Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Shing-Tung Yau, un motor del Análisis Geométrico

por

Alberto Enciso

1. De las calles de Hong Kong a la medalla Fields

Durante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1982, Shing-Tung Yau recibía la medalla Fields por sus contribuciones a las ecuaciones diferenciales, a la conjetura de Calabi en geometría algebraica, a la conjetura de la masa positiva en relatividad general, y a las ecuaciones de Monge–Ampère reales y complejas. Este es un justo reconocimiento para un matemático que, haciendo gala de una enorme ambición y capacidad técnica, ha resuelto problemas de gran dificultad y ejercido una profunda influencia en la geometría diferencial moderna. Como escribiera Nirenberg en su reseña sobre el medallista Fields:

> «*Yau has done extremely deep work in global differential geometry and elliptic partial differential equations, including applications in three-dimensional topology and in general relativity theory. He is an analyst's geometer (or geometer's analyst) with remarkable technical power and insight. He has succeeded in solving problems on which progress had been stopped for years.*»[1]

El camino que llevó a Yau de las calles de un pueblo en las afueras de Hong Kong a recibir la medalla Fields en Polonia es pintoresco. Yau creció en el seno de una familia con ocho hermanos y escasas posibilidades económicas. Su padre, profesor de filosofía, animaba a Yau a interesarse por las matemáticas, pese a que de pequeño Yau no fue en absoluto un estudiante destacado: faltaba a clase con frecuencia y, de

[1] «Yau ha realizado un trabajo extremadamente profundo en geometría diferencial global y ecuaciones diferenciales elípticas, incluyendo aplicaciones a la topología en tres dimensiones y a la teoría de la relatividad general. Es una analista geométrico (o geómetra analista) de una potencia técnica y una intuición impresionantes. Ha conseguido resolver problemas en los que no se había conseguido avanzar durante años.»

hecho, durante unos meses dejó la escuela para liderar una banda callejera. Yau dio un giro radical a su vida a los catorce años, cuando su padre falleció por un cáncer y dejó a su familia virtualmente sin ingresos. Ante la necesidad de mantener a su familia, un tío suyo le recomendó que se dedicase a la cría de patos, pero el joven Yau dio con un plan de negocio totalmente inesperado: decidió dar clases de matemáticas a otros estudiantes y vivir de ello. Sorprendentemente el plan de Yau tuvo éxito, pues este mejoró rápidamente su rendimiento académico tanto durante la educación secundaria como especialmente en la universidad. Allí su enorme potencial llamó la atención de Stephen Salaff, un joven matemático de Berkeley que se encontraba en la Universidad China de Hong Kong, lo que eventualmente le sirvió a Yau para acudir a la Universidad de Berkeley para realizar el máster y doctorarse bajo la dirección del prestigioso geómetra Shiing-Shen Chern en 1971, a los veintidós años de edad.

Desde entonces, Yau ha realizado un trabajo ingente en geometría diferencial, ecuaciones diferenciales y física matemática que se ha plasmado en más de 400 artículos, que han ejercido una fuerte influencia sobre matemáticos y físicos teóricos y le han reportado numerosos premios, incluyendo la medalla Fields y el premio Wolf. También ha desarrollado una enorme labor de formación y mentorización sobre temas de su interés, en particular mediante la dirección de más de 60 tesis doctorales. Entre sus estudiantes se encuentran algunos matemáticos de primer nivel, como pueden ser Richard Schoen y Gang Tian. Yau es profesor en Harvard desde 1987, tras haber ocupado cátedras en Stanford, Princeton y el Instituto de Estudios Avanzados.

Es bien sabido que estos sensacionales logros quedan en ocasiones en un segundo plano por las sombras que aparecen en torno a la figura de Yau. Estas se deben a diversas polémicas de tipo científico y a sus agrias disputas con otros matemáticos de primera línea, que se hicieron tristemente famosas a raíz de un poco afortunado artículo periodístico publicado en *The New Yorker*. No consideramos que este tema sea de mayor interés, por lo que nos limitaremos a señalar que hacer juicios de valor es siempre difícil: si bien es indudable que entre los defectos de Yau está una notable falta de mano izquierda, también es preciso señalar que Yau ha proporcionado generosamente problemas abiertos, intuiciones y consejos a innumerables matemáticos, tanto personalmente como a través de las célebres colecciones de problemas [11, 13]. Estas colecciones han servido para orientar carreras investigadoras y, en ocasiones, alcanzar cátedras en universidades de prestigio tras contribuir a alguno de estos problemas.

