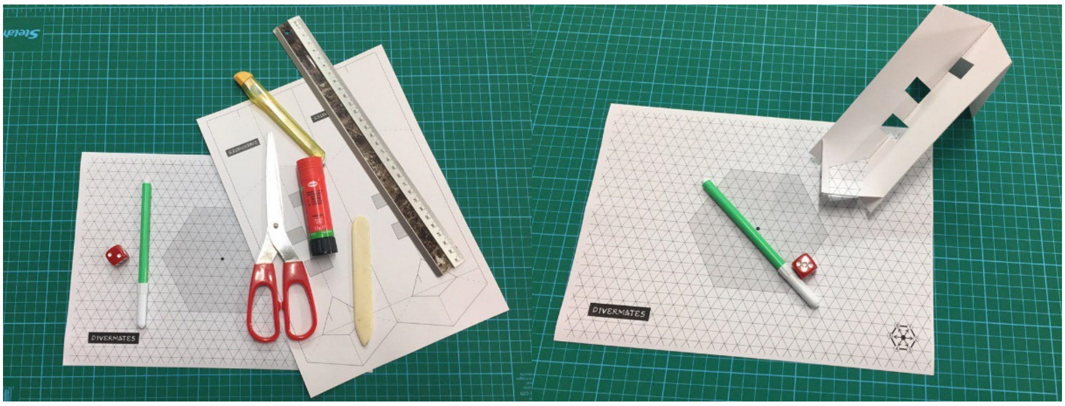
REVOLUCIONES MATEMÁTICAS: HENRI POINCARÉ

Henri Poincaré sentó las bases de la teoría del caos al enfrentarse al llamado problema de los tres cuerpos. Esta cuestión consistía en determinar las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua, partiendo de unas velocidades y posiciones ya dadas. Aunque el problema de los dos cuerpos tiene solución, propuesta dos siglos antes por Isaac Newton, Poincaré demostró que no hay una fórmula que rija el problema de los tres cuerpos. En muchos casos la solución puede ser caótica, ya que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden acabar en situaciones finales totalmente dispares, imposibilitando la predicción a largo plazo.

Un tobogán de dados

Vamos a proponer un experimento para visualizar la teoría del caos con un tobogán de dados. Para construir este tobogán necesitarás tijeras, cúter, pegamento y el recortable que puedes en el anexo al final de este documento.

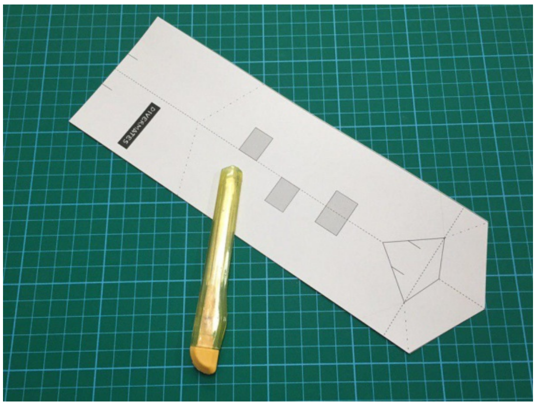
Además, para facilitar la construcción te recomendamos también tener una regla y una plegadera, que es una especie de cuchillo sin filo, que se utiliza en manualidades para hacer dobleces en cartones y cartulinas. La plegadera puede sustituirse por la parte roma de unas tijeras, o por un bolígrafo gastado, pues sólo sirve para marcar, con ayuda de la regla, las líneas que después doblaremos.



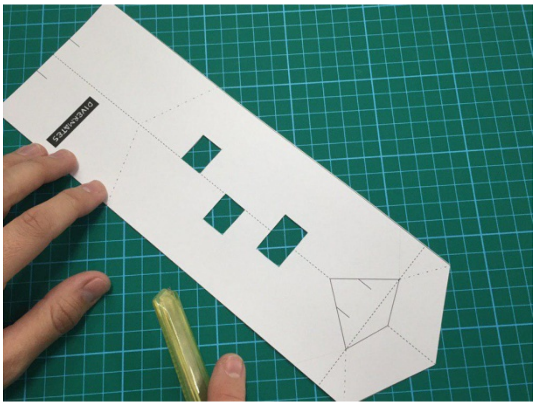
Atención: Nuestro dado tiene 16 mmde lado. Si vas a utilizar un dado más pequeño es conveniente hacer los huecos del tobogán más pequeños, para que el dado no se caiga.

