El teorema $p^a q^b$ de Burnside

Carolina Vallejo Rodríguez

28 de junio - 1 de julio de 2021
ICMAT

Resumen del curso

Un grupo (finito) se dice resoluble si sus factores de composición son abelianos. Esta definición la introdujo de forma indirecta E. Galois, a finales del siglo XIX, en sus trabajos sobre resolubilidad de ecuaciones polinómicas. Usando argumentos de *conteo*, básicamente usando Teoría de Sylow, se puede probar, por ejemplo, que los grupos de orden pq y p^2q (donde p y q son números primos) son resolubles. Llevando este tipo de técnicas al extremo uno puede probar que los grupos de orden 21.952 son resolubles. ¿Qué tiene de particular esta cifra? Pues que su decomposición en factores primos es $2^6 \cdot 7^3$. En este curso, probaremos que, en general, los grupos de orden $p^a q^b$ son resolubles para cualquier par de primos p y q y de exponentes a y b. Este resultado fue originalmente probado por W. Burnside [2] usando técnicas diríase externas a la Teoría de Grupos. Burnside usó Teoría de Caracteres, una técnica incipiente en aquel momento y de cuya utilidad aplicada al campo de la Teoría de Grupos muchos dudaban (incluido el propio Burnside). Fueron necesarias muchas décadas y el genio de matemáticos como J. Thompson (Medalla Fields en 1970, Premio Wolf en 1992 y Premio Abel en 2008) y H. Bender [1] para lograr una prueba de este resultado que solo involucrara técnicas de Teoría de Grupos.

En este curso, explicaré la Teoría de Caracteres necesaria para llegar a probar el teorema $p^a q^b$ de Burnside. Si el tiempo lo permite, discutiré cuestiones abiertas relacionadas.

Bibliografía

[1] H. Bender, A group theoretic proof of Burnside's $p^a q^b$-theorem. *Math. Z.* **126** (1972) 327–338.
[2] W. Burnside, On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$. *Proc. London Math. Soc.* (1904) 388–392.
[3]I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups.* AMS Chelsea, 2006.
[4] G. James and M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups* (2nd ed.) Cambridge University Press, 2001.