2. Una excursión al análisis geométrico

Yau es una de las principales figuras en el campo del análisis geométrico. Esta rama de las matemáticas, que cubre tanto el uso de ecuaciones en derivadas parciales para atacar problemas geométricos como la utilización de ideas geométricas para analizar ecuaciones diferenciales, se ha desarrollado enormemente en los últimos cuarenta años y ha conducido a resultados emblemáticos y sorprendentes. Entre estos podemos destacar la demostración de la conjetura de Poincaré (Perelman, 2003), la existencia de estructuras diferenciables no equivalentes en $\mathbb{R}^4$ (Donaldson,

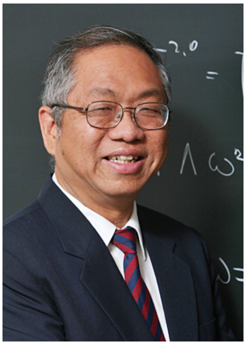

Figura 1: Shing-Tung Yau.

1983) y la estabilidad del espacio de Minkowski en relatividad general (Christodoulou y Klainerman, 1993).

No es adecuado considerar a Yau como fundador del análisis geométrico, puesto que la relación entre geometría y análisis se ha explotado desde el comienzo del cálculo infinitesimal. No en vano, algunos de los objetos más importantes en geometría, como las geodésicas o las superficies mínimas, se definen directamente mediante ecuaciones diferenciales, y de la misma manera basta abrir un libro de texto de análisis armónico para comprobar hasta qué punto son importantes en este contexto las ideas y descomposiciones de tipo geométrico. Sí es cierto, no obstante, que Yau ha sido crucial en el desarrollo del análisis geométrico, como se menciona explícitamente en la reseña del premio Wolf:

> «*Yau has linked partial differential equations, geometry, and mathematical physics in a fundamentally new way, decisively shaping the field of geometric analysis.*»[2]

Como apunta Nirenberg, Yau no se limita a explotar las ecuaciones diferenciales que aparecen de forma natural cuando uno estudia problemas en geometría riemanniana, sino que busca activamente introducir herramientas de análisis para tratar problemas geométricos. De una manera vaga, podría decirse que esta "búsqueda activa" es un elemento fundamental del legado matemático de Yau y una seña de identidad del análisis geométrico.

Es destacable que tanto la tesis doctoral de Yau, que estudia el grupo fundamental de variedades con curvatura no positiva [1], como los intereses de su supervisor, Chern, están bastante alejados de los métodos del análisis geométrico. En este sentido, un punto de inflexión en la etapa formativa de Yau fue asistir (y, de hecho, ser el único alumno que no abandonó anticipadamente) al curso de doctorado sobre ecuaciones en derivadas parciales que impartía Charles Morrey en Berkeley. Morrey recurría frecuentemente a la geometría como fuente de ecuaciones interesantes, lo que

[2] «Yau ha conectado las ecuaciones en derivadas parciales, la geometría y la física matemática de una manera fundamentalmente nueva, definiendo decisivamente el campo del análisis geométrico.»

le llevó a Yau a pensar en utilizar las ecuaciones para tratar problemas interesantes de geometría. Evidentemente, la estrategia resultó provechosa.

Podríamos argumentar que los resultados más destacados obtenidos por Yau a lo largo de su carrera son los siguientes:

