

# CAPÍTULO 1: TEANO

## Los Pitagóricos y la escala musical

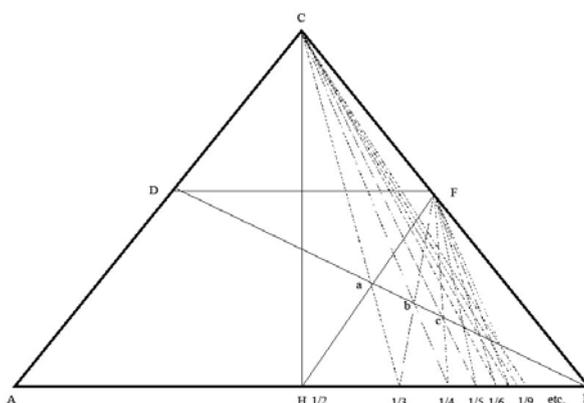
La hermandad pitagórica, establecida en Crotona alrededor del siglo VI a.C., estuvo formada por un conjunto de astrónomos, músicos, matemáticos y filósofos. Aunque se creó en torno al sabio Pitágoras, destacaron muchos otros hombres y mujeres, como es el caso de Teano, la protagonista de nuestro video. Teano demostró su talento matemático y consiguió convertirse en maestra de la hermandad, lugar que usaría para aprender y enseñar matemáticas complejas.

Los pitagóricos creían que todo era en esencia número. Y qué gran maravilla fue para ellos descubrir que la armonía en la música se basaba en fracciones de números simples. Tras distintos estudios descubrieron que una cuerda y la que mide exactamente la mitad producen sonidos armoniosos entre sí. De hecho se dice que las dos notas son la misma, pues si una cuerda produce una nota, la construida a razón  $1/2$  produce su octava. Y lo mismo pasa con una cuerda y la que mide  $2/3$ , que produce una nota y su quinta, y la que mide  $3/4$ , que produce la cuarta. La quinta y la cuarta son algunos intervalos musicales que consideramos armoniosos. La quinta se forma por dos notas separadas por un intervalo tonal de tres tonos y un semitono. La cuarta se da cuando las dos notas están separadas por dos tonos y un semitono.

Con estos datos los pitagóricos idearon la afinación pitagórica, un sistema de construcción de la escala musical. Partiendo de una nota base se obtienen las demás encadenando las distintas quintas consecutivas. Es lo que se conoce como “rueda de quintas”.

En esta actividad proponemos construir un monocordio con materiales cotidianos. Para ello solo necesitaremos una caja de resonancia, un elemento que vibre, y un diapasón, que nos indicará que tonalidad producen las distintas longitudes del elemento vibrante. Utilizaremos como cuerda una goma elástica, y en el diapasón mostraremos a que longitud hay que pisar esa goma para que suene cada nota de la escala.

Vamos a darte dos opciones: 1) puedes imprimir y pegar el diapasón que aparece en la página 6, o 2) puedes realizar el tuyo propio tan solo con la ayuda de una regla y un compás (tal y como se hacía en la época de Pitágoras), de la forma que describimos a continuación. El sistema mostrado es bastante similar al utilizado por la comunidad pitagórica, pero más sencillo de construir.



