lambda \sum_{k=1}^m \mu\Big\{ \xi_k > \lambda \Big\}.$$

Con objeto de enunciar la segunda desigualdad de tipo débil, necesitamos recordar la noción de *filtración regular*. La filtración $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ se dice **k-regular** para cierta constante $\mathrm{k} > 1$ si toda martingala no negativa $f = (f_1, f_2, \ldots)$ adaptada a dicha filtración satisface $f_n \le \mathrm{k} f_{n-1}$. Todos los sistemas de Vilenkin acotados generan filtraciones regulares. En particular, las martingalas *diádicas* son las más conocidas de esta clase, véase [We] para más información.

Teorema 3.18 *Dada una martingala $f = (f_1, f_2, \ldots)$ acotada en $L_1(\Omega, \mu)$ adaptada a una filtración* k*-regular, existe una descomposición de f como suma $f = g + h$ de dos martingalas adaptadas a la misma filtración y que satisfacen la siguiente desigualdad con cierta constante absoluta c*

$$\Big\| \Big(\sum_{k=1}^\infty \mathsf{E}_{k-1}(|dg_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} + \Big\| \sum_{k=1}^\infty \delta_k \otimes dh_k \Big\|_{L_{1,\infty}(\Omega_{\oplus\infty})} \le c\mathrm{k}\, \|f\|_1. \tag{3.9}$$

La noción de k-regularidad es necesaria en muchas desigualdades de martingalas, véase por ejemplo [Br, BG] o el Capítulo 2 de [We]. No obstante, todavía no está claro si la k-regularidad es necesaria en el Teorema 3.18. En todo caso, nuestra segunda desigualdad de tipo débil presenta algunas ventajas. En primer lugar, a la hora de redemostrar (vía interpolación real y dualidad) la desigualdad de Burkholder el Teorema 3.16 no es apropiado (ver [Pa4] para más detalles), en contra de lo que ocurre con el Teorema 3.18. En segundo lugar, si no exigimos una descomposición en suma de martingalas, podemos prescindir de la k-regularidad.

Corolario 3.19 *Dada una martingala $f = (f_1, f_2, \ldots)$ acotada en $L_1(\Omega, \mu)$, existe una descomposición de cada f_n como suma $f_n = g_n + h_n$ de dos funciones* (*no necesariamente martingalas*) *adaptadas a la misma filtración y que satisfacen la siguiente desigualdad con cierta constante absoluta c*

$$\Big\| \Big(\sum_{k=1}^\infty \mathsf{E}_{k-1}(|dg_k|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{1,\infty} + \Big\| \sum_{k=1}^\infty \delta_k \otimes dh_k \Big\|_{L_{1,\infty}(\Omega_{\oplus\infty})} \le \mathrm{c}\, \|f\|_1.$$

En el contexto no conmutativo los resultados conocidos son más limitados. En concreto, Randrianantoanina probó de forma independiente [Ra3] la versión del Corolario 3.19 para martingalas no conmutativas. No obstante, los Teoremas 3.16 y 3.18 no se consideran allí. La principal aplicación que Randrianantoanina ha obtenido de este resultado es calcular las constantes óptimas en la desigualdad de Burkholder no conmutativa de Junge y Xu. Para una mayor comprensión de la estrecha relación que existe entre los trabajos [Pa4] y [Ra3], acúdase a la última sección de [Pa4]. Más concretamente, aunque esto no se menciona en el trabajo de Randrianantoanina, la descomposición de Davis aparece (de forma muy indirecta) en [Ra3].

3.6 Líneas de investigación

Cerramos esta sección con un resultado reciente sobre martingalas libres (definidas al comienzo de la sección) y revisando un problema abierto en la teoría. Más en concreto, en vista de la validez de las desigualdades de Khintchine y Rosenthal en L_∞ para variables aleatorias libres, es natural preguntarse si sucede lo mismo con la desigualdad de Burkholder-Gundy cuando trabajamos con martingalas libres. La respuesta es que dicha desigualdad *no se cumple.* Para ser más preciso, tomemos una familia infinita $(\mathcal{N}_n, \nu_n)_{n\geq 1}$ de espacios de probabilidad no conmutativos y sea

$$(\mathcal{M}, \tau) = \bigstar_{n\geq 1}(\mathcal{N}_n, \nu_n)$$

el correspondiente producto libre. Consideramos la filtración natural

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{N}_1 \star \mathcal{N}_2 \star \cdots \star \mathcal{N}_n.$$

Toda martingala adaptada a esta filtración es una *martingala libre.* Ahora, sea $\mathcal{K}_n$ la mejor constante para la que se satisface la estimación inferior de Burkholder-Gundy para todas las martingalas libres $x_1, x_2, \ldots$ en $L_\infty(\mathcal{M}, \tau)$

$$\max\left\{ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{2n} dx_k dx_k^* \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty, \ \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{2n} dx_k^* dx_k \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\infty \right\} \leq \mathcal{K}_n \Big\| \sum_{k=1}^{2n} dx_k \Big\|_\infty.$$

Entonces, el siguiente resultado se obtuvo en [JPX].

Teorema 3.20 *$\mathcal{K}_n$ satisface $\mathcal{K}_n \geq c \log n$ para cierta constante absoluta c.*

Pasamos ahora a enunciar un conocido problema abierto. Los espacios de Banach que satisfacen la propiedad UMD (*unconditional martingale differences*) juegan un papel esencial en Análisis Armónico Vectorial. Un espacio de Banach X es UMD cuando existen constantes finitas γ_p para todo $1 < p < \infty$ tales que

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k df_k \Big\|_{L_p(\Omega,\mu;\mathrm{X})} \leq \gamma_p \Big\| \sum_{k=1}^n df_k \Big\|_{L_p(\Omega,\mu;\mathrm{X})}$$

para toda martingala $f = (f_n)_{n\geq 1}$ acotada en $L_p(\Omega, \mu; \mathrm{X})$, toda familia de signos $\varepsilon_k = \pm 1$ y todo $n \geq 1$. En otras palabras, la correspondiente transformada de martingalas está acotada en $L_p(\Omega, \mu; \mathrm{X})$ para todo $1 < p < \infty$. Pisier demostró que la acotación para un cierto p implica la acotación para todos los p's. También es bien conocido, gracias a los trabajos de Bourgain y Burkholder, que el problema de decidir cuándo un espacio de Banach X es UMD es equivalente al de la acotación de la transformada de Hilbert en $L_p(\Omega, \mu; \mathrm{X})$.

En el contexto no conmutativo, Pisier introdujo en [Pi2] una generalización de la propiedad UMD para espacios de operadores. Dado $1 < p < \infty$ y un espacio de operadores X, decimos que X es UMD_p cuando existe una constante finita σ_p tal que

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k dx_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\mathrm{X})} \leq \sigma_p \Big\| \sum_{k=1}^n dx_k \Big\|_{L_p(\mathcal{M},\tau;\mathrm{X})}$$

para toda martingala $x = (x_n)_{n\geq 1}$ no conmutativa y acotada en $L_p(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$, toda familia de signos $\varepsilon_k = \pm 1$ y todo $n \geq 1$. Pisier conjeturó en [Pi2] que la propiedad UMD_p no depende de $1 < p < \infty$. Los últimos resultados en esta dirección aparecen en [Mu]. No obstante, este problema se ha resistido ya a varios intentos de solución. Por motivos en los que no nos vamos a detener, creemos que dicho problema tiene que ver con una versión *adecuada* de la descomposición de Davis para martingalas no conmutativas. Combinada con la descomposición de Gundy [PR], proporcionaría una herramienta muy fuerte para abordar dichos problemas.

La conjetura de Pisier evidencia que no existe todavía una *teoría vectorial* de martingalas no conmutativas bien establecida. Esto conduce de forma natural a la necesidad de definir los espacios de Lorentz $L_{p,q}(\mathcal{M}, \tau; \mathrm{X})$ con valores en cierto espacio de operadores X, pues sería necesario trabajar con desigualdades de tipo débil. Este problema ya fue mencionado en la Sección 1.

A. Espacios de operadores

Un **espacio de operadores** es un espacio de Banach X dotado de una inclusión isométrica $j : \mathrm{X} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores lineales y acotados en cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Con un pequeño abuso de notación, identificaremos X con $j(\mathrm{X})$. Así, un espacio de operadores es simplemente un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Debido al teorema de Gelfand-Naimark-Segal, también podemos identificar a los espacios de operadores como subespacios cerrados de C*-álgebras.