- Ha desarrollado estimaciones nuevas para tratar ecuaciones de Monge–Ampère reales y complejas. En el caso complejo esto le condujo a probar la conjetura de Calabi sobre métricas de Kähler en variedades cerradas [5]. Esto tiene varias consecuencias en geometría algebraica, como la validez de la conjetura de Severi y el hecho de que la única estructura de Kähler en el espacio proyectivo complejo es la estándar. Además, las variedades de Calabi–Yau han resultado fundamentales en teoría de cuerdas. En el caso de ecuaciones de Monge–Ampère reales, Cheng y Yau resolvieron el problema de Minkowski [3], es decir, determinar una hipersuperficie convexa en $\mathbb{R}^n$ utilizando como dato la curvatura de Gauss (otra demostración independiente es debida a Pogorelov), y probaron la existencia de soluciones clásicas al problema de Dirichlet [4].
- Ha obtenido muchos resultados sobre superficies mínimas. En particular, Meeks y Yau probaron que la solución al problema de Plateau no tiene autointersecciones bajo ciertas hipótesis de convexidad del borde [10]. La demostración proporciona una generalización del lema de Dehn que tiene importantes aplicaciones en la topología de 3-variedades [8] y que, al combinarla con trabajo previo de Bass y Thurston, permitió a Cameron Gordon probar rápidamente la conjetura de Smith sobre difeomorfismos de la esfera. Yau también ha utilizado superficies mínimas como herramienta para analizar otras cuestiones. En palabras de Nirenberg: «*Yau uses minimal surfaces in the way that, previously, people used geodesics*».[3] Un hito en el estudio de variedades con curvatura escalar no negativa es su demostración, junto a Schoen, de la conjetura de la masa positiva en relatividad general [7, 9] utilizando superficies mínimas. Este resultado fue empleado de manera clave, por ejemplo, en la solución al problema de Yamabe en dimensiones bajas (Schoen, 1984) y en la demostración de la desigualdad de Penrose riemanniana dada por Bray en 2001.
- Muchos trabajos de Yau han abordado la influencia de la curvatura sobre las soluciones a ecuaciones diferenciales. Sus estimaciones de autovalores y del núcleo del calor son algunos de los resultados más profundos del análisis en variedades. Es destacable la célebre desigualdad de Harnack de Li–Yau [12] para la ecuación del calor, que, en particular, ejerció una influencia fundamental en el trabajo de Hamilton sobre estimaciones de Harnack para el flujo de Ricci. Yau consiguió también aplicar el principio del máximo para estudiar de manera efectiva ecuaciones elípticas en variedades no compactas, probando, en particular, que nunca existen funciones armónicas en L^p para ningún $p < \infty$ y que tampoco las hay en L^∞ cuando la curvatura de Ricci es no negativa [2].
- El trabajo de Yau y colaboradores sobre T-dualidad [14] es un ingrediente clave en el estudio de simetría especular y ha tenido una gran repercusión en

[3] «Yau usa las superficies mínimas de la misma manera que anteriormente se utilizaban las geodésicas.»

teoría de cuerdas. La simetría especular es una relación entre variedades de Calabi–Yau que se asocia en física a una dualidad entre teorías de campos, y que atrajo mucha atención en matemáticas a raíz de espectaculares resultados de geometría enumerativa que fueron conjeturados (o, mejor dicho, probados de manera no rigurosa) por los físicos Candelas, de la Ossa, Green y Parkes utilizando esta dualidad. Esta conjetura fue probada rigurosamente por Givental (1996) y Lian, Liu y Yau [15].

- Una serie de trabajos de Finster, Kamran, Smoller y Yau sobre la ecuación de ondas en la geometría de Kerr mostraron que es posible probar estimaciones de decaimiento para ondas lineales a pesar de que la energía degenera en el horizonte [16], lo que ha dado lugar a una intensa investigación reciente sobre ondas en agujeros negros. En particular, el equipo de Yau ha demostrado rigurosamente que, escogiendo cuidadosamente el dato inicial, es posible extraer energía de un agujero negro [17]. Este fenómeno, conocido en física como superradiancia, es un análogo para EDPs del célebre proceso de Penrose.

Evidentemente, por motivos de espacio no podemos presentar aquí un resumen de todos estos resultados, por lo que en las dos secciones siguientes nos limitaremos a ofrecer unas pinceladas sobre el contexto en que se encuadran sus dos resultados más célebres: la conjetura de Calabi y la conjetura de la masa positiva. Aunque la presentación será muy superficial y un tanto imprecisa, necesariamente partes de estas secciones serán un poco más técnicas que el resto del artículo. El lector puede consultar los conceptos básicos en cualquier libro de texto de geometría diferencial, como por ejemplo el de Kobayashi y Nomizu (*Foundations of Differential Geometry*, Wiley, Nueva York, 1996).