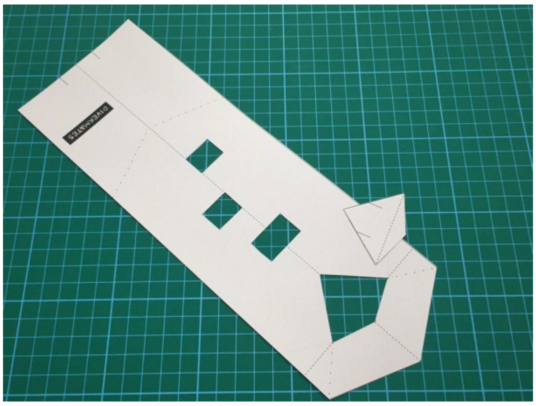
¿Cómo se construye?

Al final de este documento se incluyen dos recortables para hacer dos toboganes. Separa uno de ellos, recortando por la línea exterior.

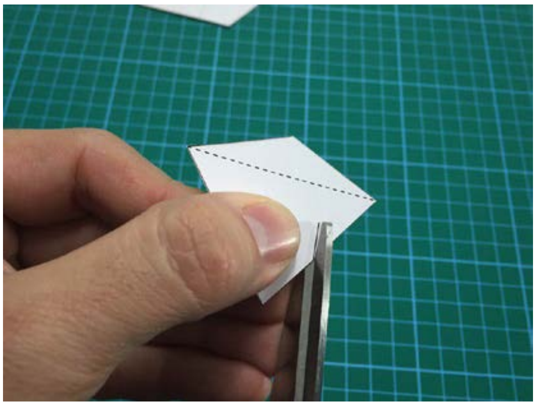


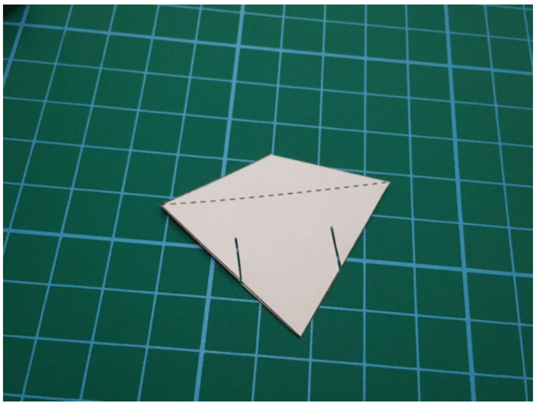
A continuación recorta con el cúter los huecos grises y el cuadrilátero de la parte inferior. Cuidado, el cuadrilátero tendremos que usarlo más tarde, ¡no lo rompas ni lo tires!



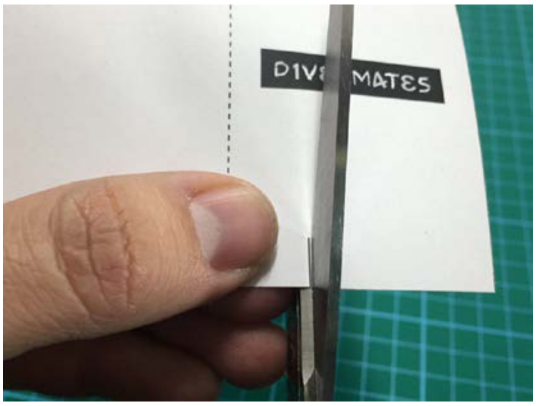


En el propio cuadrilátero, recortar las dos líneas que hay dibujadas. Es conveniente recortar un pequeño grosor de la línea de, aproximadamente, un milímetro.

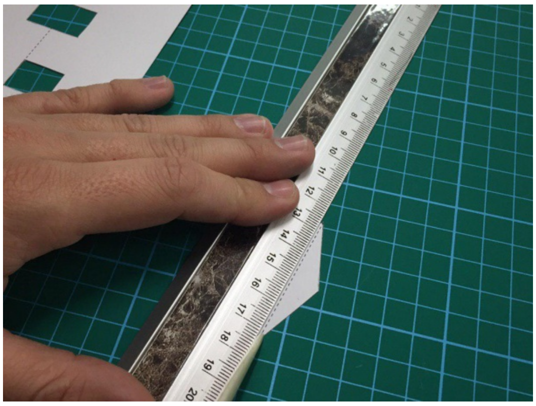




Recortar las dos líneas de la parte inferior del recortable. Se hará de la misma forma que las líneas anteriores, cortando un pequeño grosor de la línea. Estos huecos servirán más adelante para encajar el cuadrilátero en la pieza grande que forma el tobogán.