Sea $\mathrm{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un espacio de operadores y $M_n(\mathrm{X}) = M_n \otimes \mathrm{X}$ el espacio de las matrices $n \times n$ con entradas en X. Si $\ell^2_{\mathcal{H}}(n)$ denota el espacio de Hilbert formado por vectores de longitud n y entradas en $\mathcal{H}$ con su producto interior habitual

$$M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \simeq \mathcal{B}(\ell^2(n)) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{B}(\ell^2_{\mathcal{H}}(n)).$$

Esto proporciona una estructura natural de espacio de operadores para $M_n(\mathrm{X})$, identificándolo como subespacio de $\mathcal{B}(\ell^2_{\mathcal{H}}(n))$. Sea ahora $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ una aplicación lineal entre espacios de operadores y denotemos por id_{M_n} al operador identidad en M_n. Definimos $\Lambda_n : M_n(\mathrm{X}_1) \to M_n(\mathrm{X}_2)$ por la relación $\Lambda_n(x_{ij}) = (\Lambda(x_{ij}))$ o, lo que es lo mismo, $\Lambda_n = id_{M_n} \otimes \Lambda$. Entonces diremos que $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ es **completamente acotada** cuando

$$\|\Lambda\|_{cb} = \sup_{n \geq 1} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{B}(M_n(\mathrm{X}_1), M_n(\mathrm{X}_2))} < \infty.$$

Denotaremos por $\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ al espacio de los operadores completamente acotados de X_1 en X_2 equipado con la norma *cb*. Por supuesto se tiene $\Lambda_1 = \Lambda$, de donde $\|\Lambda\| \leq \|\Lambda\|_{cb}$. Por tanto $\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ es un subespacio de $\mathcal{B}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$, el espacio de los operadores acotados de X_1 en X_2.

Una vez definida la acotación completa surgen nuevas definiciones paralelas a las que ya existen en la teoría de espacios de Banach. Así por ejemplo, diremos que $\Lambda \in \mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ es una **isometría completa** si Λ_n es una isometría para todo $n \geq 1$. Análogamente, una aplicación $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ entre espacios de operadores es **completamente contractiva** si $\|\Lambda\|_{cb} \leq 1$. Dos espacios de operadores X_1 y X_2 son completamente isomorfos si existe un **isomorfismo completo** entre ambos. Es decir, un isomorfismo lineal $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ completamente acotado con inverso completamente acotado. Por último diremos que $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ es un **isomorfismo completamente isométrico** si es un isomorfismo lineal y una isometría completa al mismo tiempo. Así, diremos que X_1 y X_2 son **completamente isométricos**.

Observación A.1 En lo que sigue, dos espacios de operadores serán considerados idénticos si existe un isomorfismo completamente isométrico entre ambos. Por tanto no es del todo correcto afirmar que un espacio de operadores es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Más bien deberíamos decir que un espacio de operadores es una clase de equivalencia de tales subespacios, donde la relación de equivalencia viene dada por la existencia de un isomorfismo completamente isométrico entre los espacios de operadores considerados.

En la teoría de espacios de operadores existe un sustituto natural de la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios de Banach. Se trata de la **distancia** *cb* que fue introducida por Pisier y se define como sigue. Sean dos espacios de operadores completamente isomorfos X_1 y X_2, entonces

$$d_{cb}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \inf \Big\{ \|\Lambda\|_{cb} \|\Lambda^{-1}\|_{cb} \; \big| \; \Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2 \;\; \text{es isomorfismo completo} \Big\}.$$

Los operadores completamente acotados aparecieron al principio de los años 80 de forma independiente en los trabajos de Haagerup [H3], Paulsen [Pl] y Wittstock [W1, W2]. Nótese que todos estos trabajos son anteriores a la definición de espacio de operadores. Sea X un espacio vectorial complejo, diremos que X posee una **estructura matricial** cuando para cada $n \geq 1$ se tenga una norma α_n definida en el espacio $M_n(\mathrm{X})$. Diremos que la estructura matricial es **completa** cuando todas las normas mencionadas den lugar a espacios de Banach. Por último se dice que X posee una **estructura L_∞-matricial** cuando la sucesión de normas $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ satisface los siguientes axiomas:

($\mathbf{R_1}$) Dados $n \geq 1$, $\gamma_1, \gamma_2 \in M_n$ y $a \in M_n(\mathrm{X})$, se tiene que

$$\alpha_n(\gamma_1 a \gamma_2) \leq \|\gamma_1\|_{\mathcal{B}(\ell_2(n))} \, \alpha_n(a) \, \|\gamma_2\|_{\mathcal{B}(\ell_2(n))}.$$

($\mathbf{R_2}$) Dados $n_1, n_2 \geq 1$, $a_1 \in M_{n_1}(\mathrm{X})$ y $a_2 \in M_{n_2}(\mathrm{X})$, se tiene que

$$\alpha_{n_1+n_2}(a_1 \oplus a_2) = \max \Big\{ \alpha_{n_1}(a_1), \alpha_{n_2}(a_2) \Big\}.$$

Es habitual referirse a un espacio de Banach como el resultado de completar un espacio normado. El Teorema de Ruan, que presentamos a continuación, nos permitirá adoptar el mismo punto de vista en el caso de los espacios de operadores. Se trata del resultado central de [Ru].

Teorema A.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(**a**) *Las sucesión $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ forma una estructura L_∞-matricial completa.*

(**b**) *Existe una inclusión lineal $j : \mathrm{X} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

$$id_{M_n} \otimes j : \big(M_n(\mathrm{X}), \alpha_n \big) \to \Big(M_n(j(\mathrm{X})), \| \; \|_{\mathcal{B}(\ell^2_{\mathcal{H}}(n))} \Big)$$

es una isometría para todo entero positivo $n \geq 1$.

A.1 Cocientes y dualidad

Sea X un espacio de operadores y Z un subespacio cerrado de X. Utilizando

$$M_n(\mathrm{X}/\mathrm{Z}) \simeq M_n(\mathrm{X})/M_n(\mathrm{Z})$$

para todo $n \geq 1$, podemos dotar a X/Z de una estructura matricial imponiendo en $M_n(\mathrm{X}/\mathrm{Z})$ la norma inducida por $M_n(\mathrm{X})/M_n(\mathrm{Z})$ para cada $n \geq 1$. Es fácil comprobar que de este modo obtenemos una estructura de espacio de operadores en $\mathrm{X/Z}$. Nos referiremos a este espacio como **espacio de operadores cociente**. Sean ahora X_1 y X_2 dos espacios de operadores. De la identificación natural

$$M_n(\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)) \simeq \mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, M_n(\mathrm{X}_2))$$

obtenemos una estructura matricial para $\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$. Resulta que esta estructura es L_∞-matricial completa y por tanto proporciona una estructura de espacio de operadores en $\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$. Dado un espacio de operadores X, esto nos permite definir el **espacio de operadores dual** de X como el espacio $\mathcal{CB}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ con la estructura de espacio de operadores mencionada. Esta definición plantea el siguiente problema. Por un lado, el dual de X como espacio de Banach es $\mathrm{X}^* = \mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ y por otro tenemos $\mathrm{X}^* = \mathcal{CB}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ como espacio de operadores. De modo que se debería dar la igualdad $\|\xi\|_{cb} = \|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. Afortunadamente es así puesto que la única cuantización posible para $\mathbb{C}$ es la *cuantización minimal*, véase [ER, Pi4] para más detalles. Las propiedades habituales de la dualidad en la teoría de los espacios de Banach siguen siendo válidas.

Proposición A.3 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(**a**) *La inclusión natural* $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^{**}$ *de* X *en su bidual es una isometría completa.*

(**b**) *Los isomorfismos* $\mathrm{Z}^* \simeq \mathrm{X}^*/\mathrm{Z}^\perp$ *y* $(\mathrm{X}/\mathrm{Z})^* \simeq \mathrm{Z}^\perp$ *son completamente isométricos.*

(**c**) *Dado* $\Lambda : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$*, el operador adjunto* $\Lambda^* \colon \mathrm{X}_2^* \to \mathrm{X}_1^*$ *satisface* $\|\Lambda^*\|_{cb} = \|\Lambda\|_{cb}$.