3. La conjetura de Calabi

La conjetura de Calabi, propuesta por Eugenio Calabi en 1954, puede entenderse como una pregunta sobre la existencia de cierta métricas canónicas en variedades con una estructura compleja, caracterizadas en términos de su curvatura de Ricci. Esta cuestión es de interés tanto por sus conexiones con otros problemas en geometría como por la dificultad que entraña resolver las ecuaciones diferenciales subyacentes.

Consideremos una variedad compacta compleja M con una métrica kähleriana

$$g = g_{j\bar{k}}\, dz^j\, d\bar{z}^k\,.$$

Es habitual estudiar estos espacios mediante su forma de Kähler ω, que es la $(1,1)$-forma diferencial definida en términos de los coeficientes de la métrica como

$$\omega := \frac{\mathrm{i}}{2}\, g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k\,.$$

Si $R_{j\bar{k}}$ son las componentes del tensor de Ricci asociado a esta métrica, definimos la forma de Ricci como la $(1,1)$-forma cerrada

$$\mathrm{Ric}_\omega := \frac{\mathrm{i}}{2\pi} R_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k\,.$$

 

Figura 2: Eugenio Calabi y Louis Nirenberg.

Un cálculo sencillo muestra que la diferencia entre las formas de Ricci asociadas a dos formas de Kähler distintas es una diferencial exacta. Con más precisión, se tiene la fórmula

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{\omega}} - \mathrm{Ric}_{\omega} = \mathrm{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n} \,, \tag{1}$$

donde n es la dimensión compleja de M y ω^n denota el producto exterior con n factores $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$. Al ser ω^n una forma del grado más alto, es claro que podemos interpretar el cociente $\tilde{\omega}^n/\omega^n$ como una función escalar.

Una consecuencia importante de la ecuación (1), debida a Chern, es que la clase de cohomología

$$c_1(M) := [\mathrm{Ric}_{\omega}]$$

es independiente de la métrica de Kähler empleada para definirla, por lo que solo depende de la estructura compleja. Esta clase de cohomología es la primera clase de Chern. Evidentemente, para que una $(1,1)$-forma cerrada ρ pueda ser la forma de Ricci de una métrica de Kähler en M, una condición necesaria es que ρ esté en la primera clase de Chern:

$$[\rho] = c_1(M)\,.$$

La conjetura de Calabi es que esta condición es también suficiente.

Veamos cómo se traduce el problema a EDPs. Como las $(1,1)$-formas ρ y Ric_{ω} son cohomólogas, el lema $\partial\bar{\partial}$ implica que existe una función F tal que

$$\mathrm{Ric}_{\omega} = \rho - \mathrm{i}\partial\bar{\partial} F\,. \tag{2}$$

Tomemos ahora una $(1,1)$-forma

$$\omega_{\varphi} := \omega + \partial\bar{\partial}\varphi$$

y exijamos que la forma de Ricci de ω_{φ} sea precisamente ρ:

$$\mathrm{Ric}_{\omega_{\varphi}} = \rho\,.$$

Podemos emplear la fórmula (1) y la ecuación (2) para expresar esta condición como

$$\partial\bar{\partial}\Big(\log\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}-F\Big)=0\,,$$

que equivale a imponer

$$\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}=c\,\mathrm{e}^F \tag{3}$$

para alguna constante c. De hecho, necesariamente se tiene

$$c=\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\int_M \mathrm{e}^F\,\omega^n}$$

ya que, al ser formas cohomólogas,

$$\int_M \omega_\varphi^n=\int_M \omega^n=\mathrm{Vol}(M)\,.$$

para cualquier φ. Por tanto, evidentemente podemos añadir una constante a la función F si es preciso para escoger $c=1$.

Escrita en coordenadas, la ecuación (3) con $c=1$ es

$$\det\left(g_{j\bar{k}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^j\partial\bar{z}^k}\right)=\mathrm{e}^F\,\det(g_{j\bar{k}})\,,$$

de manera que resolver la conjetura de Calabi es equivalente a resolver esta ecuación de Monge–Ampère compleja en la variedad con la condición de que la métrica definida por ω_φ debe ser definida positiva en cada punto. Por sencillez escribiremos esta condición como

$$\omega_\varphi>0\,.$$

Es fácil ver que la diferencial de la aplicación de Monge–Ampère

$$P:\varphi\mapsto\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}$$

en una función φ es el operador lineal

$$(DP)_\varphi\psi=\frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n}\,\Delta_{\omega_\varphi}\psi\,, \tag{4}$$

siendo Δ_{ω_φ} el operador de Laplace asociado a la métrica definida por ω_φ. Por tanto, mientras podamos asegurar que $\omega_\varphi>0$, la ecuación (3) es una ecuación elíptica completamente no lineal.

