CATARATA

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

ICMAT
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Santiago Fernández Fernández

Azar y probabilidad en matemáticas

CATARATA

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ICMAT INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

AZAR Y PROBABILIDAD EN MATEMÁTICAS

ISBN: 978-84-1352-274-6
DEPÓSITO LEGAL: M-20.915-2021
THEMA: PDZ/PBT/PBWL

IMPRESO EN ARTES GRÁFICAS COYVE

Dedicado a mi familia: Ana, Nora e Iris.

Y a aquellos a quienes nadie les ha dedicado jamás un libro.

Índice

Introducción

> "El futuro es impredecible, todo se basa en probabilidades."
>
> Richard Feynman

Nuestra vida cotidiana está rodeada de infinidad de fenómenos aleatorios; la mayoría de las personas nos enfrentamos, continuamente, a diversas situaciones en las que está implicado el azar y ante ellas tenemos que tomar decisiones, disponiendo, en muchas ocasiones, de una cantidad limitada de información. La interacción continua de estos fenómenos nos conduce a elaborar una idea básica e informal de la probabilidad y a introducir expresiones en nuestro lenguaje como: *es muy probable, no hay ninguna probabilidad, es casi seguro, tenemos las mismas probabilidades, tengo muchas posibilidades, casi seguro que no pasa, la operación tiene un riesgo del 10%…* Desde luego son expresiones que también son comprensibles por otras personas en situaciones cotidianas. Pero cuando hablamos de probabilidad, ¿a qué nos referimos?

Desde un punto de vista formal, la probabilidad es el cálculo matemático que evalúa las posibilidades que existen de que un suceso ocurra cuando interviene el azar. Las aplicaciones derivadas de su estudio se encuentran por doquier. Veamos unos ejemplos:

- El precio de algunas materias primas como el petróleo, los cereales, el café, etc. varía en función de la probabilidad de que haya un conflicto en alguna zona de producción o de otros factores que se suelen estudiar en términos de probabilidad.

- La probabilidad de éxito en una cirugía, tratamiento médico, etc. también tiene mucho que ver con el estudio estadístico en casos anteriores.
- Es evidente que los casinos han estudiado en sus apuestas la probabilidad de que ocurra tal o cual suceso, proponiendo reglas a los juegos que maximicen su negocio. Se trata de ganar, aunque sea poco.
- La previsión del tiempo ha mejorado en los últimos años gracias al trabajo de muchos científicos, la aplicación de modelos matemáticos y la utilización de potentes ordenadores. Un tipo de modelo meteorológico es el denominado *probabilístico* o *estocástico*, que describe la variación aleatoria de las variables e incorpora métodos estadísticos y probabilísticos en la descripción de las predicciones futuras.
- La esperanza de vida es una medida del promedio de años que se espera que viva una persona en las condiciones de mortalidad del periodo que se calcula. También se basa en el cálculo de la probabilidad de muerte o de vida de la población a partir de los datos recogidos sobre nacimientos y defunciones, distribuidos por sexo, edades, territorios, etc.
- Tomar una decisión de compra o venta en un negocio implica un análisis del riesgo y, para decidir la opción más ventajosa, las empresas utilizan métodos basados en estudios probabilísticos, que miden la repercusión que tendrán las acciones que van a tomar y así poder elegir las más acertadas o las menos arriesgadas.
- En el diseño de muchos bienes de consumo como automóviles, electrodomésticos, móviles, etc. se utiliza la teoría de la fiabilidad para estudiar la probabilidad de avería, rotura, desperfecto, etc., la cual está relacionada con la garantía que el fabricante hace del producto.

- A los efectos de las compañías de seguros, mientras mayor es el universo de conocimiento parcial, mayor será la probabilidad para la determinación de un resultado; deciden el tipo de prima que van a aplicar, teniendo en cuenta la edad, experiencia, historial, años de carné, etc. de la persona contratante. Por lo tanto, mientras más estadísticas puedan ser acumuladas sobre un resultado particular, mayor será la certeza. Lo mismo pasa con otros seguros como los de tipo médico, de vida, etc.
- La venta de más asientos de los que posee un avión comercial (*overbooking*) también tiene que ver con la probabilidad, pues se sabe que gran parte de los aviones que despegan de cualquier aeropuerto suelen hacerlo con, al menos, un asiento vacío, ya que no todos los pasajeros con billete acaban volando. Los motivos pueden ser diversos: pérdida del avión, imposibilidad de formalizar una anulación, etc.
- Incluso en algunos conflictos bélicos se ha calculado, de manera probabilística, el número de víctimas que se iban a producir.
- También sabemos que hay eventos poco probables. Por ejemplo, que caiga un meteorito en las próximas horas y destruya la Tierra o también que nos toque la Lotería Primitiva son eventos con poca probabilidad de suceder.

Hay situaciones que se pueden explicar mediante un uso adecuado de la probabilidad. Por ejemplo, podríamos preguntarnos por qué, si vamos a una reunión a la que asisten 25 personas, es muy probable que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día.

Cuando compramos sistemas de iluminación para nuestra casa leemos, en el prospecto, que tienen un número de horas determinado de duración. Sin embargo, en la práctica, es muy frecuente que la duración de los sistemas de iluminación sea distinta, en muchas ocasiones superior de lo que afirma el fabricante. ¿A qué se debe? ¿Se equivocan al calcular la duración de las bombillas? ¿O quizá hay algo que desconocemos gracias a lo cual podemos disfrutar de su luz más de lo esperado?

Cuando elegimos la cola en un supermercado, casi siempre, la cola elegida va más lenta. ¿Por qué sucede esto?