A.2 Productos tensoriales

Dados $a \in M_{n_1}(\mathrm{X}_1)$ y $b \in M_{n_2}(\mathrm{X}_2)$, definimos

$$a \otimes b = \big(a_{ij} \otimes b_{kl}\big) \in M_{n_1 n_2}\big(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2\big).$$

Supongamos que tenemos una estructura L_∞-matricial $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ en $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$. Decimos entonces que γ es una **norma tensorial** en $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ si para todo par a, b con las características anteriores se tiene que

$$\gamma_{n_1 n_2}(a \otimes b) = \|a\|_{M_{n_1}(\mathrm{X}_1)} \|b\|_{M_{n_2}(\mathrm{X}_2)}.$$

$\mathrm{X}_1 \otimes_\gamma \mathrm{X}_2$ denotará el espacio de operadores que resulta de completar la estructura L_∞-matricial $(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2, \gamma)$. En la teoría de espacios de Banach, los resultados más relevantes sobre normas tensoriales se deben a Grothendieck [DF, Gr]. En estas notas revisamos las tres normas tensoriales más importantes en la categoría de espacios de operadores.

(**a**) Sean X_1 y X_2 dos espacios de operadores incluidos de forma isométrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ respectivamente. Definimos el **producto tensorial minimal** $\mathrm{X}_1 \otimes_{\min} \mathrm{X}_2$ como el resultado de completar $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ (tensor algebraico) respecto de la norma inducida por el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2)$, donde $\mathcal{H}_1 \otimes_2 \mathcal{H}_2$ denota el producto tensorial hilbertiano. Se tiene por ejemplo que la norma que se impuso en $M_n(\mathrm{X}) = M_n \otimes \mathrm{X}$ para definir los operadores completamente acotados es precisamente la norma tensorial minimal $M_n \otimes_{\min} \mathrm{X}$. Podemos así expresar la norma cb de un operador $\Lambda : E_1 \to E_2$ como

$$\|\Lambda\|_{cb(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)} = \sup_{n\geq 1} \|id_{M_n} \otimes \Lambda\|_{\mathcal{B}(M_n\otimes_{\min}\mathrm{X}_1, M_n\otimes_{\min}\mathrm{X}_2)}.$$

(b) Sean X_1 y X_2 espacios de operadores y tomemos un elemento $a \in M_n(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2)$. Consideramos descomposiciones de a de la forma $a = \alpha(a_1 \otimes a_2)\beta$, donde $\alpha \in M_{n,n_1n_2}$, $a_1 \in M_{n_1}(\mathrm{X}_1)$, $a_2 \in M_{n_2}(\mathrm{X}_2)$ y $\beta \in M_{n_1n_2,n}$. Definimos entonces la siguiente norma en $M_n(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2)$

$$\|a\|_n = \inf\Big\{\|\alpha\|_{\mathcal{B}(\ell_2(n_1n_2),\ell_2(n))}\|a_1\|_{M_{n_1}(\mathrm{X}_1)}\|a_2\|_{M_{n_2}(\mathrm{X}_2)}\|\beta\|_{\mathcal{B}(\ell_2(n),\ell_2(n_1n_2))}\Big\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de a en la forma dada. Estas normas son una estructura matricial en $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ que cumple los axiomas de Ruan. El **producto tensorial proyectivo** $\mathrm{X}_1 \widehat{\otimes} \mathrm{X}_2$ se define como el espacio de operadores que resulta de completar el producto tensorial algebraico $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ respecto de esta estructura matricial.

(c) Dado un espacio de operadores X, denotaremos por $M_{p,q}(\mathrm{X})$ al espacio $M_{p,q} \otimes \mathrm{X}$ de las matrices $p \times q$ con entradas en X. Añadiendo ceros si es preciso, podemos considerar al espacio $M_{p,q}$ como subespacio de M_n con $n = \max(p, q)$. Esto nos permite imponer en $M_{p,q}(\mathrm{X})$ la estructura de espacio de operadores dada por $M_{p,q} \otimes_{\min} \mathrm{X}$. Sean ahora dos espacios de operadores X_1 y X_2. Dados $a \in M_{p,r}(\mathrm{X}_1)$ y $b \in M_{r,q}(\mathrm{X}_2)$ definimos el producto

$$a \odot b = \Big(\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \otimes b_{kj} \Big) \in M_{p,q}(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2).$$

Por último, si $a \in M_n(\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2)$, definimos la norma

$$\|a\|_n = \inf\Big\{\|a_1\|_{M_{n,m}(\mathrm{X}_1)}\|a_2\|_{M_{m,n}(\mathrm{X}_2)}\Big\}$$

donde el ínfimo recorre todas las descomposiciones de la forma $a = a_1 \odot a_2$ con $a_1 \in M_{n,m}(\mathrm{X}_1)$, $a_2 \in M_{m,n}(\mathrm{X}_2)$ y $m \geq 1$. Nuevamente, esta sucesión de normas proporciona una estructura L_∞-matricial. El **producto tensorial de Haagerup** $\mathrm{X}_1 \otimes_h \mathrm{X}_2$ se define como el resultado de completar $\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{X}_2$ respecto de la estructura matricial dada.

Observación A.4 No mencionamos aquí las propiedades principales de las tres normas tensoriales consideradas arriba. El lector interesado puede acudir a las monografías [ER] y [Pi4] para una exposición mucho más detallada. En el Capítulo 1 de [Pa1] aparece un resumen bastante condensado de las mismas.

A.3 Interpolación compleja

En 1960 Calderón [Ca] introdujo el método de interpolación compleja para espacios de Banach. Sean X_0 y X_1 espacios de Banach sobre el cuerpo de los números complejos. Recuérdese que $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ es un *par compatible* cuando ambos espacios están incluidos de manera lineal y continua en un espacio vectorial topológico X. Imponemos entonces en el espacio $\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{X}_1$ la norma

$$\|x\|_{\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{X}_1} = \max \Big\{ \|x\|_{\mathrm{X}_0}, \|x\|_{\mathrm{X}_1} \Big\}.$$

También definimos en $\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1$ la norma

$$\|x\|_{\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1} = \inf \Big\{ \|x_0\|_{\mathrm{X}_0} + \|x_1\|_{\mathrm{X}_1} \, \Big| \, x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in \mathrm{X}_0, \quad x_1 \in \mathrm{X}_1 \Big\}.$$

Consideramos la siguiente región del plano complejo

$$\mathcal{S} = \Big\{ z \in \mathbb{C} \, \Big| \, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \Big\}$$

y la partición de su frontera $\partial \mathcal{S}$

$$\partial_0 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \, \Big| \, \mathrm{Re}(z) = 0 \Big\} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \, \Big| \, \mathrm{Re}(z) = 1 \Big\}.$$

Denotaremos por $\Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ al conjunto de todas las funciones acotadas y continuas $f : \overline{\mathcal{S}} \to \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1$ que son analíticas en $\mathcal{S}$ y tales que su restricción a ∂_0 y ∂_1 son funciones continuas y acotadas con valores en X_0 y X_1 respectivamente. Si además dotamos a $\Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ de la norma

$$\|f\|_{\Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)} = \max \Big\{ \sup_{z \in \partial_0} \|f(z)\|_{\mathrm{X}_0}, \sup_{z \in \partial_1} \|f(z)\|_{\mathrm{X}_1} \Big\}$$

obtenemos una estructura de espacio de Banach para $\Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$. Sea $0 < \theta < 1$, decimos que $x \in \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1$ pertenece al espacio de interpolación $\mathrm{X}_\theta = [\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1]_\theta$ si existe $f \in \Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ tal que $f(\theta) = x$. La norma

$$\|x\|_{\mathrm{X}_\theta} = \inf \Big\{ \|f\|_{\Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)} \, \Big| \, f \in \Phi(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1), \quad f(\theta) = x \Big\}$$

proporciona a X_θ una estructura de espacio de Banach. Una vez revisado el método de interpolación compleja para espacios de Banach, ahora supongamos que X_0 y X_1 son además espacios de operadores. Es claro que $M_n(\mathrm{X}_0)$ y $M_n(\mathrm{X}_1)$ forman un par compatible dado que $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ también lo es. El siguiente paso parece obvio, imponemos en X_θ la estructura matricial interpolada identificando isométricamente $M_n(\mathrm{X}_\theta) \simeq (M_n(\mathrm{X}_0), M_n(\mathrm{X}_1))_\theta$. Se comprueba que tal imposición satisface los dos axiomas de la caracterización de Ruan y definimos así el **espacio de operadores interpolado** X_θ. Existen también estructuras naturales de espacio de operadores para los espacios $\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{X}_1$ y $\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1$, véase [Pi1] para más información. El método complejo para espacios de operadores satisface las siguientes propiedades.

