CAPÍTULO 4:

Los límites de las matemáticas

En este capítulo hemos hablado de la importancia del concepto de demostración dentro del ámbito de las matemáticas. En esta actividad se presentará un ejemplo de demostración, para entender en la práctica qué significa esa “secuencia de pasos lógicos” que configura el razonamiento, tal y como se plantea en el vídeo.

En concreto, utilizaremos un proceso lógico para argumentar si es posible resolver un rompecabezas, o por lo contrario, es imposible. El rompecabezas en el que nos vamos a fijar se comercializó con el nombre de Vee-21. El planteamiento es sencillo: se parte de un tablero cuadrado de 64 casillas, y se coloca un cuadrado negro en una casilla cualquiera. El objetivo es recubrir el resto del tablero con 21 piezas en forma de L, pero no podemos colocar dos piezas del mismo color colindantes. Al final de este documento encontrarás una plantilla que puedes recortar y utilizar para intentar resolver este rompecabezas.

Es posible demostrar que el problema se puede resolver sea cual sea la posición del cuadrado negro original, ignorando el color de las piezas utilizadas para ello. Para poder además incluir la regla de restricción de los colores, deberíamos aplicar el llamado “Teorema de los cuatro colores”. Este teorema, propuesto en 1852, demuestra que solo hacen falta cuatro colores para colorear cualquier mapa geográfico de forma que no haya dos países colindantes con el mismo color. Para probar formalmente el problema se hizo uso del poder de cómputo de los ordenadores, lo que generó una gran polémica dentro de la comunidad matemática, pero eso es otro tema. Esta es una demostración muy interesante e importante de la historia de las matemáticas, pero quizá demasiado complicada para esta actividad.

A continuación veremos una demostración sin fijarnos en el color, es decir, sin que las fichas tengan color, ni se aplique la regla anteriormente mencionada, simplemente fijándonos en la forma de las piezas y el punto de partida de la ficha negra.

El concepto de demostración por inducción

Existen algunas estrategias preestablecidas que podemos utilizar a menudo para llevar a cabo demostraciones. Una de estas estrategias se conoce como “principio de inducción”, y se suele utilizar para demostraciones que dependen de números naturales. El funcionamiento de este principio se podría ejemplificar con la siguiente metáfora: ¿qué tengo que enseñar a un robot para que me ayude a manejar un libro que quiero leer? En realidad el robot solo tendría que aprender a hacer dos cosas:

- Colocar el libro abierto por la página 1.

- Pasar de una página a la siguiente.

Si el robot aprendiese estas dos capacidades, ya podría llevar el libro a la página 35, 47 o 153, simplemente repitiendo una y otra vez su mecanismo. Las demostraciones aplicando el principio de inducción son similares:

- Puedo demostrar algo cuando n vale 1.

- Puedo demostrarlo para cualquier n, dando por supuesto que es cierto para n-1, que sería equivalente a “paso de una página a la siguiente”.

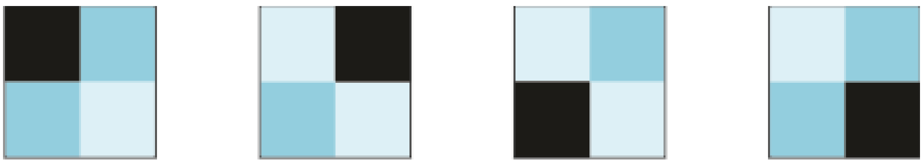
Veamos cómo aplicar esta idea al problema del puzzle.

Recubriendo un cuadrado con L triominós

Vamos a intentar demostrar que cualquier cuadrado de lado 2^n (escogemos este ancho porque nos facilitará la demostración) al que se le ha cubierto una casilla, se podría recubrir con piezas en forma de L, que llamaremos L-triominós. Por cierto, se suele utilizar el término triominó para las formas geométricas formadas por tres cuadrados colindantes. De la misma forma se utiliza tetraminó para las formas de cuatro cuadrados (las conocidas piezas del juego Tetris son tetraminós) y pentominós para las de cinco (que forman un conjunto de 12 formas distintas, dejando a un lado las imágenes especulares de las mismas, que también forman un rompecabezas tradicional). En el caso de los triominós solo podemos encontrar dos configuraciones diferentes: los tres cuadrados formando una fila o formando una L, todas las demás combinaciones son equivalentes mediante giros. En nuestro rompecabezas, por tanto, utilizamos solo piezas con forma de L-triominó.