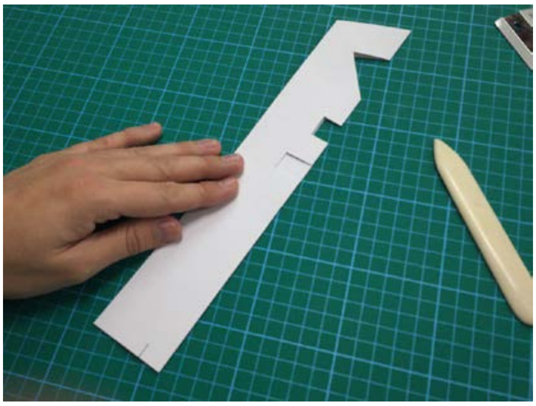


Llegados a este momento pasamos a realizar todos los dobleces. Primero recomendamos marcar todas las líneas de doblado con una regla y la plegadera.

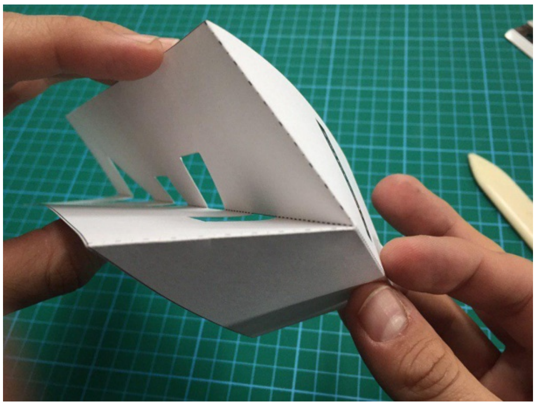


Cuando tenemos todas las líneas marcadas, pasamos a realizar el doblado. Para ello es importante distinguir los dos tipos de línea que tenemos en el recortable. Por un lado tenemos la línea discontinua que se doblará en valle, de forma que el doblez quedaría hundido, y por otro la línea punto-raya que se doblará en montaña, es decir, formando una cresta en la cartulina. Un doblez en montaña sería un valle si miro la hoja desde la otra cara del papel, y viceversa.

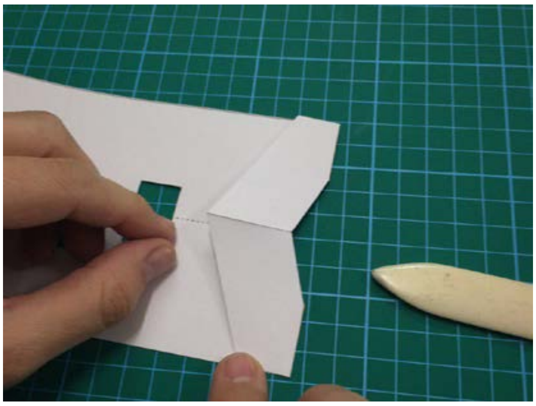
Empezamos por la línea más larga que divide a lo largo el recortable en dos. Como esta línea está marcada para ser doblada en valle, se dobla como muestra la imagen. Como ves si la observas desde la cara impresa de la cartulina el doblez queda hundido, para hacer el carril necesario para el tobogán, pero desde la cara no impresa vería una cresta.

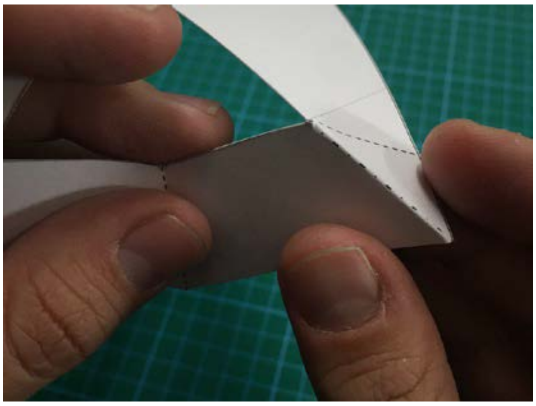


Seguimos con las dos líneas oblicuas, que deberán doblarse en dirección contraria.