Teorema A.5 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(**a**) *Sean* $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ *y* $(\mathrm{Z}_0, \mathrm{Z}_1)$ *pares compatibles de espacios de operadores. Sea* $\Lambda : \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Z}_0 + \mathrm{Z}_1$ *un operador lineal, entonces* $\Lambda : \mathrm{X}_\theta \to \mathrm{Z}_\theta$ *y se tiene la desigualdad*

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{CB}(\mathrm{X}_\theta, \mathrm{Z}_\theta)} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{CB}(\mathrm{X}_0, \mathrm{Z}_0)}^{1-\theta} \|\Lambda\|_{\mathcal{CB}(\mathrm{X}_1, \mathrm{Z}_1)}^{\theta}.$$

(**b**) *Sea* $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ *un par compatible de espacios de operadores. Consideremos los espacios de interpolación* $\mathrm{X}_{\theta_0} = (\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)_{\theta_0}$ *y* $\mathrm{X}_{\theta_1} = (\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)_{\theta_1}$ *para ciertos* $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$. *Sea* $\theta = (1-\alpha)\theta_0 + \alpha\theta_1$ *para cierto* $0 < \alpha < 1$. *Entonces, el isomorfismo isométrico* $\mathrm{X}_\theta \simeq (\mathrm{X}_{\theta_0}, \mathrm{X}_{\theta_1})_\alpha$ *es completamente isométrico.*

(**c**) *El producto tensorial de Haagerup conmuta con el functor de interpolación compleja entre espacios de operadores. Es decir, tenemos un isomorfismo completamente isométrico*

$$(\mathrm{X}_0 \otimes_h \mathrm{Z}_0, \mathrm{X}_1 \otimes_h \mathrm{Z}_1)_\theta \simeq (\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)_\theta \otimes_h (\mathrm{Z}_0, \mathrm{Z}_1)_\theta$$

cuando $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ *y* $(\mathrm{Z}_0, \mathrm{Z}_1)$ *son pares compatibles de espacios de operadores.*

El método de interpolación complejo para espacios de operadores apareció en 1996 gracias al trabajo de Pisier [Pi1]. Nosotros hemos presentado sólo algunos de los resultados que aparecen allí. Existe también una versión del *método de interpolación real* para espacios de operadores [Xu2] debida a Xu.

Observación A.6 Muchos conceptos básicos en la teoría de espacios de operadores no han sido siquiera mencionados en este resumen. Entre otras nociones centrales, hemos obviado la definición del espacio de operadores OH de Pisier (el análogo a los espacios de Hilbert en la categoría de espacios de operadores), la construcción de ultraproductos de familias de espacios de operadores, las cuantizaciones maximal y minimal, etc... El lector interesado puede acudir a los textos [ER] y [Pi4].

B. Integración no conmutativa

Los espacios L_p sobre álgebras de von Neumann no semifinitas aparecen de forma natural en Probabilidad Cuántica. Existen dos construcciones compatibles de L_p en este contexto general. A saber, los espacios L_p de Haagerup y los espacios de interpolación de Kosaki. Revisamos aquí estas construcciones, así como la noción de esperanza condicionada para estos espacios.

B.1 Espacios L_p de Haagerup

Sea $(\mathcal{M}, \varphi)$ un álgebra de von Neumann con un estado normal y fiel. La construcción GNS (Gelfand-Naimark-Segal) aplicada a φ da lugar a una representación fiel ρ de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, de manera que $\rho(\mathcal{M})$ es un álgebra de von Neumann actuando en $\mathcal{H}$ con un vector unitario u que satisface $\varphi(x) = \langle u, \rho(x)u \rangle$ para todo $x \in \mathcal{M}$. En lo que sigue identificamos $\mathcal{M}$ con $\rho(\mathcal{M})$. Entonces, el *operador modular* Δ es el operador generalmente no acotado que se obtiene de la descomposición polar $S = J\Delta^{1/2}$ de la aplicación anti-lineal $S : \mathcal{M}u \to \mathcal{M}u$ dada por $S(xu) = x^*u$, véase la Sección 9.2 de [KR2] o [Ta1]. Denotaremos por $\sigma_s : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ al *grupo modular* asociado al estado φ. En otras palabras, dado $s \in \mathbb{R}$ tenemos un automorfismo de $\mathcal{M}$ dado por

$$\sigma_s(x) = \Delta^{is} x \Delta^{-is}.$$

Entonces consideramos el producto semidirecto $\mathcal{R} = \mathcal{M} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$, que se define como el álgebra de von Neumann que actúa en $L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ y está generado por las representaciones $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}))$ y $\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}))$ con

$$\big(\pi(x)\xi\big)(s) = \sigma_{-s}(x)\xi(s) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda(t)\xi\big)(s) = \xi(s-t)$$

para $s \in \mathbb{R}$ y $\xi \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Nótese que la representación π es fiel, de manera que podemos identificar $\mathcal{M}$ con $\pi(\mathcal{M})$. La *acción dual* de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{R}$ se define como sigue. Sea $\mathrm{W} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H}))$ la representación unitaria $\big(\mathrm{W}(s)\xi\big)(t) = e^{-ist}\xi(t)$. Entonces definimos el grupo 1-paramétrico de automorfismos $\hat{\sigma}_s : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ como

$$\hat{\sigma}_s(x) = \mathrm{W}(s) x \mathrm{W}(s)^*.$$

Resulta que $\mathcal{M}$ es el espacio de puntos fijos de la acción dual

$$\mathcal{M} = \Big\{ x \in \mathcal{R} \, \big| \, \hat{\sigma}_s(x) = x \ \text{ para todo } \ s \in \mathbb{R} \Big\}.$$

De acuerdo con [PT], el producto semidirecto $\mathcal{R}$ es un álgebra de von Neumann semifinita y admite una única traza *n.s.f.* τ que satisface $\tau \circ \hat{\sigma}_s = e^{-s}\tau$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Sea $L_0(\mathcal{R}, \tau)$ la $*$-álgebra topológica de operadores τ-medibles afiliados con $\mathcal{R}$ y sea $0 < p \leq \infty$. El **espacio L_p no conmutativo de Haagerup** sobre $\mathcal{M}$ se define como

$$L_p(\mathcal{M}, \varphi) = \Big\{ x \in L_0(\mathcal{R}, \tau) \, \big| \, \hat{\sigma}_s(x) = e^{-s/p} x \ \text{ para todo } \ s \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Es claro por definición que $L_\infty(\mathcal{M}, \varphi)$ coincide con $\mathcal{M}$. Además, como es esperable $L_1(\mathcal{M}, \varphi)$ se puede identificar canónicamente con el predual $\mathcal{M}_*$ del álgebra de von

Neumann $\mathcal{M}$. Esto exige una pequeña explicación. Dado un peso *n.s.f.* $\omega \in \mathcal{M}_*^+$, el *peso dual* $\tilde{\omega} : \mathcal{R}_+ \to [0, \infty]$ se define como

$$\tilde{\omega}(x) = \omega\Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{\sigma}_s(x)\, ds \Big).$$

Observamos que, debido a la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue, la integral vectorial de arriba es invariante por la acción dual. En particular, se puede interpretar como un elemento de $\mathcal{M}$. Como peso *n.s.f.* en $\mathcal{R}$ y de acuerdo con [PT], el peso dual $\tilde{\omega}$ tiene una derivada de Radon-Nikodym h_ω respecto de τ de forma que

$$\tilde{\omega}(x) = \tau(h_\omega x)$$

para todo $x \in \mathcal{R}_+$. El operador h_ω así definido pertenece a $L_1(\mathcal{M}, \varphi)_+$ pues

$$\tau(h_\omega \hat{\sigma}_t(x)) = \omega\Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{\sigma}_s(\hat{\sigma}_t(x))\, ds \Big) = \omega\Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{\sigma}_s(x)\, ds \Big) = \tau(h_\omega x).$$

En particular,

$$\tau(\hat{\sigma}_t(h_\omega) \hat{\sigma}_t(x)) = e^{-t} \tau(h_\omega x) = e^{-t} \tau(h_\omega \hat{\sigma}_t(x)) \quad \text{para todo} \qquad x \in \mathcal{R},$$

lo que implica que $\hat{\sigma}_t(h_\omega) = e^{-t} h_\omega$. Por consiguiente, existe una biyección entre $\mathcal{M}_*^+$ y $L_1(\mathcal{M}, \varphi)_+$ que se extiende a una biyección entre el predual $\mathcal{M}_*$ y $L_1(\mathcal{M}, \varphi)$ por descomposición polar

$$\omega = u|\omega| \in \mathcal{M}_* \mapsto u h_{|\omega|} = h_\omega \in L_1(\mathcal{M}, \varphi).$$