Algunas de estas cuestiones son relativamente fáciles de entender, pero otras requieren explicaciones un poco más elaboradas. En este sentido, nos puede ayudar un uso correcto e inteligente de la teoría de la probabilidad.

La mayoría de las situaciones, relativas a problemas de decisión, aunque sean meramente recreativos, pueden afrontarse en mejores condiciones si se comprende bien el concepto de probabilidad y la aplicación de sus leyes. Sin embargo, ser un experto en probabilidad no garantiza tomar las decisiones acertadas en este campo, aunque sí nos puede servir para saber en qué nos hemos equivocado y analizar mejor los eventos. Desde luego, es preferible conocer que ignorar.

Una buena manera de adentrarse en el mundo de la probabilidad es familiarizarse con juegos de azar y variados problemas de carácter aleatorio para, posteriormente, discutirlos y tratar de resolverlos.

Como hemos mencionado, hay situaciones en las cuales es "relativamente fácil" calcular la probabilidad de ocurrencia y llegar a un mismo acuerdo entre distintos observadores; por ejemplo, la probabilidad de obtener un 5 en un dado cúbico es una situación de amplio consenso. Sin embargo, otras situaciones son más enrevesadas y requieren *pensar bien*.

En las decisiones y juicios de probabilidad en la vida cotidiana nos dejamos llevar, en muchas ocasiones, por la intuición, que con frecuencia nos engaña. Cometemos errores que no se suelen corregir simplemente con un aprendizaje formal de la probabilidad.

* * *

Este no es un libro sobre la probabilidad, sino un conjunto de tópicos en cuya resolución intervienen métodos y argumentos probabilísticos. Se muestran situaciones variadas en relación con el mundo de la probabilidad, acompañadas de un método que nos permite complementar el trabajo, que habitualmente hace el profesorado en las aulas.

En el primer capítulo se presenta un recorrido histórico de los momentos cruciales de esta teoría matemática. Su trayectoria tiene una larga historia y en su construcción participaron científicos de gran talla como Gerolamo Cardano, Galileo Galilei, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Christiaan Huygens, Jacques Bernoulli, Carl Friedrich Gauss, Pierre-Simon Laplace, Andréi Kolmogórov, etc. Fue un desarrollo difícil y controvertido, un camino lleno de paradojas, interpretaciones místicas o ambiguas y agrias disputas entre sus protagonistas. Con el matemático Laplace esta teoría alcanzó su *mayoría de edad* y con la axiomatización realizada por Kolmogórov la teoría de probabilidad experimentó una expansión sin precedentes. Actualmente es la parte de las matemáticas con más aplicaciones y, sin duda, la más pujante.

El segundo capítulo se centra en las leyes y teoremas básicos de la probabilidad, acompañadas de situaciones explicativas. Conviene recordar las palabras del matemático francés Émile Borel (1871-1956), quien en su famoso libro *Las probabilidades y la vida* se preguntaba:

> ¿Existen leyes del azar? Parece evidente que la respuesta debería ser negativa, ya que precisamente el azar se define como característica de los fenómenos que no tienen ley, fenómenos cuyas causas son demasiado complejas para que podamos preverlas. Sin embargo, los matemáticos, a partir de Pascal, Galileo y de otros muchos pensadores eminentes, han establecido una ciencia, el cálculo de probabilidades, cuyo objeto ha sido generalmente definido como el estudio de las leyes del azar. En realidad, el principal objetivo del cálculo de probabilidades, como su mismo nombre indica, es calcular las probabilidades de fenómenos complejos en función de probabilidades conocidas de fenómenos más sencillos.

Mientras que el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell (1872-1970) decía en *Lógica y conocimiento*: "¿Cómo osamos hablar de leyes del azar? ¿No es, acaso, el azar la antítesis de cualquier ley? El concepto de probabilidad es el más importante de la ciencia moderna, especialmente porque nadie tiene la mínima idea de lo que significa".

El filósofo romano Lucio Anneo Séneca (4 a. C. - 65 d. C.) ya aventuraba: "Llegará el día en que, gracias a un estudio continuo durante varios siglos, las cosas actualmente ocultas se presentarán con toda evidencia, y la posteridad se asombrará de que verdades tan palpables hayan escapado a nuestra comprensión".

En el tercer capítulo se abordan una serie de paradojas e interrogantes, que seguro nos harán pensar, haciendo tambalear nuestro sentido común.

La probabilidad geométrica es el tema central del cuarto capítulo. Desde los comienzos de la probabilidad, los denominados *problemas de probabilidad geométrica* han desempeñado un importante papel, sirviendo de estímulo y discusión por las paradojas y dificultades que entrañaban estas situaciones. Como ejemplo simple y conocido, recordemos la paradoja de Bertrand. Joseph Bertrand (1822-1900) es un autor de indudable valor histórico, como precursor del método de Montecarlo, estudiando uno de los más célebres problemas: el de la aguja de Buffon.

El capítulo quinto se ocupa del método de Montecarlo y sus variadas e interesantes aplicaciones. Es un método usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud y, por tanto, aconsejable en el estudio de diversas situaciones de carácter aleatorio. Este método nos proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos, posibilitando la realización de experimentos utilizando los números aleatorios para la ejecución de muestreos.

El sexto capítulo reflexiona acerca de una idea: la estadística y el azar se enseñan en todos los niveles educativos y, sin embargo, la mayoría de los estudiantes finalizan los cursos sin aplicar ni conocer adecuadamente los conceptos y procedimientos probabilísticos.