El teorema de Yau, que demuestra la conjetura de Calabi, es que esta ecuación admite siempre una solución suave:

Teorema 1 (Conjetura de Calabi [5]). *Sea F una función de clase $C^\infty(M)$, que normalizamos de forma que $\int_M \mathrm{e}^F\,\omega^n=1$. Entonces existe una única función $\varphi\in C^\infty(M)$, módulo constante aditiva, que satisface la ecuación (3) y la condición de positividad $\omega_\varphi>0$.*

Como tantas veces sucede, la intención inicial de Yau no fue probar que la conjetura de Calabi era correcta, sino encontrar un contraejemplo. De hecho, Yau creyó tener un contraejemplo sólido y llegó incluso a comunicarlo en una presentación privada que realizó ante unas veinte personas durante un congreso en Stanford en el año 1973. Entre estas personas estaba Calabi, que unos meses después le escribió pidiéndole unos datos adicionales sobre algunos detalles de la construcción del contraejemplo. El contraejemplo resultó ser erróneo y sus múltiples intentos por arreglarlo siempre acababan resultando fallidos, por lo que finalmente Yau se convenció de que la conjetura debía de ser cierta. Afortunadamente para él, la historia ha demostrado que el problema de Calabi no destruyó su reputación sino todo lo contrario.

La demostración que dio Yau de este teorema es una buena muestra de su estilo haciendo matemáticas. La demostración es totalmente clásica en espíritu pero requirió una enorme potencia matemática. A continuación presentaremos los principales pasos de la demostración, omitiendo totalmente los aspectos técnicos.

En primer lugar cabe notar que la unicidad de la solución (módulo constante aditiva), probada por Calabi, es muy sencilla: si φ y $\tilde{\varphi}$ son dos soluciones, entonces tenemos que

$$0 = \omega_\varphi^n - \omega_{\tilde{\varphi}}^n = \partial\bar{\partial}(\varphi - \tilde{\varphi}) \wedge \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega_\varphi^l \wedge \omega_{\tilde{\varphi}}^{n-1-l} \right),$$

de forma que $\partial\bar{\partial}(\varphi - \tilde{\varphi}) = 0$ porque $\omega_\varphi > 0$ y $\omega_{\tilde{\varphi}} > 0$. Esto implica la unicidad.

Para probar existencia utilizamos el método de continuidad. Consideremos el conjunto S formado por los valores $t \in [0, 1]$ para los que la ecuación

$$P(\varphi_t) = \mathrm{e}^{tF}$$

admite una solución $\varphi_t \in C^{k+2,\alpha}(M)$ con la condición de normalización

$$\int_M \varphi_t = 0$$

y tal que $\omega_{\varphi_t} > 0$. Aquí k es un entero suficientemente grande (por ejemplo, 2). Puesto que $\varphi_0 := 0$ es obviamente una solución de la ecuación con $t = 0$, S no es vacío porque contiene el 0. El objetivo es probar que el conjunto S es abierto y cerrado a la vez, de manera que necesariamente $S = [0, 1]$. Esto implica la existencia de la solución $\varphi \equiv \varphi_1$ de la ecuación (3).

Probar que el conjunto S es abierto es fácil. Considerando el operador de Monge–Ampère P como una aplicación entre los espacios

$$\left\{ \varphi \in C^{k+2,\alpha}(M) : \omega_\varphi > 0, \int_M \varphi = 0 \right\} \to \left\{ f \in C^{k,\alpha}(M) : \int_M f = \mathrm{Vol}(M) \right\}$$

y utilizando la fórmula (4) para su diferencial, vemos rápidamente que el teorema de la función implícita en espacios de Banach y resultados estándar para la ecuación de Laplace en una variedad implican que S es abierto.

