

Raúl Ibáñez Torres

La gran familia de los números



COMITÉ EDITORIAL

Ágata A. Timón (ICMAT)
Agustín Carrillo de Albornoz Torres (FESPM)
Manuel de León Rodríguez (ICMAT)
Santiago Fernández Fernández (FESPM)
Serapio García Cuesta (FESPM)
Laura Moreno Iraola (ICMAT)

COMITÉ ASESOR

Javier Aramayona Delgado (ICMAT)
Juan Martínez-Tébar Giménez (FESPM)
Onofre Monzó del Olmo (FESPM)

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

© RAÚL IBÁÑEZ TORRES, 2021

© FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES
DE MATEMÁTICAS (FESPM), 2021
SERVICIO DE PUBLICACIONES
AVDA. DE LA MANCHA S/N
02006 ALBACETE
WWW.FESPM.ES

© INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (ICMAT), 2021
NICOLÁS CABRERA, N° 13-15
CAMPUS DE CANTOBLANCO, UAM
28049 MADRID
WWW.ICMAT.ES

© LOS LIBROS DE LA CATARATA, 2021
FUENCARRAL, 70
28004 MADRID
TEL. 91 532 20 77
WWW.CATARATA.ORG

LA GRAN FAMILIA DE LOS NÚMEROS

ISBN: 978-84-1352-225-8
DEPÓSITO LEGAL: M-11.091-2021
THEMA: PDZ/PBH/PBCN

IMPRESO EN ARTES GRÁFICAS COYVE

ESTE LIBRO HA SIDO EDITADO PARA SER DISTRIBUIDO. LA INTENCIÓN DE LOS EDITORES ES QUE SEA UTILIZADO LO MÁS AMPLIAMENTE POSIBLE. QUE SEAN ADQUIRIDOS ORIGINALES PARA PERMITIR LA EDICIÓN DE OTROS NUEVOS Y QUE, DE REPRODUCIR PARTES, SE HAGA CONSTAR EL TÍTULO Y LA AUTORÍA.

A mi hijo Aitor y a mi hija Vanessa, siempre.

A Marian, por formar parte de mi vida.

Índice

Introducción 11

Capítulo 1. La herencia de Pitágoras 19

Capítulo 2. Los números primos 39

Capítulo 3. La simetría de los números 65

Capítulo 4. Los divisores tienen la palabra 89

Capítulo 5. Por sus dígitos los conoceréis 111

Capítulo 6. Vamos a contar... 135

Bibliografía 155

Introducción

—¿Qué especialidad de las matemáticas investigó usted en la universidad? —le pregunté, con la intención de hablar sobre algo relacionado con las matemáticas, en señal de agradecimiento por haber atendido a mi ruego y salido a la calle. —Es un campo que suele llamarse la reina de las matemáticas —me comentó, después de un ruidoso trago de café—. Es tan hermoso como una reina, noble y al mismo tiempo cruel como un demonio. Es fácil de explicar en pocas palabras, pues son los números enteros que todo el mundo conoce. Estaba investigando la relación de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6...

No esperaba que el profesor utilizara una palabra como “reina”, que parecía salida de un cuento. Se oía el ruido de una pelota de tenis botando a lo lejos [...].

—¿Así que está usted descubriendo esa relación?

—Efectivamente, es un descubrimiento. No es una invención. Es como excavar y sacar de debajo de la tierra teoremas que ya existían mucho antes de que naciera, sin que nadie haya detectado su existencia. Es como transcribir línea tras línea una verdad que sólo está escrita en el cuaderno de Dios. Nadie sabe dónde está ese cuaderno ni cuando se abre.

Al decir “teoremas que ya existían...”, señaló el punto en el espacio que siempre fijaba cuando estaba “pensando”.

YOKO OGAWA, *La fórmula preferida del profesor*
(Editorial Funambulista, 2008)

Más allá de la interesante discusión filosófica sobre si los números fueron inventados por los humanos —aunque también existen animales que han desarrollado una cierta capacidad numérica— o simplemente descubiertos —teniendo una existencia anterior e independiente a la nuestra en un universo ideal como el mundo de las ideas de Platón—, lo cierto es que

estos entes matemáticos han estado presentes entre nosotros desde el origen de la humanidad, al menos desde que surge el pensamiento abstracto.

La invención o descubrimiento de los números fue un largo proceso que duró miles de años, cuyo origen se encuentra en la necesidad real de la humanidad de contar, por ejemplo, los soles —días— y las lunas —meses—, los animales cazados o las personas que formaban parte del grupo o poblado, y que culminó con su creación como objetos matemáticos abstractos. Por lo tanto, en el origen de los números ya nos encontramos con esa dicotomía entre la existencia en el mundo real y en el ideal que recorre la historia de las matemáticas.

Los números nos permiten medir, contar, ordenar, clasificar, dar una ubicación física o temporal, cuantificar el valor de las cosas, hacer contabilidad, economía o ciencia, y muchas cosas más; en particular, son un elemento fundamental para el funcionamiento de los ordenadores y de la tecnología digital. Por lo tanto, son una parte esencial de nuestra vida y de la sociedad. Sin ellos, la mayoría de nuestras actividades diarias carecerían de sentido.

Sin embargo, los números 1, 2, 3, 4, 5, etcétera, que en matemáticas denominamos *números naturales*, tienen una existencia, como entidades abstractas, independiente del mundo real. Ya desde la Antigüedad, los matemáticos y matemáticas —babilonios, egipcios, griegos, indios o árabes, entre otros— se preocuparon de estudiar las propiedades puramente aritméticas de los mismos. El objetivo de estos estudios no era su aplicación a problemas del mundo real, que también, sino el conocimiento de estos objetos matemáticos.