Generalmente, las clases se centran en presentar algunos conceptos relativos al azar y la descripción de algún tipo de procedimientos para posteriormente proponer problemas en los que se apliquen. Creo sinceramente que esta estructura no ayuda a promover un verdadero razonamiento probabilístico entre los estudiantes. ¿Cómo podemos enseñar correctamente el azar? Hay dos premisas que deberíamos incluir en nuestro proyecto didáctico: proponer buenos problemas y discutirlos junto con la adquisición de un modelo didáctico que se aplique en diversas situaciones. El libro finaliza con una bibliografía seleccionada que complementa los temas tratados.

⋆ ⋆ ⋆

Vaya mi agradecimiento a mis compañeros y amigos Serapio García, José Colera y, especialmente, al profesor y amigo Rafael Pérez Gómez por sus valiosos y comedidos consejos tras una minuciosa lectura del primer borrador.

Deseo que la lectura de este libro resulte en un viaje fructífero y espero que los temas tratados sirvan para profundizar en este apasionante campo de la probabilidad. Pero, sobre todo, que sirva al profesorado para mejorar sus clases, pues “quien se atreve a enseñar, nunca debe dejar de aprender”.

Capítulo 1
Nada surge porque sí, todo tiene una historia

> "Las preguntas más importantes de la vida, de hecho, no son en su mayoría más que problemas de probabilidad."
>
> PIERRE-SIMON LAPLACE

Introducción

Además de la certeza de la muerte, muy pocos aspectos de nuestra vida eluden la influencia de la probabilidad. Los seres humanos nos diferenciamos del resto de los animales en muchos aspectos; uno de ellos es nuestra capacidad de "predicción", de anticiparnos a los acontecimientos que van a ocurrir. En algunas ocasiones acertamos y en otras erramos. En otras palabras, estudiamos la posibilidad de que ocurran o no determinados sucesos. La medida numérica de esa posibilidad es *la probabilidad* del suceso. La teoría que estudia esa medida de posibilidad se denomina *teoría de la probabilidad*. Esta teoría es una *herramienta matemática* que establece un conjunto de reglas o principios útiles para calcular la ocurrencia o no ocurrencia de los llamados *fenómenos aleatorios*. Es una teoría compuesta por todos los conocimientos relativos al concepto de probabilidad. Se trata de un *constructo*, en esencia, matemático; constituye un instrumento fundamental e imprescindible para la estadística y, desde luego, para el avance de casi todas las ciencias. Pero ¿cuándo surgió su estudio?

Los conceptos relativos al azar y la probabilidad son tan antiguos como la civilización misma. Hay que señalar que el sentido del término *probabilidad* es sumamente complejo debido al distinto uso que se hace de él, tanto en el lenguaje común como en el de las ciencias, incluyendo los campos de las matemáticas y la filosofía. El mismo concepto puede tener una doble vertiente, epistemológica y aleatoria, y ambas aparecen sugeridas por un fenómeno muy antiguo: los juegos de azar.

¿Dónde comienzan los cálculos acerca del azar? ¿Cuándo se conectan y funden con el concepto filosófico de azar?

Los orígenes del azar

Las pruebas más antiguas de utilización de juegos de azar aparecen en las culturas egipcia y griega, aunque se sabe que, hace más de 4.000 años, en Irak fueron utilizados unos dados en forma cúbica, de cerámica, y con una ordenación de puntos algo distinta a la habitual; se trata de uno de los dados más antiguos encontrados hasta la fecha. Los faraones del antiguo Egipto (2700-2200 a. C.) solían jugar a un tipo de juego, el senet. Los antiguos egipcios creían mucho en la idea de "destino" y todo indica que el azar, que formaba parte del juego senet, estaba fuertemente relacionado con esta idea. Pensaban que un buen jugador estaba bajo la protección de los dioses más importantes del panteón: Ra, Thot y Osiris. De ahí que los tableros de senet se colocasen junto a otros objetos para el viaje a la ultratumba. El juego incluso se menciona en el capítulo XVII del *Libro de los muertos*. Heródoto (c. 484-425 a. C.) ya dejó constancia del modo en el que en la antigua Libia se hizo frente a una hambruna que tuvo lugar alrededor del año 1500 a. C. Los libios pasaban el tiempo jugando a los dados y a otros juegos de azar durante todo el día, sin parar, de manera que no pudieran sentir hambre y solo al día siguiente, comían y no jugaban. De este modo hicieron frente a la hambruna.

Asimismo, existen documentos que demuestran que, aproximadamente en el 1800 a. C., ya se jugaba a un precioso juego llamado *perros y chacales*. Consistía en colocar unos punzones con cabeza de perro o de chacal en un tablero según fuese el lanzamiento de unas tabas.

El mismo nombre de *azar* parece haber transitado desde Siria hasta Europa y probablemente se deba a la flor de azahar que aparece dibujada en una de las caras de la mayoría de los dados de la época.

Los juegos de azar desde siempre fueron muy populares, habiendo estado perseguidos en diferentes momentos. Por ejemplo, en Roma el juego alcanzó tal importancia e incidencia en la vida social que llegó a prohibirse en determinadas ocasiones y periodos del año. En los primeros compases del cristianismo, determinados juegos de azar también fueron reprobados y censurados.

Figura 1

Hombres jugando a los dados en un fresco de Pompeya

Fuente: www.romanoimpero.com

El rey Luis XI de Francia, en 1255, también prohibió los juegos de azar y la fabricación de dados, equiparándolos a la frecuentación de tabernas y la fornicación.

Curiosamente, en algunas ocasiones el azar era asimilado a la voluntad de los dioses y, circunstancialmente, jugaba un papel decisorio. Así, las vacantes importantes en la jerarquía sacerdotal eran adjudicadas por sorteo.