De hecho, después de imponer en $L_1(\mathcal{M}, \varphi)$ la norma

$$\|h_\omega\|_1 = |\omega|(1) = \|\omega\|_{\mathcal{M}_*},$$

obtenemos una isometría entre $\mathcal{M}_*$ y $L_1(\mathcal{M}, \varphi)$. Existe no obstante una forma más agradable de describir esta norma. Como ya hemos visto, para todo $x \in L_1(\mathcal{M}, \varphi)$ existe un único $\omega_x \in \mathcal{M}_*$ tal que $h_{\omega_x} = x$. Esto da lugar al funcional

$$\mathrm{tr} : L_1(\mathcal{M}, \varphi) \to \mathbb{C}$$

llamado *traza* y definido como

$$\mathrm{tr}(x) = \omega_x(1).$$

El funcional tr es continuo puesto que $|\mathrm{tr}(x)| \leq \mathrm{tr}\big(|x|\big) = \|x\|_1$ y satisface la propiedad tracial $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$. Nuestro estado φ se puede recuperar desde tr como sigue. Primero notamos como antes que su peso dual $\tilde{\varphi}$ admite una derivada de Radon-Nikodym d_φ respecto de τ, de forma que $\tilde{\varphi}(x) = \tau(d_\varphi x)$ para $x \in \mathcal{R}_+$. Entonces resulta que

$$\varphi(x) = \mathrm{tr}(d_\varphi x) \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{M}.$$

De acuerdo con esto, nos referiremos en lo que sigue a d_φ como la *densidad* de φ. Dado $0 < p < \infty$ y $x \in L_p(\mathcal{M}, \varphi)$, definimos

$$\|x\|_p = \big(\mathrm{tr}|x|^p\big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \|x\|_{\mathcal{M}}.$$

$\| \ \|_p$ es una norma (resp. p-norma) en $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$ para $1 \le p \le \infty$ (resp. $0 < p < 1$). Los espacios L_p de Haagerup satisfacen:

- **Desigualdad de Hölder.** Si $1/r = 1/p + 1/q$

$$\|xy\|_r \le \|x\|_p \|y\|_q \quad \forall\, x \in L_p(\mathcal{M}, \varphi),\ y \in L_q(\mathcal{M}, \varphi).$$

- **Dualidad.** Si $1 \le p < \infty$, $L_p(\mathcal{M}, \varphi)^* \simeq L_{p'}(\mathcal{M}, \varphi)$ vía

$$x \in L_{p'}(\mathcal{M}, \varphi) \mapsto \mathrm{tr}(x^* \cdot) \in L_p(\mathcal{M}, \varphi)^*.$$

Observación B.1 Debido a nuestros propósitos, sólo hemos considerado álgebras finitas equipadas con estados normales y fieles (no traciales, por supuesto) en lugar de trabajar con álgebras de von Neumann generales, equipadas con pesos *n.s.f.* Para una exposición más detallada de la teoría se puede acudir al trabajo original de Haagerup [H2] y a la (excelente) exposición de Terp [Te1].

B.2 Interpolación de Kosaki

La definición de espacio L_p de Haagerup tiene la desventaja de que la intersección de $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$ y $L_q(\mathcal{M}, \varphi)$ es trivial para $p \neq q$. En particular, estos espacios no forman una familia de interpolación. Todas estas dificultades desaparecen con la construcción de Kosaki. Como antes, sólo consideramos álgebras de von Neumann finitas equipadas con estados *n.f.* La construcción general para toda álgebra de von Neumann se puede consultar en [Ko] y [Te2]. Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad no tracial. En primer lugar definimos

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi) = \mathcal{M}_*^{\mathrm{op}}.$$

Notamos aquí que esta elección está motivada por la teoría de espacios de operadores, véase [Pi4] para más información. Entonces, dado un número real s, consideramos la aplicación

$$j_s : x \in \mathcal{M} \mapsto \sigma_s(x)\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi) \quad \text{con} \quad \big(\sigma_s(x)\varphi\big)(y) = \varphi(\sigma_s(x)y).$$

De acuerdo con [Ko] existe una única extensión $j_z : \mathcal{M} \to \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi)$ tal que, para todo $0 \le \eta \le 1$, la aplicación $j_{-i\eta}$ es inyectiva. En particular, $(j_{-i\eta}(\mathcal{M}), \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi))$ es un par compatible y definimos así el **espacio L_p no conmutativo de Kosaki** como sigue

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}, \varphi, \eta) = \big[j_{-i\eta}(\mathcal{M}), \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi)\big]_{\frac{1}{p}},$$

especificando

$$\|x\|_0 = \|j_{-i\eta}^{-1}(x)\|_{\mathcal{M}} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \|x\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \varphi)}.$$

El siguiente resultado se prueba en [H2] excepto la última isometría [Ko].

Teorema B.2 *Dado $1 \leq p \leq \infty$ y un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$:*

(a) *Si φ_1 y φ_2 son dos estados n.f. en $\mathcal{M}$, tenemos*

$$L_p(\mathcal{M}, \varphi_1) = L_p(\mathcal{M}, \varphi_2).$$

(b) *Si φ es un estado n.f. y $0 \leq \eta \leq 1$, tenemos*

$$L_p(\mathcal{M}, \varphi) = \mathcal{L}_p(\mathcal{M}, \varphi, \eta).$$

Más concretamente, dado $x \in \mathcal{M}$

$$\|j_{-i\eta}(x)\|_{\mathcal{L}_p(\mathcal{M},\varphi,\eta)} = \left\| d_\varphi^{\frac{\eta}{p}} \, x \, d_\varphi^{\frac{1-\eta}{p}} \right\|_{L_p(\mathcal{M},\varphi)}.$$

El Teorema B.2 nos asegura que los espacios L_p de Haagerup y Kosaki se pueden identificar. En particular, podemos utilizar el método de interpolación complejo para interpolar los espacios L_p de Haagerup. También es importante observar que la definición de L_p de Kosaki presenta otras desventajas que no aparecen en la definición de Haagerup. La lacra principal es la ausencia de conos positivos y el hecho de que el caso $0 < p < 1$ se excluye de la definición.

B.3 Esperanzas condicionadas

Sea $(\mathcal{M}, \tau)$ un espacio de probabilidad no necesariamente tracial y sea $\mathcal{N}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$. Una **esperanza condicionada** $\mathsf{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una proyección positiva y contractiva. E se dice que es *fiel* si $\mathsf{E}(x^*x) = 0$ implica que $x = 0$ y que es *normal* cuando tiene un operador predual $\mathsf{E}_* : \mathcal{M}_* \to \mathcal{N}_*$. De acuerdo con Takesaki [Ta2], si $\mathcal{N}$ es invariante por la acción del grupo modular (i.e. $\sigma_s(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ para todo $s \in \mathbb{R}$) existe una única esperanza condicionada normal y fiel $\mathsf{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que satisface $\varphi \circ \mathsf{E} = \varphi$. Además, siguiendo a Connes [Co], E conmuta con el grupo modular

$$\mathsf{E} \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \mathsf{E}.$$

La invarianza de $\mathcal{N}$ bajo la acción de σ_s implica que el grupo modular asociado a $\mathcal{N}$ coincide con la restricción de σ a $\mathcal{N}$. Se deduce entonces que $\mathcal{N} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$. En particular, el espacio $L_p(\mathcal{N}, \varphi)$ se puede identificar isométricamente con un subespacio de $L_p(\mathcal{M}, \varphi)$, véase [JX1] para los detalles.

Es bien conocido que en el caso tracial la esperanza condicionada E se extiende a una proyección contractiva $L_p(\mathcal{M}, \varphi) \to L_p(\mathcal{N}, \varphi)$, que sigue siendo positiva y bimodular. Estas propiedades siguen siendo válidas en el contexto no tracial. En la siguiente lista resumimos las propiedades de E probadas en [JX1].