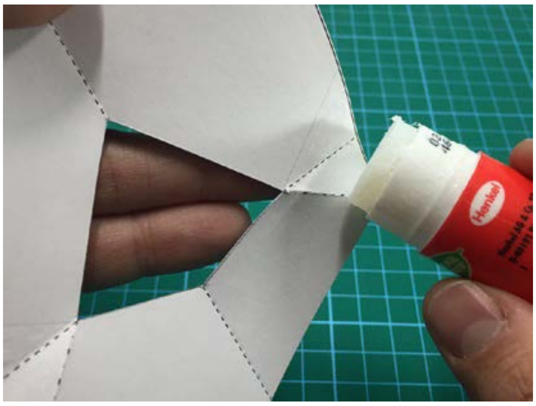


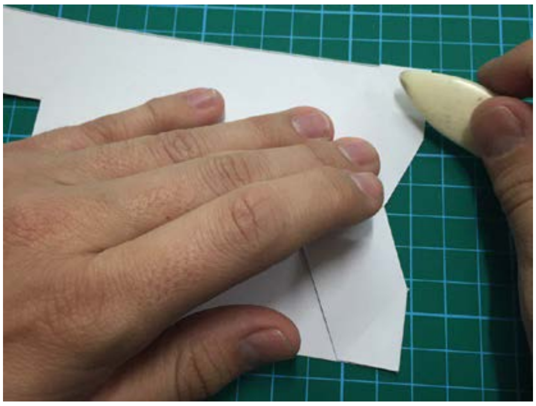
Por último se realizan los dos dobleces del otro extremo, uno en valle y el otro en montaña. Ten en cuenta que la línea gris clara no hay que doblarla.





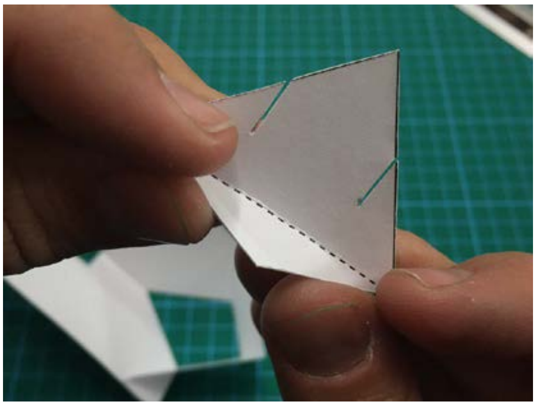
Aplicar pegamento en el triángulo que delimita esta línea gris, y pegar según la dirección del doblado.

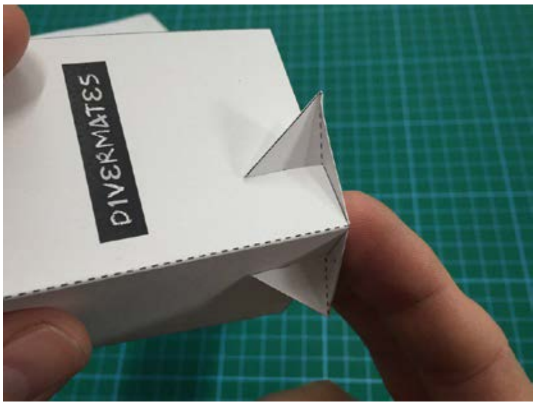




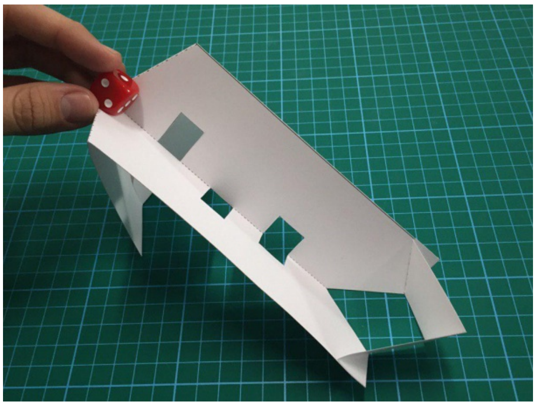
¡Ya tenemos nuestro tobogán!

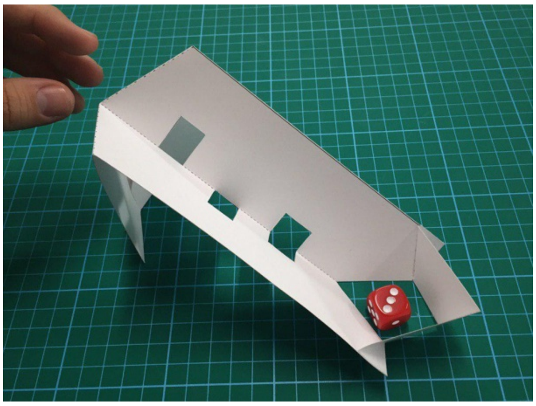
Para darle un poco de consistencia, se puede colocar en “la pata” el cuadrilátero que dejamos apartado al empezar la construcción. Para ello se hacen encajar las líneas que recortamos. Primero doblamos la línea del cuadrilátero para, a continuación, encajar las dos piezas como muestra la imagen.





Ahora sí, ¡ya tenemos el tobogán listo para utilizarlo!





¿Cómo funciona?