Método geométrico definido por Pitágoras

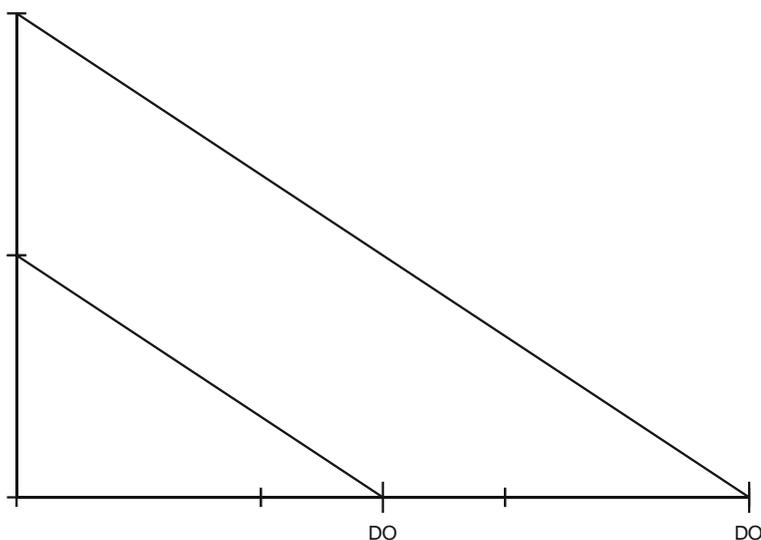


## Construcción de la escala a partir de una rueda de quintas

1. Comenzamos construyendo un triángulo rectángulo, cuyos catetos estén en proporción  $2/3$ . Para ello, formamos el cateto base con tres segmentos iguales (de la longitud que queramos), y en el cateto altura sólo 2, de igual longitud que los de la base.

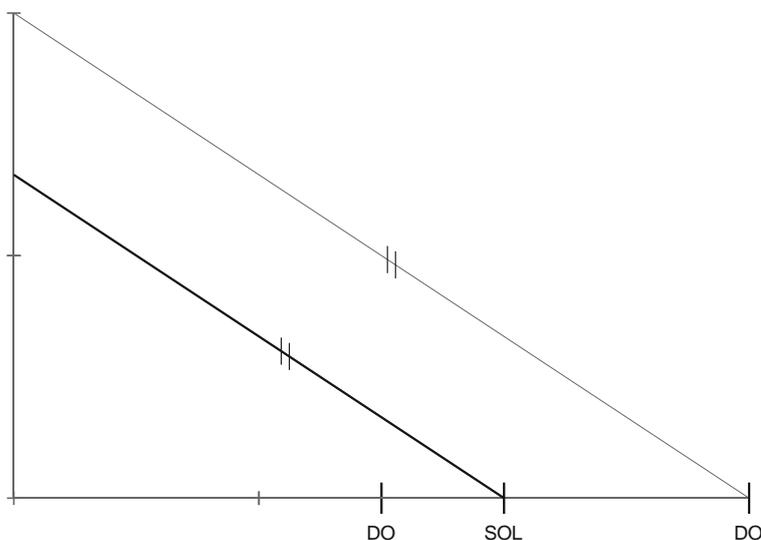
En esta figura marcamos el 1 y el  $1/2$ , que coincidirán con el total y el punto medio de la base. Serán las dos notas DO, entre las que queremos construir la escala musical.

Para marcar el punto medio de la base, se realiza la mediatriz con el compás, o directamente hacer una paralela a la hipotenusa desde el punto medio de la altura que ya tenemos marcado (aplicando el teorema de Tales).



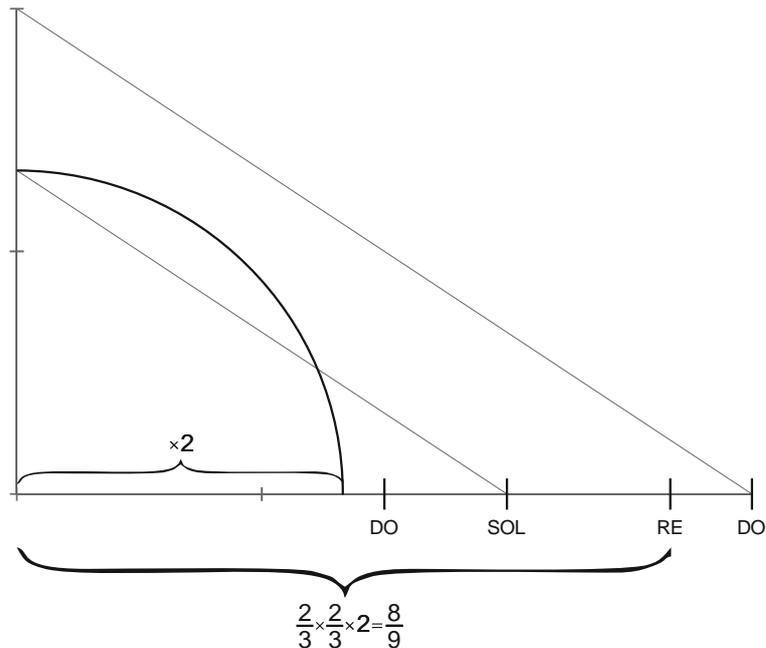
2. A continuación se marca el punto  $2/3$  sobre la longitud de la base (ya lo tenemos marcado contando dos de los tres segmentos que usamos para construir el triángulo). En este punto se situará la quinta de DO, es decir, SOL (ya que DO-re-mi-fa-SOL).