- Si $1 \leq p \leq \infty$ y $x \in \mathcal{M}$,

$$\mathsf{E}(d_\varphi^{\frac{1}{p}} x) = d_\varphi^{\frac{1}{p}} \mathsf{E}(x) \quad \text{y} \quad \mathsf{E}(x d_\varphi^{\frac{1}{p}}) = \mathsf{E}(x) d_\varphi^{\frac{1}{p}}.$$

- Si $2 \leq p \leq \infty$ y $x \in L_p(\mathcal{M}, \varphi)$, tenemos
$$\mathsf{E}(x)^* \, \mathsf{E}(x) \leq \mathsf{E}(x^* x).$$
- Si $a \in L_p(\mathcal{N}, \varphi), x \in L_q(\mathcal{M}, \varphi), b \in L_r(\mathcal{N}, \varphi)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$,
$$\mathsf{E}(axb) = a\mathsf{E}(x)b.$$
- Si $1 \leq p \leq \infty$, E se extiende a una proyección positiva y contractiva
$$\mathsf{E} : L_p(\mathcal{M}, \varphi) \to L_p(\mathcal{N}, \varphi).$$

C. Productos libres amalgamados

Sea $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de C*-álgebras y sean $\mathcal{A},\mathcal{B}$ C*-álgebras con $\mathcal{B}\subset\mathsf{A}_\alpha\subset\mathcal{A}$ para todo $\alpha\in\Lambda$. Asumimos que existen esperanzas condicionadas normales y fieles $\mathsf{E}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ y $\mathsf{E}_\alpha:\mathsf{A}_\alpha\to\mathcal{B}$. Además, también asumimos la existencia de $*$-homomorfismos $\pi_\alpha:\mathsf{A}_\alpha\to\mathcal{A}$ con

$$\mathsf{E}\circ\pi_\alpha=\mathsf{E}_\alpha \quad \text{y} \quad \pi_{\alpha|_{\mathcal{B}}}=id_{\mathcal{B}}.$$

En lo que sigue podemos identificar A_α con la subálgebra $\pi_\alpha(\mathsf{A}_\alpha)$ de $\mathcal{A}$ sin riesgo de confusión. En particular, podemos utilizar la esperanza condicionada E_α o la restricción de E a A_α indistintamente. Así, para mayor simplicidad utilizaremos E todo el tiempo. En el caso escalar, $\mathcal{B}$ es el plano complejo y la esperanza condicionada E se reemplaza por un estado normal y fiel. Como ocurre en el caso escalar, en este contexto también existe una representación en un espacio de Fock. Como es habitual consideramos los espacios de media 0

$$\mathring{\mathsf{A}}_\alpha=\Big\{a_\alpha\in\mathsf{A}_\alpha \,\Big|\, \mathsf{E}(a_\alpha)=0\Big\}.$$

Definimos el $\mathcal{B}$-módulo de Hilbert

$$\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1}\otimes_{\mathcal{B}}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2}\otimes_{\mathcal{B}}\cdots\otimes_{\mathcal{B}}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}$$

equipado con el producto interior $\mathcal{B}$-valuado

$$\big\langle a_1\otimes\cdots\otimes a_m,\ a_1'\otimes\cdots\otimes a_m'\big\rangle=\mathsf{E}_{\alpha_m}\big(a_m^*\cdots\mathsf{E}_{\alpha_2}(a_2^*\,\mathsf{E}_{\alpha_1}(a_1^*a_1')\,a_2')\cdots a_m'\big).$$

Entonces, el espacio de Fock habitual se reemplaza por el $\mathcal{B}$-módulo de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\oplus\bigoplus_{m\geq1}\bigoplus_{\alpha_1\neq\alpha_2\neq\cdots\neq\alpha_m}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1}\otimes_{\mathcal{B}}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2}\otimes_{\mathcal{B}}\cdots\otimes_{\mathcal{B}}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}.$$

Las sumas directas de arriba se toman $\mathcal{B}$-ortogonales. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ el álgebra de operadores adjuntables en $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. Un operador $\mathcal{B}$-modular por la derecha $\mathrm{T}:\mathcal{H}_{\mathcal{B}}\to\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ se llama *adjuntable* si existe $\mathrm{S}:\mathcal{H}_{\mathcal{B}}\to\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ tal que

$$\langle x,\mathrm{T}y\rangle=\langle \mathrm{S}x,y\rangle \quad \text{para todo} \quad x,y\in\mathcal{H}_{\mathcal{B}}.$$

Explicamos ahora cómo los elementos de A_α actúan en $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. Descomponemos

$$a_\alpha=\mathring{a}_\alpha+\mathsf{E}(a_\alpha).$$

Un elemento de $\mathcal{B}$ actúa en $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ por multiplicación a la izquierda. Por consiguiente, es suficiente definir la acción de los elementos con media 0. Es decir, para determinar el $*$-homomorfismo $\pi_\alpha:\mathsf{A}_\alpha\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$ nos queda definir el vector

$$\sigma=\pi_\alpha(\mathring{a}_\alpha)\big(\xi_{\alpha_1}\otimes\xi_{\alpha_2}\otimes\cdots\otimes\xi_{\alpha_m}\big).$$

Dichas acciones se definen como sigue:

- Si $\alpha \neq \alpha_1$, tenemos

$$\sigma = \mathring{a}_\alpha \otimes x_{\alpha_1} \otimes x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_m}.$$

- Si $\alpha = \alpha_1$, tenemos

$$\sigma = \mathsf{E}(\mathring{a}_\alpha x_{\alpha_1})\, x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_m} \ \oplus \big(\mathring{a}_\alpha x_{\alpha_1} - \mathsf{E}(\mathring{a}_\alpha x_{\alpha_1})\big) \otimes x_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha_m}.$$

Entonces, puesto que el álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{B})$ es una C*-álgebra [La], podemos definir el *producto libre $\mathcal{B}$-amalgamado* C$^*(\bigstar_\mathcal{B} \mathsf{A}_\alpha)$ como el C*-cierre de las combinaciones lineales de operadores de la forma

$$\pi_{\alpha_1}(a_1)\pi_{\alpha_2}(a_2)\cdots\pi_{\alpha_m}(a_m).$$

Ahora trabajamos con una familia $\mathcal{B} \subset (\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{A}$ de álgebras de von Neumann. Supongamos que $\mathcal{B}$ está equipado con un estado *n.f.* $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Esto nos proporciona estados *n.f.* inducidos $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ y $\varphi_\alpha : \mathsf{A}_\alpha \to \mathbb{C}$ dados por

$$\phi = \varphi \circ \mathsf{E} \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha = \varphi \circ \mathsf{E}_\alpha.$$

El espacio de Hilbert

$$L_2\Big(\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1} \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2} \otimes_\mathcal{B} \cdots \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}, \varphi\Big)$$

se obtiene de $\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1} \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2} \otimes_\mathcal{B} \cdots \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}$ considerando el producto interior

$$\big\langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_m,\ a_1' \otimes \cdots \otimes a_m' \big\rangle_\varphi = \varphi\Big(\big\langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_m,\ a_1' \otimes \cdots \otimes a_m' \big\rangle\Big).$$

Entonces definimos la suma directa ortogonal

$$\mathcal{H}_\varphi = L_2(\mathcal{B}) \oplus \bigoplus_{m\geq 1} \bigoplus_{\alpha_1\neq\alpha_2\neq\cdots\neq\alpha_m} L_2\Big(\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1} \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2} \otimes_\mathcal{B} \cdots \otimes_\mathcal{B} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}, \varphi\Big).$$

Tomemos la $*$-representación $\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{B}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ definida por $\big(\lambda(\mathrm{T})x\big) = \mathrm{T}x$. La fidelidad de λ está impuesta por el hecho de que φ también es fiel. Efectivamente, asumimos que $\lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{T}) = 0$, entonces tenemos

$$\langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}x, x\rangle_\varphi = \varphi\big(\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x\rangle\big) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{H}_\mathcal{B}.$$

Como φ es fiel, $\mathrm{T}x = 0$ (como elemento de $\mathcal{H}_\mathcal{B}$) para todo $x \in \mathcal{H}_\mathcal{B}$ y $\mathrm{T} = 0$. Entonces, el **producto libre $\mathcal{B}$-amalgamado** $\bigstar_\mathcal{B}(\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{E}_\alpha)$ es el w^*-cierre de C$^*(\bigstar_\mathcal{B}\mathsf{A}_\alpha)$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{B})$. Descomponiendo

$$a_\alpha = \mathring{a}_\alpha + \mathsf{E}(a_\alpha)$$

e identificando $\mathring{\mathsf{A}}_\alpha$ con $\lambda\big(\pi_\alpha(\mathring{\mathsf{A}}_\alpha)\big)$, podemos pensar en $\bigstar_\mathcal{B}(\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{E}_\alpha)$ como

$$\bigstar_\mathcal{B}(\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{E}_\alpha) = \Big(\mathcal{B} \oplus \bigoplus_{m\geq 1} \bigoplus_{\alpha_1\neq\alpha_2\neq\cdots\neq\alpha_m} \mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_1}\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_2}\cdots\mathring{\mathsf{A}}_{\alpha_m}\Big)''.$$

Observación C.1 Utilizando la misma cadena de álgebras $(\mathcal{A}, \mathsf{A}_\alpha, \mathcal{B})$ así como las correspondientes esperanzas condicionadas, diremos que $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es **libremente independiente** sobre E si

$$\mathsf{E}\big(\pi_{\alpha_1}(a_1)\pi_{\alpha_2}(a_2)\cdots\pi_{\alpha_m}(a_m)\big) = 0$$

cuando $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_m$ y $a_k \in \mathsf{A}_{\alpha_k}$ son tales que $\mathsf{E}(\pi_{\alpha_k}(a_k)) = 0$. La relación entre independencia libre sobre una subálgebra y productos libres amalgamados es análoga a la que hay entre independencia libre y productos libres ordinarios. A saber, la familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es libre sobre

$$(\mathcal{A}, \mathsf{E}) = \bigstar_{\mathcal{B}}(\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{E}_\alpha).$$

Recíprocamente, si la familia $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es libre sobre $\mathsf{E} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y dicha familia genera $\mathcal{A}$ como álgebra de von Neumann, entonces $(\mathcal{A}, \mathsf{E})$ coincide con el producto libre de $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ amalgamado sobre el álgebra $\mathcal{B}$.