Si el tobogán fuera liso, sin agujeros, estaríamos frente un sistema determinista, es decir, no habría azar ni caos en el lanzamiento. Si dejase caer el dado con la cara del 3 hacia arriba, se deslizaría y llegaría a la mesa en esa misma posición.

Sería lógico suponer que al establecer cada agujero en la rampa del tobogán, éstos deberían hacer rotar al dado siempre de igual forma, por lo que debería predecirse fácilmente el número resultante. Sin embargo, una pequeñísima variación en la rotación del dado al encontrarse con cada agujero hará variar totalmente la solución final. Estas variaciones se pueden deber a la velocidad a la que cae el dado, que tiene modificaciones mínimas en función de cómo roza con las paredes del tobogán, a la inclinación con la que el dado llega a cada agujero, etc. De esta manera, al incluir estos agujeros en la rampa, estamos generando un sistema no determinista, es decir, caótico. Aunque tiremos el dado siempre desde la misma posición, la solución final irá cambiando al realizar tiradas sucesivas. ¡Te animamos a probarlo!

La caminata aleatoria

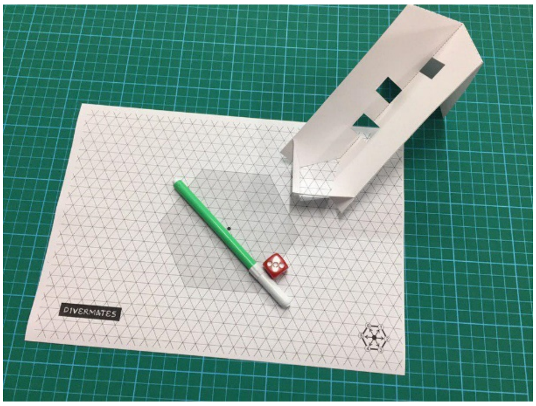
Es posible aplicar los lanzamientos del dado a un problema matemático con un curioso nombre: la caminata aleatoria.

Antes de comenzar, vamos a ponernos en situación. En matemáticas, denominamos caminata aleatoria a la trayectoria resultante de hacer sucesivos pasos en direcciones seleccionadas al azar. Por ejemplo, el camino seguido por una partícula de polen al viajar por un líquido o una partícula de humo al moverse por el aire son caminatas aleatorias o *camino browniano*. Pese a que parece un movimiento azaroso, podemos hacer algunas predicciones sobre él.

Existe un resultado que afirma que a pesar de que nuestro camino se construya dando pasos aleatorios, estadísticamente el punto final estará a una distancia del punto de origen que se aproxima a la raíz cuadrada de la distancia total recorrida.

Para verificar este resultado, vamos a realizar un experimento en el que después de una serie de tiradas (concretamente 36) vamos a comprobar a qué distancia del centro ha llegado la partícula.

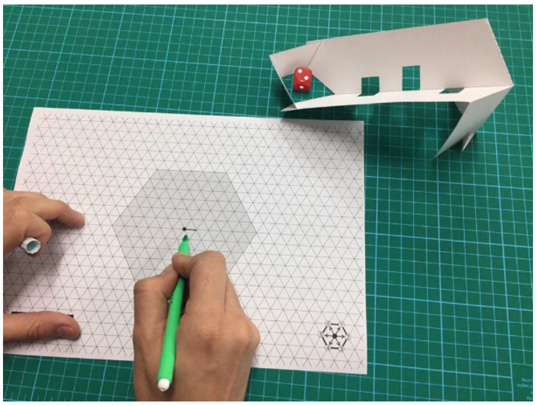
Para simular una caminata aleatoria sólo necesitaremos el tobogán de dados, un rotulador y la plantilla que puedes encontrar en los anexos al final de este documento:

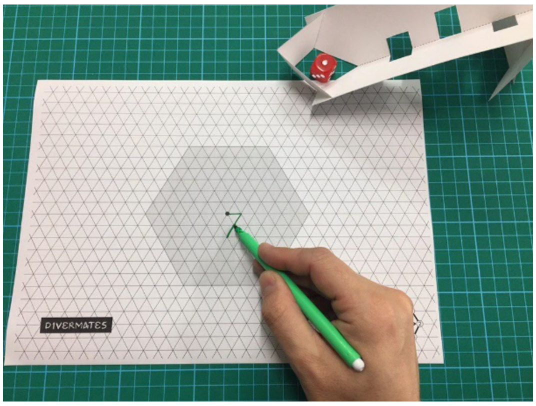


Recomendamos plastificar esta plantilla y dibujar sobre ella con rotulador *velleda*, para poder realizar varias veces el experimento sin derrochar papel. Proponemos realizar la actividad por parejas. Un alumno deberá dejar caer el dado por el tobogán para observar el resultado obtenido. Con cada resultado, el otro alumno se irá moviendo por la plantilla dada dando un paso en la dirección correspondiente al valor del dado según la leyenda que aparecer en la esquina inferior derecha del mapa.