Además, vamos a realizar una recta paralela a la hipotenusa por ese punto del SOL.

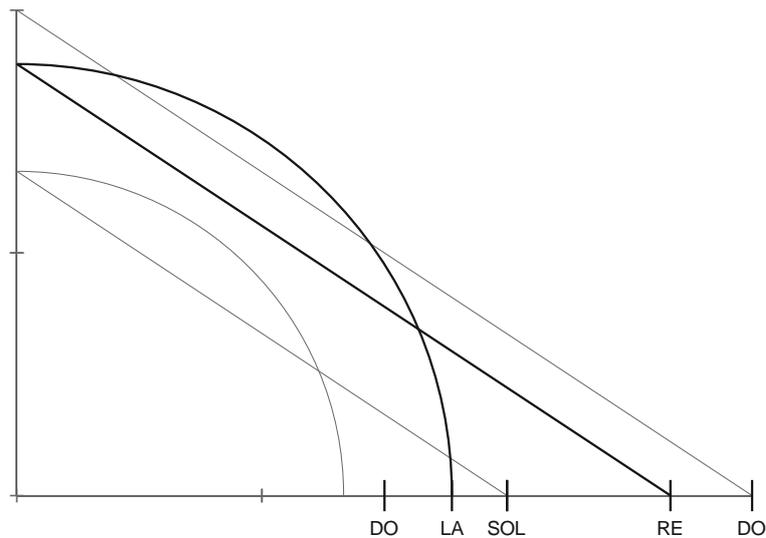


3. El nuevo triángulo formado por las dos rectas y esta recta paralela, por el Teorema de Tales, es proporcional al inicial. Por tanto el cateto altura será  $\frac{2}{3}$  de la longitud del cateto base. Así, tomamos un compás con la altura del nuevo triángulo, y la trasladamos a la base. El punto obtenido es la quinta de SOL, que será RE.

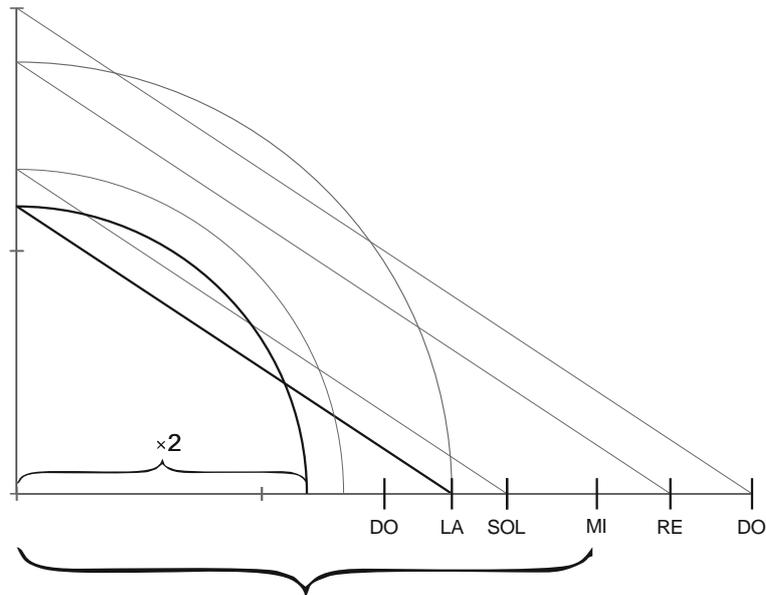
Pero este punto queda fuera de la escala que estamos construyendo (entre los DOs dibujados al comienzo), por lo que tenemos que buscar el RE en esa octava. Dado que una nota y la que mide el doble "es la misma", duplicamos esta longitud multiplicándola por 2, es decir, tenemos  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$ , que es  $\frac{8}{9}$ .



