Teresa Luque
Departamento de Análisis Matemático y Matemática aplicada
Universidad Complutense de Madrid
Plaza Ciencias, 3, 28040 Madrid
t.luque@ucm.es

Desigualdades con pesos para operadores clásicos

ESCUELA JAE 2018 (25- 29 de Junio de 2018)

Resumen. El curso tiene como objetivo familiarizarse con ciertos operadores clásicos del análisis armónico a través del estudio de su acotación en espacios de Lebesgue con pesos (*desigualdades con pesos*). Estos operadores serán la función maximal de Hardy Littlewood, la transformada de Hilbert, el multiplicador del disco y el operador de Bochner Riesz.

Se empezará motivando el sentido de cada uno de estos operadores y se introducirá primero su acotación en espacios de Lebesgue sin pesos. A continuación, se fijarán los pesos de Muckenhoupt como clase *natural* para extender dichas acotaciones a espacios de Lebesgue con pesos. Finalmente, veremos la utilidad que pueden tener las desigualdades más generales de pesos.

A través de estas cuestiones, el alumno podrá conocer *herramientas de trabajo básicas* en el análisis armónico como son la transformada de Fourier, la descomposición de Calderón-Zygmund, la interpolación entre espacios de Lebesgue y la extrapolación. Además, comprenderemos algunas de las preguntas que interesan actualmente en el área.

Palabras clave. Espacios de Lebesgue, pesos, pesos de Muckenhoupt, operador maximal de Hardy-Littlewood, transformada de Hilbert, multiplicador del disco, multiplicador de Bochner Riesz, transformada de Fourier, descomposición de Calderón-Zygmund.

Guión diario de trabajo.

Lunes 25. Introducción general al análisis armónico.

- ¿Qué es el análisis armónico (real)? De las propiedades cuantitativas a las cualitativas. Ejemplo principal de motivación: series de Fourier.

  Ejemplo 0.1. *Dada f (ya veremos qué le pedimos) y el operador $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, ¿Cómo de bien representa $S_N f$ a f?*

- Objetivo de nuestro curso:

  Problema 0.2. *Determinar (las) medidas (positivas) μ y ν para las que un cierto operador T dado está acotado de $L^p(\mu)$ en $L^q(\nu)$; esto es: para que tengamos la siguiente desigualdad.*

  $$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\nu(x)$$

  Este problema tiene el siguiente análogo débil.

  Problema 0.3. *Determinar (las) medidas positivas μ y ν para las que un cierto operador T dado está acotado de $L^p(\mu)$ en $L^{q,\infty}(\nu)$; esto es: para que tengamos la siguiente desigualdad.*

  $$\lambda^q \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\nu(x) \right)^q$$

  Ambos problemas son excesivamente generales así planteados y difícilmente abarcables, pero podemos simplificar el escenario si cambiamos las medidas por PESOS (**funciones positivas, localmente integrables y que toman valores en** $(0, \infty)$).

  ¿Qué sentido tiene estudiar estos problemas?

- Escenario de trabajo: espacios de Lebesgue con respecto a la medida de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, y espacios de Lebesgue *w-pesados* ($L^p(w)$). Sus análogos débiles: $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Funciones acotadas de soporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Funciones de la Clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Distribuciones temperadas $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$.

- Protagonistas: operadores clásicos. M maximal de Hardy-Littlewood como representante de las funciones maximales, H transformada de Hilbert (como representante de los operadores de Calderón-Zygmund) y T^α, $\alpha \geq 0$, los operadores de Bochner-Riesz, como operadores *todavía más singulares*.

  ¿A qué se debe la importancia de estos operadores?

Martes 26-Miércoles 27. Herramientas de utilidad. El operador maximal de Hardy-Littlewood. La clase de pesos A_p. Empezaremos detallando algunas herramientas que vamos a usar con frecuencia.

- Lemas de recubrimiento tipo Vitali.

- Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

  Teorema 0.4. *Sea T un operador sublineal que es débil (p_0, p_0) y débil (p_1, p_1), siendo $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, entonces T es fuerte (p, p) para todo $p \in (p_0, p_1)$.*

  La demostración está detallada en [Duo01, pp. 28-30], pero hemos de quedarnos con dos herramientas clave:

1. Recordar que una función que está en L^p, siempre vamos a escribirla como una suma de dos funciones que estan en L^{p_0} y en L^{p_1} respectivamente, siendo $p \in [p_0, p_1]$. Simplemente hagamos esta descomposición, para un cierto $\lambda > 0$

$$f_1(x) = f(x)1_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}$$

$$f_2(x) = f(x)1_{\{x:|f(x)|\leq\lambda\}}$$

2. $$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| d\lambda.$$

- Descomposición de Calderón-Zygmund. Necesitamos definir los **cubos diádicos** y entender sus buenas propiedades. Entonces podremos comprender el siguiente resultado.