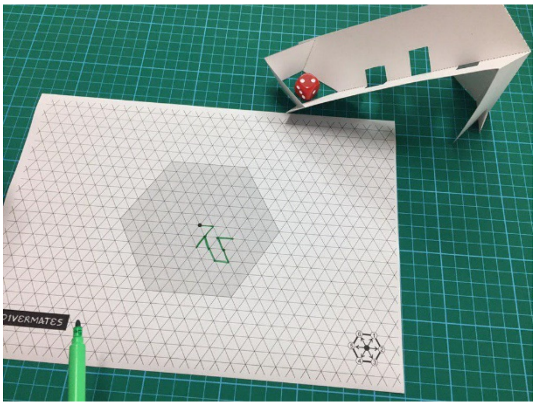
Veamos un par de ejemplos:

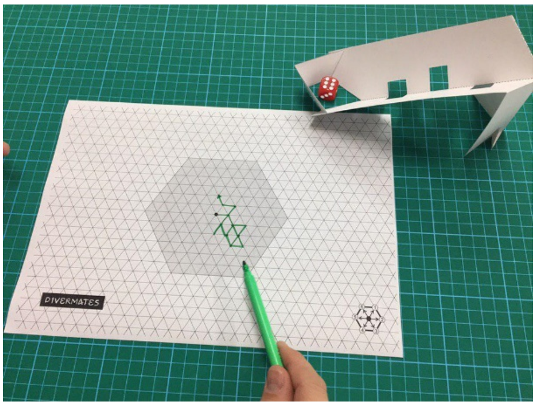
En el primer experimento sacamos un 2, por lo que comenzamos dibujando una línea horizontal hacia la derecha. Después sacamos dos 4 seguidos, y a continuación, un 1. Como el 4 y el 1 tienen direcciones opuestas, esta cuarta tirada nos hizo retroceder por nuestro camino.



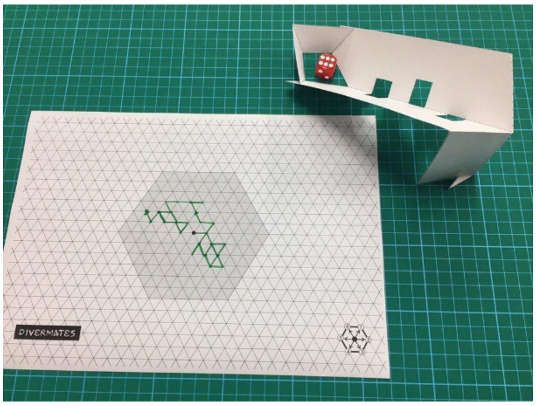


Mostramos a continuación cómo quedó nuestro camino después de las tiradas 10 y 17. Podemos observar que tras sucesivos lanzamientos el camino forma bucles e idas y venidas.



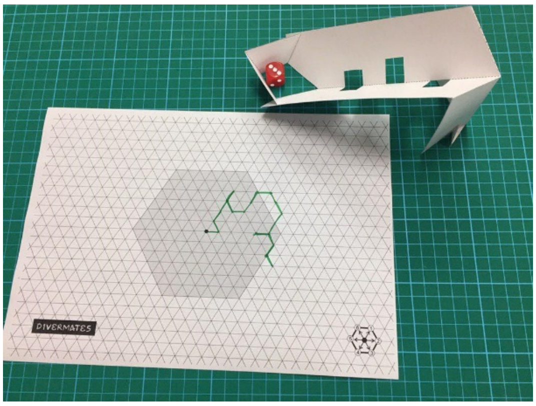


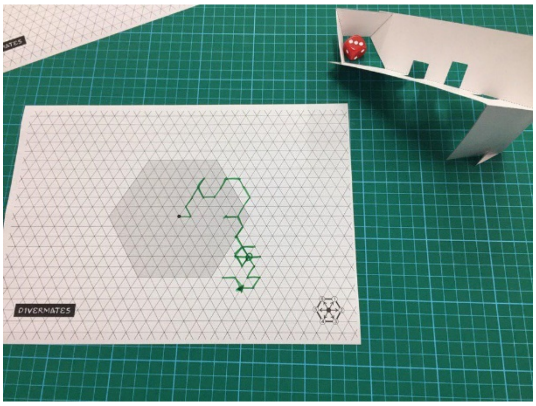
Finalmente, tras la tirada 36 el resultado quedó como muestra la imagen.