Observación C.2 Concluimos con un ejemplo bastante relevante en la teoría. Sea $\mathcal{A} = \mathsf{A}_1 \star \mathsf{A}_2 \star \cdots \star \mathsf{A}_n$ el product libre de $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ (i.e. $\mathcal{A}$ está amalgamado sobre el plano complejo) equipado con su estado *n.f.* natural ϕ. Sea $\mathcal{B}$ otro álgebra de von Neumann, no necesariamente incluida en $\mathcal{A}$. Consideramos la esperanza condicionada

$$\mathsf{E} : \mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B} \to \mathcal{B} \quad \text{definida por} \quad \mathsf{E}(a \otimes b) = \phi(a)\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes b.$$

Entonces, es bien conocido que

$$(\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}, \mathsf{E}) = \bigstar_{\mathcal{B}}\big(\mathsf{A}_k\bar{\otimes}\mathcal{B}, \varphi_k \otimes id_{\mathcal{B}}\big),$$

donde φ_k denota el estado *n.f.* considerado en A_k. En otras palabras, la familia $\mathsf{A}_1\bar{\otimes}\mathcal{B}, \mathsf{A}_2\bar{\otimes}\mathcal{B}, \ldots, \mathsf{A}_n\bar{\otimes}\mathcal{B}$ de subálgebras de $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$ es libremente independiente sobre E. Por consiguiente, tomando $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\ell_2)$, resulta que la acotación completa del operador $u : L_p(\mathcal{A}, \phi) \to L_p(\mathcal{A}, \phi)$ es equivalente a la acotación Banach (con la misma norma) del operador

$$u \otimes id_{\mathcal{B}} : L_p(\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}, \phi \otimes \mathrm{tr}) \to L_p(\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}, \phi \otimes \mathrm{tr}).$$

En otras palabras, la noción de libertad sobre una subálgebra dada es en cierto sentido más general que la de acotación completa. Este fenómeno se utiliza de forma exhaustiva en [JP2] y [JPX].

Bibliografía

[AAP] C.A. Akerman, J. Anderson y G.K. Pedersen, *Triangle inequalities in operator algebras.* Linear and Multilinear Algebra **11** (1982), 167-178.

[BS] C. Bennett y R. Sharpley, Interpolation of operators. Acamedic Press Inc., 1988.

[Bi] D. Bisch, Combinatorial and Analytical Aspects of the Jones Theory of Subfactors. Notas no publicadas, 1996.

[Bo] J. Bourgain, *Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem.* Acta Math. **162** (1989), 227-245.

[BKS] M. Bożejko, B. Kúmmerer y R. Speicher, *q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects.* Comm. Mth. Phys. **185** (1997), 129-154.

[BR] O. Bratteli y D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II. Springer, 1981.

[BDK] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle y J.L. Krivine, *Lois stable et space L^p.* Ann. Inst. H. Poincaré **2** (1966), 231-259.

[Bu] A. Buchholz, *Norm of convolution by operator-valued functions on free groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1671-1682.

[Br] D.L. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales.* Ann. Probab. **1** (1973), 19-42.

[BG] D.L. Burkholder y R.F. Gundy, *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales.* Acta Math. **124** (1970), 249-304.

[Ca] A. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method.* Studia Math. **24** (1964), 113-190.

[CZ] A.P. Calderón y A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[Co] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 133-252.

[Cu] I. Cuculescu, *Martingales on von Neumann algebras.* J. Multivariate Anal. **1** (1971), 17-27.

[Da] B. Davis, *On the integrability of the martingale square function.* Israel J. Math. **8** (1970), 187-190

[DF] A. Defant y K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals. North-Holland, Amsterdam, 1993.

[Do] J.L. Doob, Stochastic Processes. Wiley, New York, 1953.

[DDP] P.G. Dodds, T.K. Dodds y B. de Pagter, *Noncommutative Banach function spaces.* Math. Z. **201** (1989), 583-597.

[ER] E.G. Effros y Z.J. Ruan, Operator Spaces. London Math. Soc. Monogr. **23**, Oxford University Press, New York, 2000.

[ES] M. Enock y J. Schwartz, Kac algebras and duality of locally compact groups. Springer-Verlag, 1992.

[Fa] T. Fack, *Type and cotype inequalities for non-commutative L^p-spaces.* J. Operator Theory **17** (1987), 255-279.

[FK] T. Fack y H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators.* Pacific J. Math. **123** (1986), 269-300.

[Fe] C. Fefferman, *Characterizations of bounded mean oscillation.* Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 587-588.

[FP] A. Figá-Talamanca y M. Picardello, Harmonic Analysis on Free Groups. Marcel Dekker, 1983.

[Fo] G.B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, 1995.

[GMP] J. García-Cuerva, J.M. Marco y J. Parcet, *Sharp Fourier type and cotype with respect to compact semisimple Lie groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3591-3609.

[GP1] J. García-Cuerva y J. Parcet, *Vector-valued Hausdorff-Young inequality on compact groups.* Proc. London Math. Soc. **88** (2004), 796-816.

[GP2] J. García-Cuerva y J. Parcet, *Quantized orthonormal systems: A noncommutative Kwapień theorem.* Studia Math. **155** (2003), 273-294.

[GL] Y. Gordon y D.R. Lewis, *Absolutely summing operators and local unconditional structures.* Acta Math. **133** (1974), 27-48.

[Gr] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boll. Soc. Mat. Sâo-Paulo **8** (1956), 1-79.

[Gu] R.F. Gundy, *A decomposition for L^1-bounded martingales.* Ann. Math. Statist. **39** (1968), 134-138.

[H1] U. Haagerup, *An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property.* Invent. Math. **50** (1978/79), 279-293.

[H2] U. Haagerup, L_p spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra. Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique CNRS (1979), 175-184.

[H3] U. Haagerup, Descomposition of completely bounded maps on operator algebras. Trabajo no publicado (1980).

[HP] U. Haagerup y G. Pisier, *Bounded linear operators between C^*-algebras.* Duke Math. J. **71** (1993), 889-925.

[HRS] U. Haagerup, H.P. Rosenthal y F.A. Sukochev, Banach Embedding Properties of Non-commutative L_p-Spaces. Mem. Amer. Math. Soc. **163**, 2003.

[Hr] A. Harcharras, *Fourier analysis, Schur multipliers on S^p and non-commutative $\Lambda(p)$ sets.* Studia Math. **137** (1999), 203-260.

[HNO] A. Harcharras, S. Neuwirth y K. Oleszkiewicz, *Lacunary matrices.* Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 1675-1689.

[JSZ] W.B. Johnson, G. Schechtman y J. Zinn, *Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable ramdon vriables.* Ann. of Probab. **13** (1985), 234-253.

[Ju1] M. Junge, *Embeddings of non-commutative L_p-spaces into non-commutative L_1-spaces,* $1 < p < 2$. GAFA **10** (2000), 389-406.

[Ju2] M. Junge, *Doob's inequality for non-commutative martingales.* J. reine angew. Math. **549** (2002), 149-190.

[Ju3] M. Junge, *Embedding of the operator space* OH *and the logarithmic 'little Grothendieck inequality.* Invent. Math. **161** (2005), 225-286.

[Ju4] M. Junge, *Vector-valued L_p spaces over* QWEP *von Neumann algebras.* En preparación.