  Teorema 0.5. *Dada una función integrable* [1] *y un número $\lambda > 0$, existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j\}$ tal que*

  1. $|\cup_j Q_j| \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}$.
  2. $\lambda < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \leq 2^n \lambda$.
  3. $f(x) \leq \lambda$ *c.t.p si* $x \notin \cup_j Q_j$.

  La demostración está detallada en las páginas 35 y 36 de [Duo01].

De manera inmediata con estas herramientas podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 0.6. *El operador maximal de Hardy Littlewood M verifica:*

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\,, 1 < p \leq \infty.$$

Para probar la desigualdad débil $(1,1)$ usaríamos el lema de recubrimiento o la descomposoción de Calderón-Zygmund. Como trivialmente $M : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces por interpolación deducimos que M es fuerte (p,p).

Ahora estamos listos para plantearnos el Problema 0.2 y el Problema 0.3 para M (para pesos y con $p = q$). Esto es:

Problema 0.7. *Determinar (los) pesos w para los que M dado está acotado de $L^p(w)$ en $L^p(w)$; esto es: para que tengamos la siguiente desigualdad.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dw(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) d(x),\ 1 < p < \infty, \tag{1}$$

[1] Esta condición se puede relajar pero no nos metemos en esto

Problema 0.8. *Determinar (los) pesos w para ara los que M dado está acotado de $L^p(w)$ en $L^{p,\infty}(w)$; esto es: para que tengamos la siguiente desigualdad.*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx,\ 1 \leq p < \infty. \tag{2}$$

Observamos que (1) implica (2) triviamente por la desigualdad de Chebyschev.

De manera muy directa vamos a deducir una **condición necesaria** para estos problemas: la clase A_p de pesos.

Definición 0.9. Sea $1 < p < \infty$. Decimos que el peso w pertenece a la clase de pesos A_p, y denotamos $w \in A_p$, si existe una constante c tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq c,$$

para todo $Q \in \mathbb{R}^n$. Esta constante no depende de Q y la menor de la constantes para las que esta desigualdad es cierta se llama la constante A_p o la característica del peso.

- ¿Cómo es esta condición cuando p tiende a 1?

  Definición 0.10. Decimos que el peso w pertenece a la clase de pesos A_1, y denotamos $w \in A_1$, si existe una constante c tal que

  $$Mw(x) \leq cw(x) \text{ c.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

  La menor de la constantes para las que esta desigualdad es cierta se llama la constante A_p o la característica del peso.

  ¿Si $M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)$ entonces $w \in A_1$?

- ¿Cómo es esta condición cuando p tiende a ∞?

- ¿Será también suficiente esta condición? Es decir, si $w \in Ap$, $1 < p < \infty$, implica que $M : L^p(w) \to L^p(w)$. ¿Y en los extremos? La respuesta es SI. De hecho, se tiene:

  Teorema 0.11. *Sea $1 < p < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  1. $w \in A_p$
  2. $M : L^p(w) \to L^p(w)$.
  3. $M : L^p(w) \to L^{p,\infty}(w)$.

  Además.

  Teorema 0.12. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  1. $w \in A_1$
  2. $M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)$.

Observación 0.13. M no es fuerte $(1,1)$, de hecho $Mf \in L^1$ sólo cuando f es idénticamente nula!! Pensar esto.

Por tanto, Teorema 0.11 y Teorema 0.12 dan respuesta completa a los Problema 0.7 y el Problema 0.8. Sin embargo, para probarlos todavía necesitamos ver que $w \in Ap$ implica que M es débil (p,p) y, además, analizar algunas propiedades de la clase A_p.

Propiedades básicas de la clase A_p.

1. $A_p \subset A_q, 1 \leq p < q$.
2. $w \in A_p$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A_{p'}$.
3. Si $w_0, w_1 \in A_1$, entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.
4. Si $w \in A_p$, entonces $w \in A_q$, para un cierto $q < p$.
5. Los pesos A_p son doblantes.