Si pudiéramos garantizar que

$$\|\varphi_t\|_{C^{k+2,\alpha}} \leqslant C \tag{5}$$

para todo $t \in S$ con una constante C independiente de t, el conjunto S sería obviamente cerrado como consecuencia del teorema de Arzelà–Ascoli (para funciones Hölder continuas). Por tanto, la parte no trivial de la demostración es probar estas estimaciones a priori para nuestra ecuación de Monge–Ampère.

El punto clave, y que históricamente fue el último en obtenerse, es la estimación de orden cero, es decir, de $\|\varphi_t\|_{L^\infty}$. Esta cota es significativamente más difícil en una variedad cerrada que para problemas de tipo Dirichlet y su obtención es la principal contribución de Yau. La demostración de Yau usa una iteración de Nash–Moser, pero posteriormente han aparecido demostraciones menos complicadas de diversos autores.

Una propiedad muy inusual de la ecuación es que la norma $\|\varphi_t\|_{C^2}$ puede acotarse directamente en términos de la estimación en L^∞, por lo que la cota anterior automáticamente permite acotar las derivadas de primer y segundo orden de φ_t. Esto fue demostrado independientemente por Aubin y Yau. Para estimar las derivadas de orden siguiente, Yau utilizó las cotas para las derivadas terceras en términos de $\|\varphi_t\|_{C^2}$ debidas a Nirenberg (actualmente resultaría más sencillo emplear estimaciones en $C^{2,\alpha}$ de tipo Evans–Krylov). Las estimaciones para derivadas de orden superior son sencillas, pues en este punto se siguen directamente de la teoría clásica de Schauder. Esto da la estimación (5), lo que cerraría la demostración del teorema.

Para concluir, conviene destacar que la conjetura de Calabi tiene diversas implicaciones en geometría diferencial y algebraica. Una consecuencia que ha resultado muy importante en física es que cualquier variedad de Kähler con primera clase de Chern trivial admite una métrica de Kähler que es Ricci-plana. Estos espacios se conocen como variedades de Calabi–Yau y desempeñan actualmente un papel crucial en teoría de cuerdas. El estudio de ecuaciones elípticas totalmente no lineales y de métricas de Kähler–Einstein han sido también escenario de avances espectaculares después de la demostración de la conjetura de Calabi, pero este asunto nos llevaría demasiado lejos.

4. La positividad de la masa

Una característica importante de la relatividad general es que no se puede definir la densidad local de energía de un campo gravitatorio. Físicamente esto se entiende a través del principio de equivalencia (o invariancia bajo difeomorfismos), pues el campo gravitatorio en un punto es nulo para ciertos observadores (los que se encuentran en caída libre). Esto está relacionado con el hecho de que los símbolos de Christoffel no son un campo tensorial.

Sin embargo, es posible definir la energía, o masa, de un sistema aislado (por ejemplo, una estrella con su sistema planetario, una galaxia o un planeta y sus lunas) en términos de propiedades asintóticas del espacio-tiempo a través de una fórmula integral complicada. No es obvio en absoluto que los valores que da esta fórmula sean necesariamente no negativos, pero físicamente es importante que la masa sea positiva para cualquier sistema aislado no trivial (es decir, salvo para el espacio de Minkowski, que tiene masa 0). Este enunciado es la conjetura de la masa positiva, propuesta por los físicos Arnowitt, Deser y Misner en 1960.

Matemáticamente, un sistema aislado es esencialmente una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión 4 con una métrica lorenziana $\mathbf{g}$ que es asintótica en el infinito al espaciotiempo de Minkowski. Para dar una definición satisfactoria de "asintótico a la métrica de Minkowski", sin embargo, es preciso adaptar el enfoque al hecho de que la ecuación de Einstein es de carácter hiperbólico. De manera muy informal y sin entrar en detalles, esto quiere decir que la ecuación de Einstein en el vacío[4],

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{g}) = 0\,,$$

conduce a una ecuación diferencial hiperbólica una vez "factorizamos" la invariancia bajo difeomorfismos. La forma clásica de verlo es que se puede atacar la ecuación de Einstein utilizando coordenadas de ondas y que en este *gauge* los coeficientes de la métrica satisfacen la ecuación de ondas cuasilineal

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta\mathbf{g}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(\mathbf{g}, D\mathbf{g})\,.$$