Pero además de los aspectos probabilísticos, los problemas de combinatoria también fueron abordados en la Antigüedad. El famoso libro *I-Ching*, escrito alrededor del 1200 a. C., con sus combinaciones de *triagramas* místicos, es uno de los ejemplos más tempranos.

Entre los filósofos griegos también se encuentran consideraciones sobre distintos problemas que hoy se resolverían con el cálculo combinatorio, aunque no hay constancia de que dispusieran de teoría alguna al respecto. El científico latino Boecio (c. 480-524/525) también describe con cierto detalle una regla para encontrar las combinaciones de *n* objetos tomados dos en dos. De igual modo, conviene mencionar que el astrónomo tudelano Abraham ben Meir ibn Ezra (1089-1167) y el judío catalán Levi ben Gershon (1288-1344) estudiaron con cierta profundidad una serie de reglas para el cálculo de variaciones y combinaciones, llegando a calcular números combinatorios que, por cierto, ya eran conocidos por los científicos chinos en el siglo XIII.

En el poema "De vetula", escrito por Richard de Fournival (1200-1250), ya se afirma, correctamente, que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles, y en él se calculan de manera exacta los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora pueda parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros muchos autores erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.

Por tanto, parece claro que desde la Antigüedad hasta el Renacimiento ya se jugaba, sin interrupción, a toda clase de juegos de azar (dados, tabas, astrágalos, cartas, etc.). Los juegos y las apuestas fueron tan populares que no distinguían clases sociales. Curiosamente, no hay apenas manuales sobre las reglas del juego, lo que hace suponer que la gente las conocía por tradición oral.

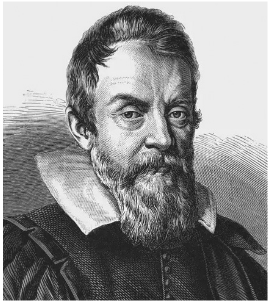
Los precursores de la teoría de la probabilidad

Los primeros acercamientos serios a lo que más tarde se llamaría la *teoría de la probabilidad* son debidos a grandes científicos y matemáticos italianos como Niccolò Fontana "Tartaglia", Giovanni Francesco Peverone, Galileo Galilei y Gerolamo Cardano.

FIGURA 2
Niccolò Fontana, "Tartaglia" (1499-1557)

FIGURA 3
Gerolamo Cardano (1501-1576)

FIGURA 4
Galileo Galilei (1564-1642)



Fuente: Wikimedia Commons.

Es interesante acercarnos a los trabajos de estos científicos. De la lectura de sus escritos podemos extraer la idea que ellos manejaban sobre los conceptos relacionados con el mundo del azar.

Una de las cuestiones, abordadas repetidas veces en esa época, es el llamado *problema de la división o reparto*. En 1494, Luca Pacioli (1447-1517) formula el problema de la siguiente manera:

Dos equipos juegan a la pelota de tal modo que se necesitan un total de 6 tantos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados, donde cada bando ha puesto 11 ducados. Por un incidente no pueden terminar y el juego se interrumpe cuando un bando ha conseguido 5 tantos y el otro 3. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.

Tartaglia razonaba el problema del reparto de este modo:

Si suponemos que tenemos que llegar a 6 tantos y A ya ha conseguido 5 y B ha conseguido 3, yo digo que el reparto más justo es de 2 a 1, puesto que A está 2 juegos por delante de B. Esto es 1/3 del total de juegos requeridos para ganar. Por lo tanto, A debería tomar 1/3 de las apuestas. El remanente se divide equitativamente, dando a A una ventaja sobre B en la proporción 2 a 1.

Pero el mismo Tartaglia no estaba muy conforme con sus razonamientos, reconociendo que: "La resolución de tal pregunta debe ser judicial más que matemática, de modo que, cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar".

En 1558, Giobattista Francesco Peverone resuelve este tipo de problemas de manera más correcta que Tartaglia: su exposición está escrita en un pequeño tratado titulado *Due brevi e facili trattati, il primo d'Arithmetica, l'altro di Geometria*.

Con la aparición de la imprenta comienzan a emerger tratados poco precisos sobre los diferentes juegos de moda. Se atribuye a Gerolamo Cardano el primer tratado relacionado con el mundo del azar, *Liber de ludo aleae*. Si bien fue escrito alrededor de 1564 no fue impreso hasta el año 1663, lo cual explica que sus ideas permanecieran, en buena parte, desconocidas para la mayoría de los estudiosos hasta bastantes años después de su muerte. Se trata de un estudio medianamente organizado, cuyo objetivo es calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados, así como resolver problemas de la división de lotes o reparto. Al carecer de una simbología adecuada recurre constantemente a ejemplos concretos. A lo largo de todo el tratado se sirve especialmente de dos métodos: recuento de las distintas posibilidades y el concepto de ganancia media. Su obra comienza, curiosamente, con una serie de consejos moralizantes sobre el juego, advirtiéndonos de los peligros que acarrea su excesiva afición.