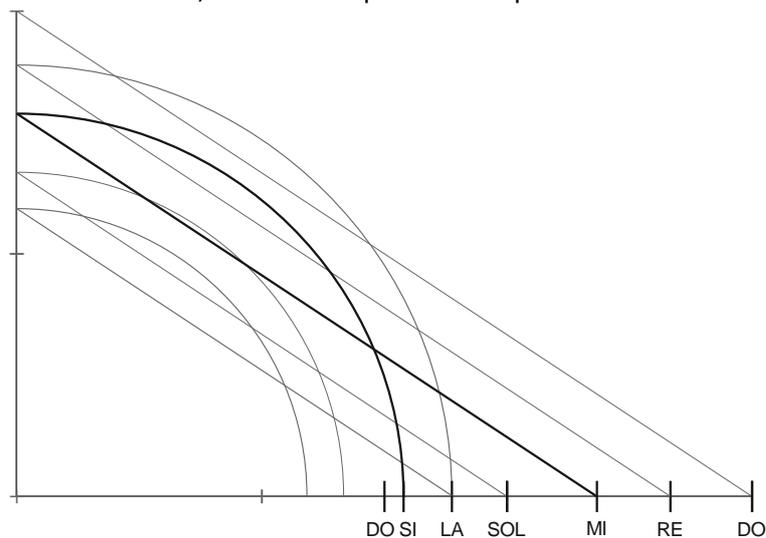
4. A partir de este punto se continúa de la misma manera. Partiendo ahora del RE hacemos una paralela las hipotenusas, y cogemos un compás con la nueva longitud en el cateto altura. Obtendremos así  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{8}{9}$ , que será el LA.



5. Al seguir igual partiendo del LA, volvemos a tener un caso en el que tendremos que duplicar la longitud resultante para obtener MI.



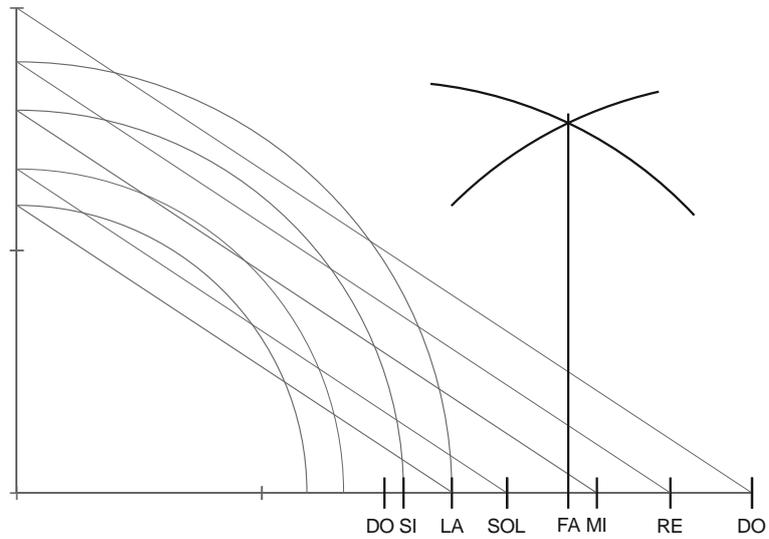
6. Ya casi estamos terminamos, hacemos la quinta de MI para obtener SI.



Si continuamos con la rueda de quintas empezarían a aparecer las notas consideradas “alteraciones” es decir, los sostenidos y los bemoles, las notas que suelen ser teclas negras en un piano. Seis saltos después en la rueda de quintas llegaríamos al FA, la última nota que nos faltaba en la escala. Esta nota queda situada en la recta en una fracción muy cercana a  $\frac{3}{4}$ , pero que no es exactamente ese valor (¡puedes calcularlo si quieres!). Los pitagóricos construyeron el Fa con su intervalo de  $\frac{3}{4}$ , y no con el valor que le correspondía.

A este pequeño desfase se le conoce como la “coma pitagórica”, y es ésta diferencia la que se ha intentado resolver de distintas maneras a lo largo de la historia de la música, hasta que Bach le dio solución con su “escala bien temperada”, que no se basaba en fracciones, sino en números irracionales, un tipo de números que nunca les gustó demasiado a los pitagóricos.

Nosotros situaremos el Fa, como los pitagóricos, en el punto  $\frac{3}{4}$ . Para construir el intervalo de  $\frac{3}{4}$  simplemente hacemos el punto medio entre los intervalos  $\frac{1}{2}$  y 1, es decir, las dos notas DO. Esta construcción la hacemos conseguimos realizando la mediatriz de ese segmento.