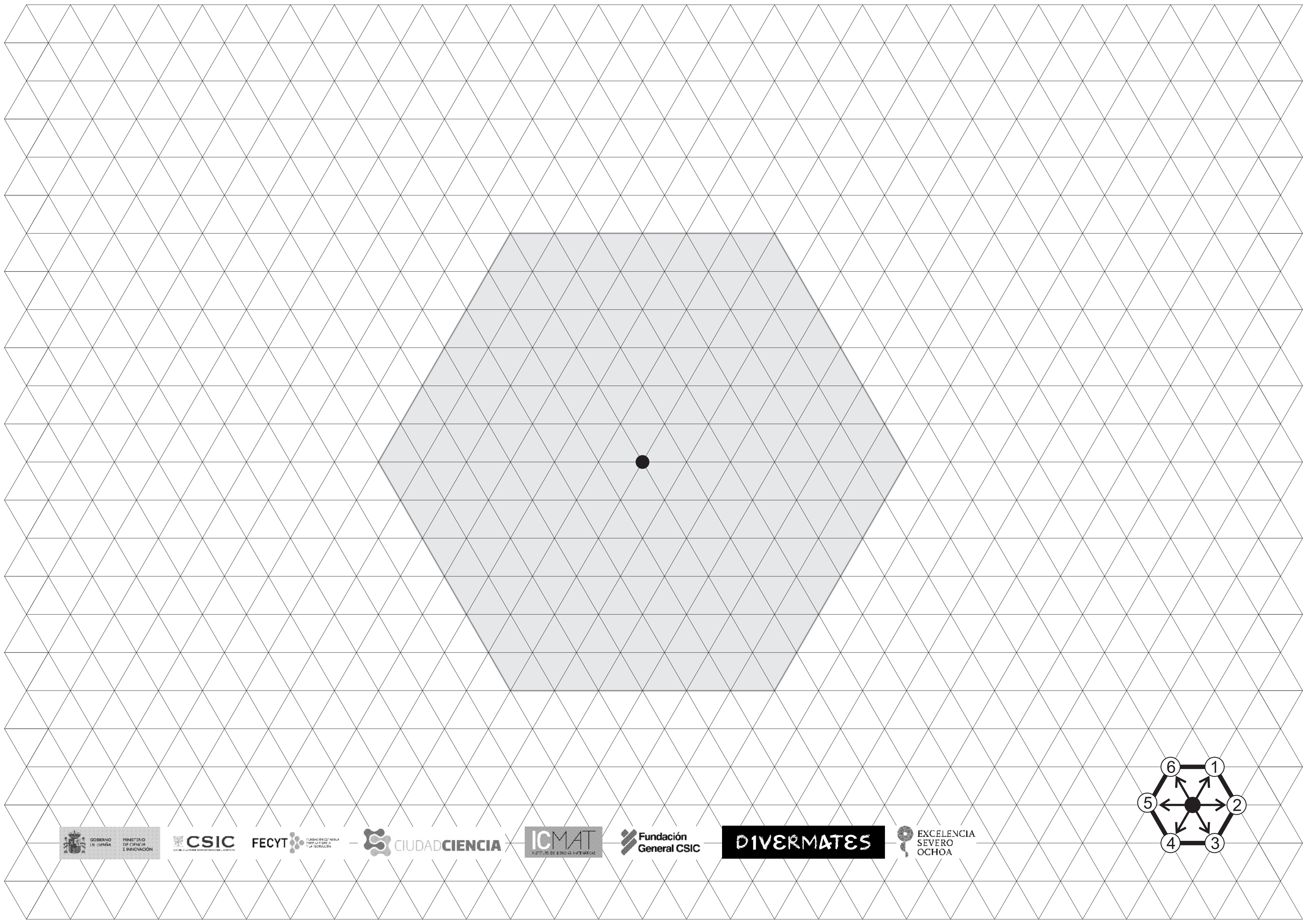
La zona sombreada de la plantilla marca los puntos a distancia 6 o menos del punto inicial. Como se ve en la imagen, en este primer ejemplo la partícula quedó cerca del límite, a solo 5 pasos de distancia del centro.

Os mostramos el camino de un segundo experimento tras la tirada 20 y al finalizar con la tirada 36. Como vemos, tras 20 lanzamientos nos hemos distanciado mucho del origen, pero en los 16 últimos lanzamientos nos hemos movido de nuevo hacia el borde, haciendo bucles y retrocesos.