En la resolución de los problemas planteados, Cardano trabaja con los conceptos de la definición clásica de la probabilidad, aunque no la define explícitamente. En concreto, introduce la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables y esbozando de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como *la ley de los grandes números*, al afirmar que si la probabilidad de un suceso es p, después de un número grande de repeticiones n, lo más razonable es apostar que ocurrirá alrededor de *np* veces. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estas enunciaciones, ya que consideraba que estas relaciones eran meramente aritméticas más que una medida de la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

Años más tarde, el científico italiano Galileo Galilei volvió a estudiar y resolver algunos de los problemas ya planteados por Cardano. Galileo también escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624, que inicialmente se denominó *Sopra le scoperte dei dadi* (*Sobre los descubrimientos del dado*). En el libro explica un problema que le planteó el duque de Toscana, el cual había observado que al lanzar tres dados y sumar sus puntuaciones, el resultado 10 aparecía más veces que el 9, lo que a él le parecía absurdo, ya que ambos números se podían descomponer de seis maneras distintas como suma de tres sumandos del uno al seis de la forma que se muestra y que, por lo tanto, debían tener la misma probabilidad:

$9 = 1 + 2 + 6$	$10 = 1 + 3 + 6$
$9 = 1 + 3 + 5$	$10 = 1 + 4 + 5$
$9 = 1 + 4 + 4$	$10 = 2 + 2 + 6$
$9 = 2 + 2 + 5$	$10 = 2 + 3 + 5$
$9 = 2 + 3 + 4$	$10 = 2 + 4 + 4$
$9 = 3 + 3 + 3$	$10 = 3 + 3 + 4$

Galileo, que tenía un sentido de la probabilidad digno de un genio, realiza un cuidadoso análisis de todas las sumas de puntos que pueden obtenerse al lanzar tres dados, y muestra que, de los 216 casos posibles, 27 suman 10 y 25 suman 9. Es notable su procedimiento, ya que la solución es análoga a la que actualmente se hace para resolver este tipo de problemas, lo que nos da motivos para pensar que el concepto de equiprobabilidad aplicado a las caras de un dado, es decir, que tienen la misma probabilidad de obtenerse, ya era conocido en el siglo XVI. Sin embargo, la principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores *sistemáticos*, debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores *aleatorios*, que varían impredeciblemente de una medida a otra. Esta clasificación sigue en vigor actualmente. Con estas ideas, Galileo no solo contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, sino que puso las bases para el nacimiento de la estadística.

En resumen, en la mayoría de los tratados de la época los problemas abordados son de dos tipos: problemas de recuento de posibilidades (combinatoria) y de juegos de azar en los que hay que repartir unas ganancias en un juego interrumpido antes de su conclusión. En esa época también fueron abordadas situaciones estrictamente combinatorias; no podemos olvidarnos en esta pequeña reseña al mallorquín Ramon Llull (c. 1232-1316), quien mediante su método *ars combinatoria* representa un intrincado mecanismo de figuras geométricas y símbolos que combinan letras y conceptos, presentándose como un saber nuevo con ambición universal; de hecho, se suele mencionar a Llull como el fundador de la *teoría de combinaciones*.

Nacimiento de las primeras teorías probabilísticas

Como hemos visto, fueron los científicos italianos los primeros en preocuparse por el estudio de la teoría de la probabilidad, pero el impulso fundamental en el desarrollo de esta teoría no se daría en Italia, sino en Francia.

Conviene recordar que en la sociedad francesa (como en casi todos los lugares de Europa) del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de una manera más racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de los científicos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) las bases sobre las que posteriormente se asentaría la moderna teoría de la probabilidad. Pascal se interesó por este tema a raíz de unas cuestiones que le había propuesto el caballero De Méré. La historia es más o menos la siguiente. Durante cierto viaje, hacia 1652, camino de Poitou, Pascal coincidió con Antoine Gombauld, señor de Baussay, más conocido con el sobrenombre De Méré. Tal caballero era considerado como un jugador profesional, apasionado por el juego de los dados y las cartas, además de ser un hombre inteligente e ilustrado. Resulta que, durante la conversación, este le propuso una serie de problemas que rápidamente cautivaron la atención del joven Pascal. El primero de los problemas estaba enunciado en los siguientes términos: "Se lanzan *n* veces dos dados cúbicos. Calcular el número de veces que es preciso lanzar los dados para apostar con ventaja al suceso de obtención del seis en los dos dados".

De Méré le hace saber a Pascal que para él dos respuestas son posibles: 24 y 25. La primera, obtenida mediante una regla teórica que él mismo ha investigado, y la segunda, mediante su experiencia como jugador profesional. Posteriormente le plantea otro problema, que ya Pacioli y Cardano habían estudiado de manera particular un siglo antes, conocido como el problema *des partis* o *del reparto*. El problema en cuestión es una generalización de las situaciones propuestas a los científicos italianos: "Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?".

Durante dos años, Pascal ponderó las cuestiones y, finalmente, comunicó sus resultados al jurista francés Pierre Fermat. En una de las primeras cartas de la extensa correspondencia matemática que mantuvieron a lo largo de dos años, fechada el 20 de julio de 1654, Pascal narra a Fermat el encuentro con De Méré y le hace saber cómo ha resuelto el problema del reparto en la partida interrumpida:

He aquí aproximadamente cómo lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en el juego 32 monedas. Supongamos que el primero

> tenga dos y el otro una; ahora juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retire cada uno lo que ha puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que, si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual, repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de estas, las 32 monedas que me corresponden con seguridad. Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16 (De Mora Chasles, 1989).

La carta concluye con una frase muy conocida: "El caballero de Méré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis, un gran defecto".

Casi al unísono, Fermat resolvió el problema por un método completamente distinto, lo cual fue para Pascal muy estimulante: "Ya ve […] que: la verdad es la misma en Toulouse que en París".

Figura 5
Blaise Pascal
(1623-1662)

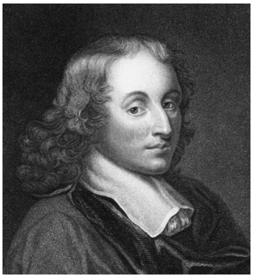


Figura 6
Pierre Fermat
(1601-1665)

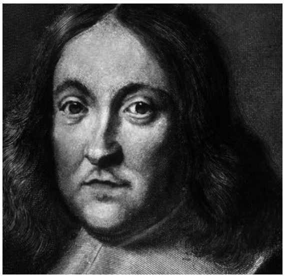


Figura 7
Christiaan Huygens
(1629-1695)

Fuente: Wikimedia Commons.