Para estudiar el problema de Cauchy asociado, las condiciones iniciales que debemos tomar son una métrica riemanniana g sobre una 3-variedad M y un tensor de segundo orden k sobre M. En la evolución, M desempeña el papel de "hipersuperficie inicial" y g y k son respectivamente la "posición" y "velocidad" iniciales de esta hipersuperficie. Una vez tenemos la solución $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ a la ecuación de Einstein, g y k son la primera y segunda forma fundamental de la hipersuperficie espacial M en $\mathcal{M}$, respectivamente. Una observación importante es que las condiciones iniciales han de satisfacer las ecuaciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} R_g - |k|^2 + (\operatorname{tr} k)^2 &= 0\,, \\ \nabla^i(k_{ij} - g_{ij}\operatorname{tr} k) &= 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

donde R_g denota la curvatura escalar de g y la traza, la norma y la derivada covariante se definen utilizando esta métrica. Si estas condiciones se satisfacen, se puede probar que los datos iniciales determinan de forma única el espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, que es la incógnita del problema de evolución.

Como el espacio-tiempo de Minkowski se obtiene mediante la evolución del espacio plano $\mathbb{R}^3$ con $k = 0$, una forma de pedir que el espacio-tiempo sea cercano a Minkowski en infinito de manera compatible con el punto de vista del problema de Cauchy es imponer condiciones sobre los datos iniciales (además de las ecuaciones de compatibilidad). Específicamente, se supone que la 3-variedad M es asintóticamente plana, es decir, fuera de un compacto podemos tomar coordenas cartesianas en

[4] Para simplificar la notación hemos considerado únicamente el caso de vacío, pero podríamos haber tomado la ecuación de Einstein con fuentes con tal que de que el tensor de energía-momento satisfaga la condición de energía dominante.

Figura 3: Richard Schoen.

términos de las cuales la métrica y la segunda forma fundamental se escriben como[5]

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^{-1})\,, \qquad k_{ij} = o(|x|^{-2})\,.$$

Es importante que la masa de M aparece de manera muy concreta en la forma asintótica de la métrica, pues es posible refinar la expresión asintótica de g para obtener

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2m}{|x|}\right)\delta_{ij} + O(|x|^{-2})\,, \tag{7}$$

siendo m la masa de M. Esta fórmula muestra el hecho de que la masa sea positiva o negativa está asociado a que la métrica sea de tipo parabólico o hiperbólico en infinito.

Yau oyó hablar de la conjetura de la masa positiva a través de Geroch en 1973, en la misma conferencia en Stanford en la que él comunicó que tenía un contraejemplo a la conjetura de Calabi. Lo que hace esta conjetura especialmente atractiva desde un punto de vista geométrico es básicamente un enunciado global sobre la curvatura escalar. El motivo es que, cuando se satisfacen ciertas condiciones de barrera, es posible describir el problema de Cauchy utilizando una función de tiempo máxima, lo que permite suponer que $\operatorname{tr} k = 0$. Por la ecuación (6), la curvatura escalar de g es entonces no negativa, y en este importante caso la conjetura de la masa positiva se sigue del siguiente resultado, probado por Schoen y Yau en 1979:

Teorema 2 (Positividad de la masa [6]). *Sea M una 3-variedad riemanniana con curvatura escalar no negativa y que satisface la condición (7). Entonces el número m es mayor o igual que cero. Si $m = 0$, M es el espacio euclídeo.*

Los mismos autores probaron un par de años más tarde que el caso general de la conjetura se puede deducir de este resultado mediante un argumento ingenioso [9]. Witten dio una demostración más sencilla de este teorema, utilizando espinores, en 1982. Cabe destacar que la segunda parte del enunciado, que indica que solo el espacio de Minkowski tiene masa 0, sugiere que el espacio de Minkowski debería de ser estable como solución de la ecuación de Einstein. Este difícil problema fue

[5]Por sencillez describimos únicamente variedades con un solo final. Asimismo, algunas derivadas de los términos pequeños deben satisfacer también condiciones de decaimiento que no detallaremos aquí.

resuelto en 1993 por Christodoulou y Klainerman utilizando técnicas totalmente distintas.