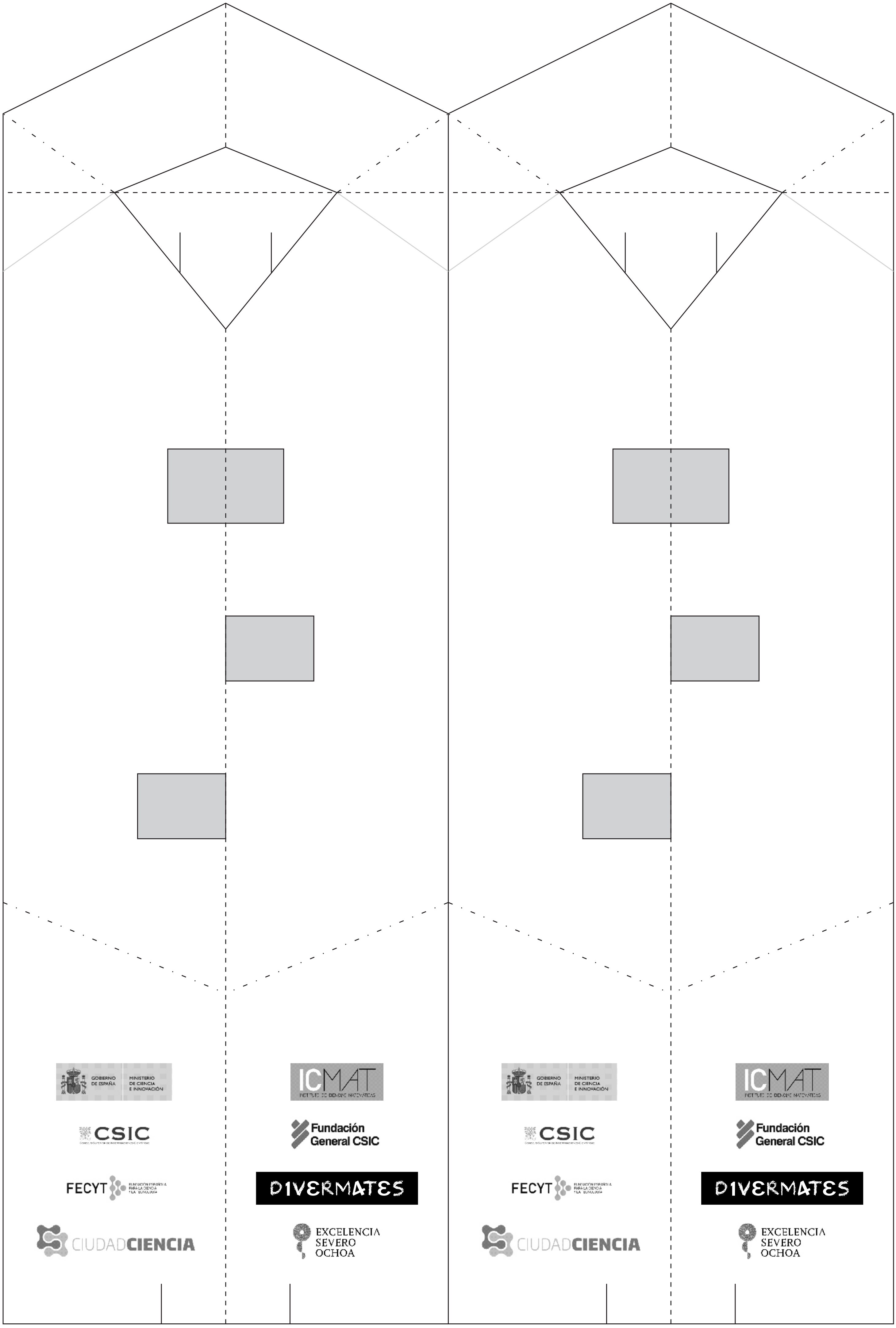




Como veis, a pesar de lo azaroso del camino, se verifica que estadísticamente si hemos dado un total de 36 pasos, la posición final queda aproximadamente a 6 pasos de distancia del origen, verificando la propiedad de que la distancia directa del origen al final es la raíz cuadrada de la distancia total recorrida.



Gobierno de España · Ministerio de Ciencia e Innovación · CSIC · FECYT · CiudadCiencia · ICMAT · Fundación General CSIC · DIVERMATES · Excelencia Severo Ochoa


GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN
ICMAT
CSIC
Fundación General CSIC
FECYT
DIVERMATES
CIUDADCIENCIA
EXCELENCIA SEVERO OCHOA
GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN
ICMAT
CSIC
Fundación General CSIC
FECYT
DIVERMATES
CIUDADCIENCIA
EXCELENCIA SEVERO OCHOA