El método de Pascal consistía en el empleo de la ecuación en diferencias —esto es, una expresión que relaciona distintas sucesiones, siendo una de ellas una sucesión desconocida— con el fin de determinar las probabilidades sucesivas de los jugadores, desde los números más pequeños a los siguientes. Pero su método estaba restringido al caso de dos jugadores. Sin embargo, el método de Fermat se podía extender a un número cualquiera de jugadores, al estar basado en un estudio de números combinatorios. Después del intercambio de algunas cartas entre ellos, Pascal reconoció la generalidad del método de Fermat.

A través de la correspondencia, puede contemplarse no solo la evolución de los problemas, sino también la admiración creciente que Pascal siente por el ingenio de Fermat, como lo demuestra la siguiente carta:

Señor,

Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío, y llega fácilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha establecido.

Pero Señor, si en esto he competido con Vd., deberá buscar en otra parte quien le siga en sus intervenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho Vd. el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; solo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es fácil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables (Carta de Pascal a Fermat, 27 de octubre de 1654).

También estas cartas atestiguan el nacimiento de una nueva ciencia, que tuvo la "mala suerte" de coincidir con los grandes descubrimientos de la matemática. Efectivamente, el siglo XVII puede considerarse *el siglo de oro de las matemáticas*: en él se da el nacimiento y desarrollo del cálculo infinitesimal e integral, de la teoría de la gravitación, de la geometría analítica, etc.

Pascal también aplicó los razonamientos probabilísticos sobre la toma de decisiones a la teología y trató de demostrar la existencia de Dios. Su argumento, conocido como *la apuesta de Pascal*, era el siguiente:

Dios existe o no existe; si no existe, da igual creer en él que no creer; si existe, creer que no existe provoca la condenación eterna, mientras que creer trae la salvación. Como la salvación es preferible a la condenación (en términos probabilísticos, la ganancia es mayor), una persona razonable actuará como si Dios existiera, aunque crea que la probabilidad de que exista es pequeña.

Pascal y Fermat no publicaron sus resultados, dejando constancia de sus investigaciones en las cartas que se intercambiaron. En 1665 y tres años después de la muerte de Pascal, se publica su *Tratado del triángulo aritmético*, la más importante contribución realizada hasta entonces en el campo de la combinatoria. El libro comienza con la construcción de lo que posteriormente se denominó como *triángulo de Pascal*, aunque ya era conocido desde cinco siglos antes.

Pascal realiza un estudio pormenorizado de las propiedades de los llamados *números combinatorios*. La más importante es, sin duda alguna, la obtención de una fórmula para obtener los números combinatorios:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Identificando ese número combinatorio como el número de combinaciones posibles de p elementos en un conjunto de n elementos.

Diez años antes, en 1655, el joven holandés Christiaan Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal, Fermat y Roberval; a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades. De estas inquietudes intelectuales surgió un pequeño tratado, escrito en holandés: *Van rekeningh in spelen van geluck* (*El cálculo en los juegos de azar*), del que posteriormente se hizo una versión latina: *De ratiociniis in ludo aleae* (1657).

En 1656, Huygens envió su manuscrito a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La respuesta tardó cuatro meses en llegar, pero la confirmación de su trabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le remitió dos cuestiones más. Estas fueron añadidas, junto con otros dos problemas planteados por él mismo, al final del libro, y durante varios años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la llamada *doctrina del azar*; Abraham de Moivre (1667-1754), Jacques Bernoulli (1654-1705), Baruch Spinoza (1632-1677) y Gottfried Leibniz (1646-1716), entre otros, publicaron soluciones de algunos de estos problemas. Uno de los cinco problemas en cuestión era el siguiente:

> Tres jugadores A, B y C tienen 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras; juegan con la condición de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca. A extrae primero, luego B, luego C, luego A nuevamente y así sucesivamente. La pregunta es: ¿cuál es la proporción de la probabilidad de ganar de cada jugador con respecto de los otros? (propuesto por Fermat en una carta a Huygens en junio de 1656).

En 1687 se publicó un libro anónimo en el que se resolvía con todo detalle uno de los cinco problemas y se esbozaba la solución del resto. Más tarde se comprobó que el autor de ese libro era el filósofo holandés, de origen judío-portugués, Spinoza.

El libro de Huygens contiene un total de 14 proposiciones formuladas de modo claro y conciso, y a continuación figuran los cinco problemas mencionados y un primer apéndice; posteriormente añadió un segundo en el que muestran las soluciones de algunos de los problemas planteados.

Las tres primeras proposiciones las dedica a manejar y explicar la noción de *esperanza matemática*[1] , en las seis siguientes

1. En estadística, la esperanza matemática, denominada también *valor esperado*, de una variable aleatoria *x* es el número que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio.

se ocupa de problemas de reparto, para dos y tres jugadores, mientras que en las últimas se encarga de la resolución de problemas con dos, tres y más dados. El científico holandés definió, por primera vez, el concepto de esperanza matemática de una variable aleatoria con un número finito de valores. En uno de los párrafos de su libro se puede vislumbrar la importancia y transcendencia que él mismo da al cálculo de probabilidades: “El lector observará que nos ocupamos, no solo de los juegos, sino, más bien, de los fundamentos de una teoría nueva, a la vez profunda e interesante” (1657).

Es posible que la claridad en su exposición y una adecuada elección de los problemas sea el motivo por el que, durante muchos años, se haya considerado al científico holandés como el primer teórico de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hoy sabemos que ese honor le corresponde por igual a la tríada de Pascal, Fermat y Huygens, los cuales sentaron las bases modernas de la teoría probabilística, y que fueron afianzándose y desarrollándose a lo largo del siglo XVIII.