Jueves 28. Nos quedamos estudiando las propiedades anteriores. Insisto en un par de comentarios. Las propiedades (1)-(3) se deducen, como ya dijimos ayer de la propia definición de las clases A_p junto con la desigualdad de Hölder. Para (4) utilizamos el siguiente resultado:

Lema 0.14 (Desigualdad de Hölder inversa)**.** *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Si* $w \in A_p$*, existe* $\epsilon > 0$ *y* C *constante tal que*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\epsilon}dx \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)^{1+\epsilon}.$$

Es importante reseñar que (3) es un SI y SÓLO SI (**Teorema de factorización de las clases** A_p).

La demostración de este resultado usa descomposición local de Calderón-Zygmund y está detallada en [Duo01, pp.137-138]. Efectivamente, con este lema y tomando q tal que $(1+\epsilon)(1-p') = 1-q'$ se deduce (4). Otros comentarios:

- Ejemplos de pesos A_p: los pesos radiales $w(x) = |x|^\alpha$. Analizar el rango de α, en función de p, $1 \leq p < \infty$ y de la dimensión, para que estos pesos estén en A_p.
- La clase $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$.

Podemos dar ya una prueba completa el Teorema 0.11. Supongamos que tenemos la siguiente afirmación (la probaremos en clase)

Afirmación: $w \in Ap$ implica $M : L^p(w) \to L^{p,\infty}(w)$.

Entonces, en particular, por la propiedad (4) existe $q < p$ tal que $M : L^q(w) \to L^{q,\infty}(w)$. Además, trivialmente, $M : L^\infty(w) \to L^\infty(w)$. Por interpolación, se sigue el resultado.

Una desigualdad de pesos *más interesante*.

Teorema 0.15. *[Desigualdad de Fefferman-Stein] Sea w un peso, existen constantes C_1 y C_2 tal que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dw(x) dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x) d(x),\ 1 < p < \infty.$$

Comentarios:

- Las constantes C_1 y C_2 no dependen del peso.
- Idea de la demostración. La segunda desigualdad se prueba mediante un lema de recubrimiento tipo vitali. La segunda a partir de la primera y de nuevo interpolación, pues igualmente $M : L^\infty(Mw) \to L^\infty(w)$.

La transformada de Hilbert. Empezamos recordando la definición que dimos el martes. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

- Antes de plantearnos los problemas análogos a Problema 0.7 y Problema 0.8 para la transformada de Hilbert, necesitamos conocer sus acotaciones en espacios de Lebesgue. Aunque no entremos en detalle, discutiremos el siguiente resultado de Riesz y Kolmogorov respectivamente.

  Teorema 0.16. *H es fuerte (p, p), $1 < p < \infty$, y débil $(1, 1)$*

- Este resultado nos permite extender, mediante un argumento de densidad, la transformada de Hilbert para funciones en L^p.
- Analizamos lo que ocurre para funciones en L^1, ¿ Hf puede estar en L^1?.
- Con respecto a pesos A_p se tiene el siguiente resultado de Coifman y Fefferman:

  Teorema 0.17. *Si $w \in Ap$, entonces $H : L^p(w) \to H^p(w)$, $1 < p < \infty$. Además, si $w \in A_1$, $H : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w)$*

- ¿Está condición es necesaria?
- ¿Podemos tener resultados análogos a la desigualdad de Fefferman- Stein (Teorema 0.15) para H?

Un comentario final sobre la extrapolación. ¡Poderosa herramienta!

Agradecimientos. Agradezco vuestra asistencia al curso y atención. Como ya he indicado esta es un área en crecimiento, con muchas líneas de investigación activas y problemas interesantes para estudiar en marco de programa de máster o/y doctorado. Ya sabéis donde encontrarme.

Referencias comentadas.

[Duo94] J. Duoandikoetxea, *Desigualdades con peso en Análisis Armónico*, notas para la séptima Escuela Venezolana de Matemáticas, 1994.

[Duo01] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29, American Mathematical Society, 2001.

[Duo18] J. Duoandikoetxea, *A review of some results about the disc and Bochner-Riesz multipliers*, 2018. Aparecerá en la Revista de la Real Academia Canaria de Ciencias.

[GCRdF] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematical Studies 116, North-Holland, Amsterdam, 1985. Los capítulos II y IV son los conectados con nuestra materia.

[S93] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real variable methods, orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993. Capítulos I, II, V, VI son los que recogen este curso.

[T07] T. Tao, *A technical survey of harmonic Analysis*, 2007.

[T02] T. Tao, *Lecture notes in harmonic Analysis*. Estas notas han sufrido múltiples revisiones. Los capítulos 0-4 cubren parte de la materia de nuestro curso. Las podéis encontrar online en *http://www.math.ucla.edu/ tao/247a.1.06f/*.