Para concluir, daremos alguna indicación sobre la demostración de la primera parte del Teorema 2. La idea es que si tuviésemos una superficie mínima completa, estable y asintóticamente plana S, podríamos utilizar la segunda variación del funcional de área para probar que la curvatura escalar no puede ser positiva. Esta idea es clásica en esencia y puede verse como un análogo en dimensión superior del uso de la ecuación variacional para geodésicas minimizantes, que se remonta a Jacobi. La parte complicada de la demostración es probar que existe una superficie mínima con las características anteriores.

La primera observación es que se puede tomar una pequeña deformación conforme de la métrica g de tal manera que la masa siga siendo negativa y la curvatura escalar sea estrictamente positiva. Esto nos permite suponer que $R_g > 0$.

Resolviendo el problema de Plateau para los círculos

$$\big\{x : |x| = \rho,\ x_3 = 0\big\}$$

obtenemos discos mínimos S_ρ embebidos y estables. La siguiente observación es que si el parámetro m en (7) es negativo, podemos tomar un número grande r_0 y uno pequeño ϵ tal que para todo $r > r_0$ el borde de los conjuntos

$$C_r := \big\{x : |x| < r,\ |x_3| < \epsilon\big\}$$

tiene curvatura media positiva. Empleando los conjuntos C_r como barreras, podemos obtener estimaciones delicadas para S_ρ que permiten extraer una subsucesión que converge cuando $\rho \to \infty$ a una superficie completa estable asintóticamente plana S.

Como la superficie mínima es estable, se puede emplear que la variación segunda del área tiene un signo para probar que

$$\int_S K_S\, u^2 \geqslant \int_S \left(R_g u^2 + \frac{1}{2}|A|^2 u^2 - |\nabla u|^2\right)$$

para cualquier función $u \in C_0^\infty(S)$, lo que garantiza que

$$\int_S K_S > 0$$

con una elección adecuada de funciones u. Aquí K_S es la curvatura de Gauss de S y A es su segunda forma fundamental. Sin embargo, utilizando el teorema de Gauss–Bonnet se puede ver que

$$\int_S K_S \leqslant 0\,,$$

lo que proporciona la contradicción deseada y demuestra la positividad de la masa.

Referencias

[1] S.T. Yau, On the fundamental group of compact manifolds of non-positive curvature, *Ann. of Math.* **93** (1971), 579–585.

[2] S.T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 201–228.

[3] S.T. Yau (con S.Y.Cheng), On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 495–516.

[4] S.T. Yau (con S.Y.Cheng), On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j) = F(x,u)$, *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 41–68.

[5] S.T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339–411.

[6] S.T. Yau (con R. Schoen), Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three- dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature, *Ann. of Math.* **110** (1979), 127–142.

[7] S.T. Yau (con R. Schoen), On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65** (1979), 45–76.

[8] S.T. Yau (con W. Meeks), Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory, *Ann. of Math.* **112** (1980), 441–484.

[9] S.T. Yau (con R. Schoen), Proof of the positive mass theorem II, *Comm. Math. Phys.* **79** (1981), 231–260.

[10] S.T. Yau (con W. Meeks), The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. The embedding of the solution given by Douglas–Morrey and an analytic proof of Dehn's lemma, *Topology* **21** (1982), 409–442.

[11] S.T. Yau, Problem section, en: *Seminar on Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1982, pp. 669–706.

[12] S.T. Yau (con P. Li), On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, *Acta Math.* **156** (1986), 153–201.

[13] S.T. Yau, Open problems in geometry, en: *Differential geometry: partial differential equations on manifolds*, AMS, Providence, 1993, pp. 1–28.

[14] S.T. Yau (con A. Strominger y E. Zaslow), Mirror symmetry is T-duality, *Nuclear Phys. B* **479** (1996), 243–259.

[15] S.T. Yau (con B. Lian y K. Liu), Mirror Principle I, *Asian J. Math.* **1** (1997), 729–763.

[16] S.T. Yau (con F. Finster, N. Kamran y J. Smoller), Nonexistence of time-periodic solutions of the Dirac equation in an axisymmetric black hole geometry, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), 902–929.

[17] S.T. Yau (con F. Finster, N. Kamran y J. Smoller), A rigorous treatment of energy extraction from a rotating black hole, *Comm. Math. Phys.* **287** (2009), 829–847.

Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM), C/ Nicolás Cabrera 13-15, 28049 Madrid
Correo electrónico: aenciso@icmat.es
Página web: http://www.icmat.es/miembros/aenciso