Figura 8

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Fuente: Wikimedia Commons.

En este breve recorrido no podemos olvidar las aportaciones del científico Gottfried Wilhelm Leibniz, quien publicó en 1666 la primera monografía dedicada íntegramente a la combinatoria: *Dissertatio de arte combinatoria*. Su trabajo no está motivado por la necesidad de resolver problemas de carácter probabilístico, sino más bien por el interés de estudiar ideas complejas a través de ideas sencillas. El tratado de Leibniz desarrolla algunas de las ideas de Ramon Llull, enunciadas cuatro siglos antes.

La probabilidad, una teoría consolidada

En paralelo, se realizaron otros estudios relacionados con la probabilidad y cuyo objetivo no era el análisis de juegos de azar. En esta línea, el comerciante inglés John Graunt (1620-1675) abordó, hacia 1662, problemas sobre *demografía* o *política aritmética*, como se la llamaba entonces. Graunt se propuso encontrar un método preciso para estimar la edad media de los habitantes de Londres mediante la edad de defunción; en su estudio se encuentra el concepto de *frecuencia de un suceso*. Concibió así la realización de un estudio de los lugares, las causas y la edad de mortalidad, reuniendo todos estos datos en tablas de frecuencias. Mediante métodos sencillos y de gran sentido común, Graunt formuló ciertas leyes y estableció de esta manera la uniformidad y predicción de muchos fenómenos considerados en masa.

Las ideas de Graunt fueron recogidas por William Petty (1623-1687), quien elaboró un análisis comparativo entre la mortalidad de Londres y la de París, basándose en los datos de los hospitales de caridad. También el astrónomo Edmund Halley (1656-1742), basándose en procedimientos similares, presentó, en 1693, una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslavia (Polonia). En los trabajos de Halley ya se pueden encontrar las bases de *los teoremas de la suma y la multiplicación de probabilidades* y *la ley de los grandes números*, aunque no los enunció explícitamente; sus trabajos tuvieron gran influencia en demografía y en los seguros de vida.

Retomando las figuras de Pascal, Fermat y Huygens podemos señalar que los juegos de azar dejaron de ser meros pasatiempos para convertirse en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento. Uno de estos genios fue Jacques Bernoulli, quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, ofreciendo las soluciones.

La obra de Jacques Bernoulli es fundamental por varios motivos: uno de ellos es que allí figura la primera definición clásica de probabilidad, seguramente muy influenciada por los trabajos de Graunt y Petty, que habían demostrado las ventajas de incluir en sus tablas no solo los números absolutos, sino también las proporciones respecto del total.

Conviene señalar que la mayoría de los descubrimientos matemáticos de la familia Bernoulli, en este campo, igual que pasa con los de Leibniz, se encuentran en la famosa revista *Acta Eruditorum*; pero Bernoulli escribió, además, una obra de una enorme trascendencia, *Ars conjectandi* (*El arte de la conjetura*), que no fue publicada hasta 1713.

El tratado en cuestión está dividido en cuatro partes. La primera contiene una reimpresión y un comentario a la obra de Huygens; la segunda está dedicada a la teoría de las combinaciones y permutaciones: en ella se encuentra la primera demostración correcta del teorema binomial para exponentes naturales. La tercera parte consiste en la resolución de diversos problemas relativos a juegos de azar, mientras que la última es una aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas de economía y moral. Como apéndice al *Ars conjectandi* nos encontramos con una larga memoria sobre series numéricas.

Este tratado ha tenido una enorme influencia y contiene importantes contribuciones a todos los dominios de la teoría de la probabilidad; Bernoulli también se preocupó de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso aun siendo imposible contar los casos favorables: "Aquí hay otro camino disponible para alcanzar el resultado deseado. Lo que no se puede hallar *a priori* se puede obtener *a posteriori*, es decir, mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares".

Enunciando lo que se conoce como el célebre *teorema de Bernoulli* o *ley de los grandes números*, que a grandes rasgos se puede enunciar así.

Se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad.

Este teorema recibirá su forma definitiva con Pierre-Simon Laplace (1749-1827) y cuya verificación experimental fue emprendida por Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), y Siméon Denis Poisson (1781-1840), mostrando su excepcional importancia en el terreno de las aplicaciones.

Figura 9
Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Figura 10
Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788)

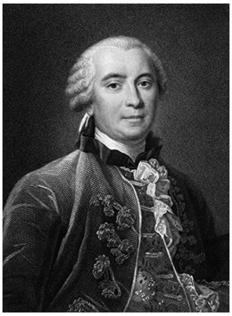


Figura 11
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Fuente: Wikimedia Commons.

La primera contribución teórica y bien fundamentada relativa al campo de la probabilidad es el *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708) de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719). El libro de Montmort tuvo un eco muy favorable y mereció elogios de muchos científicos de la época, entre los que cabe destacar a Leibniz. El gran mérito de su trabajo es dar a conocer unas ideas con un cierto rigor, que los grandes científicos discutían, pero que nadie osaba publicar.

En este avance, a veces errático y siempre difícil, de la teoría de la probabilidad, han surgido muchos escollos, unos de carácter estrictamente matemático y otros de índole filosófica. Tenemos que citar a Daniel Bernoulli (1700-1782), quien hacia 1738 comenzó el estudio de un problema conocido como la *paradoja de San Petersburgo*. El estudio de la paradoja tuvo mucha importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad aplicada a los problemas relacionados con los seguros: pagar una gran cantidad pero con una probabilidad muy pequeña de que eso ocurra.