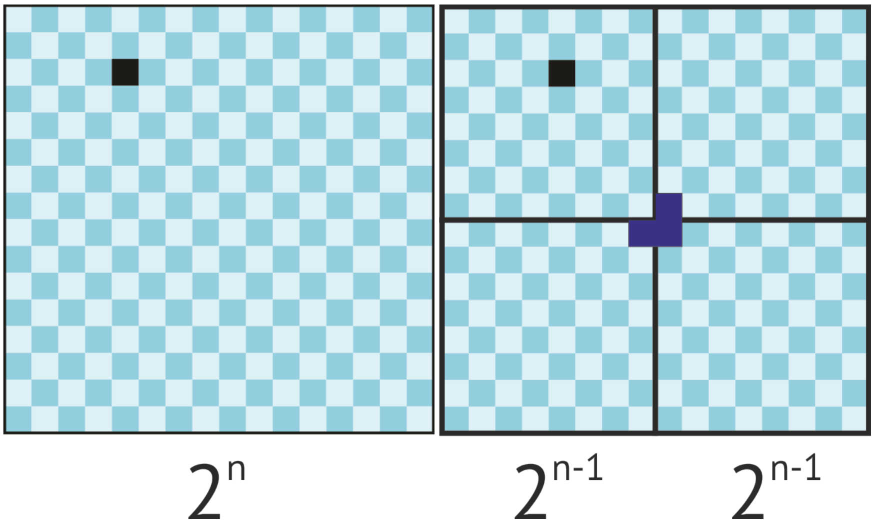
Volviendo al principio de inducción, tendríamos que hacer la demostración en dos pasos:

1.-Puedo recubrir el cuadrado cuando n=1. Este caso es muy sencillo, pues teniendo un cuadrado 2x2, cuando cubro una de sus casillas (un cuadrado negro en la imagen), sea cual sea, lo que me queda descubierto es justamente la forma de un L-triominó.

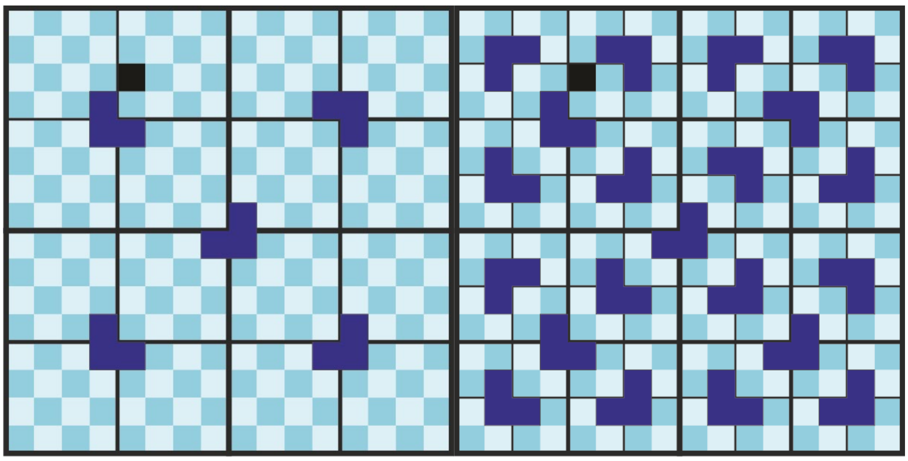


2.-Si tengo un tablero de lado 2^n, puedo recubrirlo siempre que pueda recubrir los de lado 2^{n-1}. Aquí es cuando esta demostración muestra su elegancia.

Supongo que tengo un tablero de lado 2^n, y por tanto podría dividirlo en 4 partes, cuatro cuadrados de tamaño 2^{n-1}. En uno de esos cuadrados estará mi casilla ocupada, que en la imagen aparece en color negro, con lo cual podré recubrir ese cuadrado, dado que he supuesto que puedo recubrir cualquier cuadrado 2^{n-1} al que le falta un cuadradito. Para los otros tres, utilizo un L-triominó justo en el centro del tablero, de forma que ocupe una esquina de cada una de las otras tres regiones. De esa forma esos tres cuadrados se convertirían en un cuadrado 2^{n-1} al que le han cubierto una casilla, y por tanto es posible recubrirlo con piezas de tipo L-triominó.



Además esta demostración no sólo nos dice que el objetivo que buscamos es alcanzable, sino que nos da un proceso que nos permite encontrar la solución. Lo único que debemos hacer es repetir el procedimiento de partir en cuatro cuadrados con cada una de las 4 regiones que tenemos, y colocar un L-triominó en el punto donde se encuentran las 4 zonas de forma que se cubra un cuadradito de las tres regiones que no tenían uno cubierto, hasta dividir el cuadrado original en partes en las que solo cabe un L-triominó.



Con este razonamiento hemos demostrado que el rompecabezas se puede resolver no solo cuando el lado del cuadrado es ocho, como en el problema original, sino cuando tiene cualquier lado de la forma 2^n.Este es el objetivo de las demostraciones en matemáticas: generalizar un argumento a una cantidad mayor de casos.

¿Y se puede hacer con los colores no colindantes? Aunque no vamos a explicitar aquí la demostración, podemos afirmarte que sí se puede, así que te dejamos la tarea de comprobarlo por ti mismo de manera práctica, y de que intentes incluso construir un argumento lógico que sirva como demostración de que siempre es posible, para cualquier cuadrado de partida de tamaño 2^n.

Bibliografía:

Embaldosando con L-triominós (Un ejemplo de demostración por inducción), Raúl Ibáñez 2014 (consultado en mayo de 2019)
https://culturacientifica.com/2014/07/16/embaldosando-con-l-triominos-un-ejemplo-de-demostracion-por-induccion/