## Construyamos un monocordio.

Para construir este monocordio sólo necesitarás:

- Un brick de leche o similar (lo más limpio posible).
- Una pajita.
- Una goma elástica.
- Cinta adhesiva.
- Una pegatina con el diapasón que nos afine el monocordio y que encontrarás al final de este documento (o el diapasón que tú mismo has trazado con las reglas anteriores).



Cuando imprimas el diapasón ten en cuenta que puede ampliarse y reducirse la escala sin perder su afinación. Por ello te recomendamos imprimirlo más grande o más pequeño según el tamaño del brick que utilices.

### ¿Cómo se construye?

Para empezar limpia el brick y déjalo ventilar al menos toda la noche antes de empezar a construir el monocordio. Este brick hará el efecto de caja de resonancia de nuestro monocordio.

A continuación recorta un diapasón y pégalo en el brick. Intenta pegarlo lo más ajustado al borde superior del brick, para que el puente haga mejor su función. En este diapasón, como puedes ver está la escala con sus correspondientes distancias entre notas.



— Cejuela - Pajita —	
Do	1
Re	$\frac{8}{9}$
Mi	$\frac{4}{5}$
Fa	$\frac{3}{4}$
Sol	$\frac{2}{3}$
La	$\frac{3}{5}$
Si	$\frac{8}{15}$
Do	$\frac{1}{2}$
— Puente - Pajita —	

x

Cuando tengas el diapasón pegado, recorta dos trozos de pajita de refresco un poco más anchos que la propia pegatina.



Es conveniente hacerle un corte en el centro de cada una de las pajitas que sirva de paso para la cuerda vibrante.

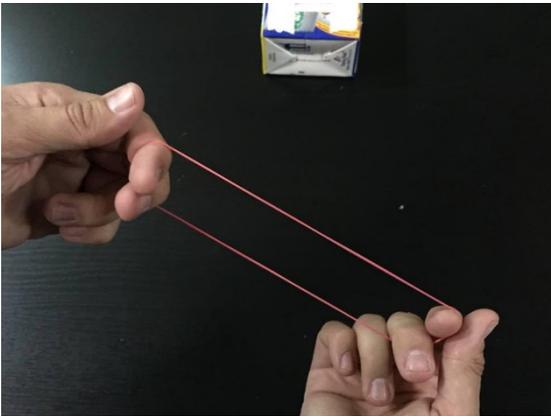


Estos trozos de pajita harán la función del puente y la cejueta, y habrá que pegarlos con la cinta adhesiva sobre la línea donde está marcado en la pegatina.





Ya sólo nos falta la cuerda que haga vibrar el aire. Esta cuerda la conseguiremos con una goma elástica. La estiramos para darle un poco de holgura, y la pasamos alrededor del brick, pasando sobre los cortes de las pajitas hechos previamente.



¡Ya tienes tu monocordio! ¿Eres capaz de reconocer la escala?



Te dejamos además una partitura, a ver si consigues tocarla e identificarla.

The musical score is written in 4/4 time. The vocal line (treble clef) consists of the following notes: C4, E4, F4, G4, C5, E5, F5, G5, C6, E6, F6, G6, E6, C6, E6. The piano accompaniment (bass clef) consists of the following notes: C3, C3, C3, C3, E3, C3, F3, C3, E3, C3, F3, C3, E3, C3, F3, C3, E3, C3. The score is divided into three systems. The first system has four measures, the second has four measures, and the third has two measures.

*Do Mi Fa Sol  
Do Mi Fa Sol  
Do Mi Fa Sol  
Mi Do Mi Re  
Mi Re Do  
Do Mi Sol Sol Fa  
Mi Fa Sol  
Mi Do Re Do*

Diseño y elaboración de la actividad:

Nelo Maestre y Tania Giraldo, de Divermates



<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 	<p>— Cejuela - Pajita —</p> <p>Do 1</p> <p>Re <math>\frac{8}{9}</math></p> <p>Mi <math>\frac{4}{5}</math></p> <p>Fa <math>\frac{3}{4}</math></p> <p>Sol <math>\frac{2}{3}</math></p> <p>La <math>\frac{3}{5}</math></p> <p>Si <math>\frac{8}{15}</math></p> <p>Do <math>\frac{1}{2}</math></p> 
<p>— Puente - Pajita —</p>	<p>— Puente - Pajita —</p>	<p>— Puente - Pajita —</p>	<p>— Puente - Pajita —</p>			