Figura 12
Daniel Bernoulli
(1700-1782)

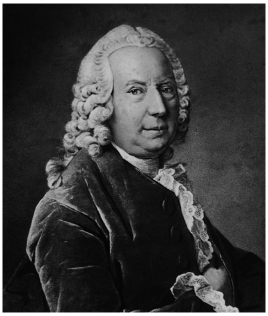


Figura 13
Abraham de Moivre
(1667-1754)

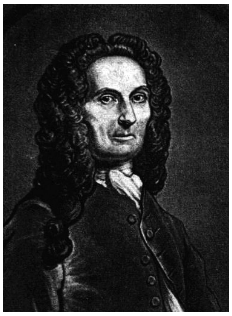


Figura 14
Thomas Bayes
(1702-1761)

Fuente: Wikimedia Commons.

Siguiendo con nuestra pequeña historia, no debemos olvidarnos del matemático francés Abraham de Moivre, considerado actualmente como el descubridor de la *distribución normal*. En 1711 publicó en *Philosophical Transactions* un estudio detallado sobre las denominadas *leyes del azar*; siete años después amplió su trabajo e incluyó en un nuevo tratado, *The Doctrine of Chances* (1718), numerosos problemas y aplicaciones sobre dados, juegos, anualidades de vida, etc. En el libro se estudia el concepto de esperanza matemática, la probabilidad condicional y la independencia de sucesos, así como los teoremas de probabilidad total y compuesta. También demuestra el teorema central del límite, que lleva el nombre en su honor, y que posteriormente fue estudiado por Laplace, quien realizó un estudio más general y profundo del tema. En 1733, De Moivre publicó en Londres un pequeño folleto en el que se incluye por vez primera la distribución normal, que con cierta injusticia se ha llamado *curva de Gauss* en lugar de *curva de Moivre*.

Contemporáneos de De Moivre fueron el matemático británico y ministro presbiteriano Thomas Bayes, quien se enfrenta con éxito al importante problema de "la probabilidad inversa" (esto es, determinar la probabilidad de las causas por los efectos observados) y el científico francés Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, que pretendió compendiar y clasificar todo el saber humano en su gran obra *Histoire naturelle*, y que a la postre sería un anticipo de la gran *Enciclopedia* de Diderot y D'Alembert. El conde de Buffon realizó el primer estudio de la variable continua en las cuestiones de probabilidad; lo expone en un célebre problema conocido como *problema de la aguja de Buffon*. Este ejemplo de probabilidad geométrica señala la introducción del cálculo integral en las cuestiones de probabilidad.

Con el insigne matemático francés Pierre-Simon Laplace la teoría de la probabilidad adquirió rango de disciplina científica, cobrando un impulso que ha ido acrecentándose con el paso del tiempo. Con 63 años, Laplace publicó, en 1812, un gran tratado, titulado *Teoría analítica de las probabilidades*. En él se ocupa de las probabilidades de las causas de los acontecimientos, siguiendo la línea de Bayes. Con ánimo de difundir sus ideas entre los lectores no especializados escribió, en 1814, una exposición introductoria a la probabilidad titulada *Essai philosophique sur les probabilités*. En este libro Laplace plasma una de sus famosas frases: "En el fondo, la teoría de probabilidades es solo sentido común expresado con números".

Corresponde a Laplace el mérito de haber descubierto y demostrado el papel desempeñado por la distribución normal en la teoría matemática de la probabilidad. Entre los muchos temas estudiados, Laplace calcula una aproximación del número pi resolviendo el problema de la aguja de Buffon, problema que había sido olvidado durante más de treinta años. A partir de Laplace, el cálculo de las probabilidades y la estadística, que hasta entonces habían permanecido separadas, se apoyan la una en la otra, de manera que el cálculo de las probabilidades se constituye en el andamiaje matemático de la estadística. Sin duda la teoría de la probabilidad debe más a Laplace que a ningún otro científico.

Un gran amigo de Laplace fue el científico Siméon Denis Poisson, quien estudió los fenómenos poco comunes o extraños; en 1837 dio a conocer sus investigaciones en *Recherches sur la probabilité des jugements*.

Lo que quedaba por realizar en el campo de la probabilidad eran labores de ordenación, precisión y rigor; tareas que iniciaron ilustres matemáticos, contemporáneos suyos, como Adrien-Marie Legendre (1752-1833) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Este último desarrolló la *teoría de los errores*, conjuntamente con Friedrich Bessel (1784-1846) y Laplace, llegando a establecer el método de los *mínimos cuadrados*, como procedimiento matemático para resolver el problema fundamental de la teoría de los errores.

A finales del siglo XIX el mundo de la probabilidad y del azar estaba muy abonado y, gracias a personajes como el mencionado Émile Borel, Karl Pearson (1857-1936), Henri Poincaré (1854-1912), Francis Galton (1822-1911), Andréi Márkov (1856-1922), Pafnuti Chebyshov (1821-1894) y Andréi Kolmogórov (1903-1987), esta ciencia se fue consolidando de una manera definitiva. En estos dos últimos siglos, la teoría y las aplicaciones de la probabilidad se han extendido a la práctica totalidad de las ciencias experimentales, desde la economía y la meteorología hasta la medicina. Además, con la aparición de los ordenadores se han podido evaluar muchos problemas complejos que involucran gran cantidad de datos.

Hoy el azar sigue siendo una fuente de discusiones filosóficas. De ello es un ejemplo paradigmático la famosa frase de Albert Einstein (1879-1955), en la que se posiciona en contra de la aparente aleatoriedad en la descripción cuántica del mundo, que nos transporta al origen de todo: “Dios no juega a los dados”.