[JO] M. Junge y T. Oikhberg, *Homogeneous Hilbertian subspaces of L_p.* Preprint 2004.

[JP1] M. Junge y J. Parcet, *The norm of sums of independent non-commutative random variables in $L_p(\ell_1)$.* J. Funct. Anal. **221** (2005), 366-406.

[JP2] M. Junge y J. Parcet, Theory of Amalgamated L_p Spaces in Noncommutative Probability. Preprint 2005. (Disponible en www.uam.es/javier.parcet).

[JP3] M. Junge y J. Parcet, *Operator space embedding of L_q into L_p.* Preprint 2006.

[JP4] M. Junge y J. Parcet, *On subspaces of noncommutative L_p.* En preparación.

[JPX] M. Junge, J. Parcet y Q. Xu, *Rosenthal type inequalities for free chaos.* Preprint 2005. (Disponible en www.uam.es/javier.parcet).

[JX1] M. Junge y Q. Xu, *Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities.* Ann. Probab. **31** (2003), 948-995.

[JX2] M. Junge y Q. Xu, *On the best constants in some non-commutative martingale inequalities.* Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 243-253.

[JX3] M. Junge y Q. Xu, *Noncommutative maximal ergodic theorems.* Preprint 2004.

[JX4] M. Junge y Q. Xu, *Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities* II: *Applications.* Preprint 2005.

[KR1] R.V. Kadison y J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I. Grad. Stud. Math. **15**, American Mathematical Society, 1997.

[KR2] R.V. Kadison y J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras II. Grad. Stud. Math. **16**, American Mathematical Society, 1997.

[Kh] A. Khintchine, *Über dyadische Brüche.* Math. Z. **18** (1923), 109-116.

[Ko] H. Kosaki, *Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra.* J. Funct. Anal. **56** (1984), 29-78.

[Ku] R.A. Kunze, *L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 519-540.

[La] E.C. Lance, Hilbert C*-modules. Cambridge University Press, 1995.

[Le] M. Leinert, *Faltungsoperatoren auf gewissen diskreten Gruppen.* Studia Math. **52** (1974), 149-158.

[Lu] F. Lust-Piquard, *Inégalités de Khintchine dans C_p* $(1 < p < \infty)$. C.R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), 289-292.

[LP] F. Lust-Piquard y G. Pisier, *Non-commutative Khintchine and Paley inequalities.* Ark. Mat. **29** (1991), 241-260.

[MP] B. Maurey y G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach.* Studia Math. **58** (1976), 45-90.

[Mu] M. Musat, *On the operator space UMD property for non-commutative L_p-spaces.* Preprint 2005.

[NS] A. Nica y R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability.* Por aparecer.

[No] A. Nou, *Non injectivity of the q-deformed von Neumann algebra.* Math. Ann. **330** (2004), 17-38.

[Pa1] J. Parcet, Análisis armónico no conmutativo y geometría de espacios de operadores. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, 2003.

[Pa2] J. Parcet, B-*convex operator spaces.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **46** (2003), 649-668.

[Pa3] J. Parcet, *Multi-indexed p-orthogonal sums in non-commutative Lebesgue spaces*. Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1171-1188.

[Pa4] J. Parcet, *Weak type estimates associated to Burkholder's martingale inequality*. Preprint 2005. (Disponible en www.uam.es/javier.parcet).

[PP] J. Parcet y G. Pisier, *Non-commutative Khintchine type inequalities associated with free groups*. Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 531-556.

[PR] J. Parcet y N. Randrianantoanina, *Gundy's decomposition for non-commutative martingales and applications*. Por aparecer en Proc. London Math. Soc. (Disponible en www.uam.es/javier.parcet).

[Pl] V. Paulsen, Completely bounded maps and dilations. Pitman Research Notes **146**, Pitman Longman, 1986.

[PT] G. Pedersen y M. Takesaki, *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*. Acta Math. **130** (1973), 53-87.

[Pi1] G. Pisier, The Operator Hilbert Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms. Mem. Amer. Math. Soc. **122** (1996), 1-103.

[Pi2] G. Pisier, Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps. Astérisque (Soc. Math. France) **247** (1998), 1-111.

[Pi3] G. Pisier, *An inequality for p-orthogonal sums in non-commutative L_p*, Illinois J. Math. **44** (2000), $901-923$.

[Pi4] G. Pisier, Introduction to Operator Space Theory. Cambridge University Press, 2003.

[Pi5] G. Pisier, *Completely bounded maps into certain Hilbertian operator spaces*. Internat. Math. Res. Notices **74** (2004), 3983-4018.

[PX1] G. Pisier y Q. Xu, *Non-commutative martingale inequalities*. Comm. Math. Phys. **189** (1997), 667-698.

[PX2] G. Pisier y Q. Xu, Non-Commutative L_p-Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces II (Ed. W.B. Johnson y J. Lindenstrauss) North-Holland (2003), 1459-1517.

[Ra1] N. Randrianantoanina, *Non-commutative martingale transforms*. J. Funct. Anal. **194** (2002), 181-212.

[Ra2] N. Randrianantoanina, *A weak type inequality for non-commutative martingales and applications*. Proc. London Math. Soc. **91** (2005), 509-544.

[Ra3] N. Randrianantoanina, *Conditioned square functions for non-commutative martingales*. Preprint 2005.

[RX] E. Ricard y Q. Xu, *Khitnchine type inequalities for reduced free products and applications*. Por aparecer en J. reine angew. Math.

[Ro1] H.P. Rosenthal, *On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables*. Israel J. Math. **8** (1970), 273-303.

[Ro2] H.P. Rosenthal, *On subspaces of L_p*. Ann. of Math. **97** (1973), 344-373.

[Ru] Z.J. Ruan, *Subspaces of $C^\star$-algebras*. J. Funct. Anal. **76** (1988), 217-230.

[Rd] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps*. J. of Math. and Mech. **9** (1960), 203-228.

[Si] B. Simon, Trace Ideals and their Applications. Cambridge Univ. Press, 1979.

[St] E.M. Stein, Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley Theory. Princeton University Press, 1970.

[Su1] F. Sukochev, *Non-isomorphism of L_p-spaces associated with finite and infinite von Neumann algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1517-1527.

[Su2] F. Sukochev, *Linear topologiocal classification of separable L_p-spaces associated with von Neumann algebras of type I*. Israel J. Math. **115** (2000), 137-156.

[SX] F. Sukochev y Q. Xu, *Embedding of non-commutative L_p-spaces, $p < 1$*. Arch. Math. **80** (2003), 151-164.

[Ta1] M. Takesaki, Tomita's theory of Modular Hilbert Algebras and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics **128**, Springer, 1970.

[Ta2] M. Takesaki, *Conditional expectations in von Neumann algebras*. J. Func. Anal. **9** (1972), 306-321.

[Ta3] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I. Springer, 1979.

[Te1] M. Terp, L_p spaces associated with von Neumann algebras. Math. Institute Copenhagen University, 1981.

[Te2] M. Terp, *Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual*. J. Operator Theory **8** (1982), 327-360.

[To] N. Tomczak-Jaegermann, *The moduli of smoothness and convexity and the Rademacher averages of trace classes S_p*. Studia Math. **50** (1974), 163-182.

[Vo1] D.V. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras*. Operator Algebras and Their Connection with Topology and Ergodic Theory. Lecture Notes in Mathematics **1132**, Springer, 1985, pp. 566-588.

[Vo2] D.V. Voiculescu, *A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy*. Internat. Math. Res. Notices **1** (1998), 41-63.

[VDN] D.V. Voiculescu, K. Dykema y A. Nica, Free random variables. CRM Monograph Series **1**, American Mathematical Society, 1992.

[We] F. Weisz, Martingale Hardy Spaces and its Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Math. **1568**, Springer-Verlag, 1994.

[W1] G. Wittstock, Ein operatorwertigen Hahn-Banach Satz, *J. Funct. Anal.* **40** (1981), 127-150.

[W2] G. Wittstock, *Extensions of completely bounded module morphisms*, Proc. Conference on operator algebras and group representations. Pitman, 1983.

[Xu1] Q. Xu, *Recent devepolment on non-commutative martingale inequalities.* Functional Space Theory and its Applications. Proceedings of International Conference & 13th Academic Symposium in China. Ed. Research Information Ltd UK. Wuhan 2003, 283-314.

[Xu2] Q. Xu, *Interpolation of operator spaces*, J. Funct. Anal. **139** (1996), 500-539.

[Xu3] Q. Xu, *Analytic functions with values in lattices and symmetric spaces of measurable operators.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **109** (1991), 541-563.