Por ejemplo, el filósofo de los números y gran matemático griego Pitágoras¹ ya estudió unos números llamados perfectos (que veremos en el capítulo 4). Un número perfecto es aquel igual a la suma de sus divisores propios, como el 28, que es igual a la suma de sus divisores $1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Desde su

1. P. M. González Urbaneja, *Pitágoras, el filósofo de los números*, Nivola, 2001.

invención, o descubrimiento, las grandes mentes matemáticas han dedicado parte de su tiempo y esfuerzo al conocimiento de las propiedades de estos números, que quizás no aporten nunca una aplicación útil directa a problemas del mundo real, pero que nos ayudan a conocer mejor esa familia de objetos matemáticos que son los números naturales.

Pero pongamos un ejemplo más cercano. En este contexto de los números como entes abstractos es en el que tiene sentido la pregunta del físico teórico de ficción Sheldon Cooper, protagonista de la serie *The Big Bang Theory*, sobre cuál es el mejor número. En su opinión es el 73, porque “el 73 es el vigesimoprimero [21] número primo, leído al revés es el 37, que es el decimosegundo [12], que al revés es el 21, que es el resultado de multiplicar, agarraos fuerte, 7 por 3”. Curiosamente, en 2019 se demostró que el 73 es el único número que posee esta propiedad. Pero volviendo al capítulo de la serie, otro de los protagonistas, el físico aplicado Leonard Hofstadter, le responde a Sheldon: “Entendido, es el Chuck Norris de los números”, a lo que el físico teórico contesta: “¿Qué más quisiera Chuck Norris! En binario el 73 es un palíndromo 1001001, que al revés es 1001001, exactamente igual. Chuck Norris al revés no es más que *sirron kcuhc*”.

Existen familias de números más generales que los naturales, como los enteros, los racionales, los reales, los complejos y los hipercomplejos². Estos quedan fuera de este libro. El objetivo aquí es el estudio de algunas importantes familias de números naturales, como las de los figurados, primos, amigos, perfectos, narcisistas, felices o combinatorios, entre otros: su historia, sus propiedades matemáticas, algunas curiosidades de las mismas, sus aplicaciones al mundo real, su presencia en el arte, así como algunos rompecabezas matemáticos o trucos de magia basados en ellas.

Por lo tanto, como parte de esta introducción podemos plantearnos si realmente existen números naturales interesantes y, en caso de que así sea, si hay muchos.

2. A. Córdoba, *La saga de los números*, Crítica, 2006.

Existe una peculiar paradoja matemática, con cierto carácter humorístico, que afirma que todos los números naturales son interesantes. Si dividimos el conjunto de números naturales en dos clases, interesantes y no interesantes, podríamos pensar que al menos algunos números pertenecen claramente a la primera, por ejemplo, el número 73 que menciona Sheldon Cooper; el mágico número 1.089, cuyo truco se verá en el capítulo 3; el número 1.729, como reconocerán quienes conozcan la anécdota de Hardy-Ramanujan³; o el curioso 6.174, la constante de Kaprekar (véase capítulo 5), por mencionar algunos. Sin embargo, se puede utilizar un argumento de reducción al absurdo⁴ para demostrar que todos los números naturales son interesantes. Supongamos que no fuese así, entonces podríamos considerar el conjunto de todos los números no interesantes⁵ y fijarnos en el más pequeño de todos. De ese modo, ese número se convertiría en interesante, puesto que sería “el número más pequeño de los que no son interesantes”, lo que nos llevaría a una contradicción por suponer que existen números que no son interesantes. Por supuesto, el origen de la paradoja está en la definición de lo que se considera un número interesante.

Más allá de lo afirmado en esta paradoja, puede que pensemos que no todos los números naturales son interesantes; sin

3. Cuando el matemático británico Godfrey H. Hardy (1877-1947), profesor en Cambridge, fue a visitar al matemático autodidacta indio Srinivasa A. Ramanujan (1887-1920) al hospital, le comentó que el número del taxi en el que había viajado, 1.729, era un número aburrido, pero Ramanujan le contestó que estaba equivocado, ya que es el número más pequeño que puede escribirse como suma de dos cubos positivos distintos, $1.729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Hoy se le conoce como el *número del taxi* o de *Hardy-Ramanujan*.

4. Método de demostración matemática que consiste en considerar que el resultado que se quiere probar es falso e ir razonando a partir del mismo hasta llegar a una contradicción.

5. En el año 2009 hay quienes relacionaban que un número fuera interesante con que apareciera en alguna de las sucesiones de la *Enciclopedia On-line de las Secuencias de Números Enteros* (oeis.org). Resultó que, en ese momento, el 11.630 era el número más pequeño que no estaba en alguna sucesión y, de hecho, se podía construir una nueva sucesión para OEIS formada por todos los números que no estaban en alguna sucesión previamente, lo cual no deja de ser paradójico.

embargo, a lo largo de este libro vamos a demostrar que existen familias muy interesantes de números naturales, con propiedades matemáticas apasionantes.

En el capítulo 1 se estudian los números figurados, que son aquellos que surgen de la representación de figuras geométricas. A los pitagóricos se les ocurrió coger piedras y colocarlas en el suelo en forma de triángulos, cuadrados, pentágonos y todo tipo de figuras geométricas, contando la cantidad de piedras que se utilizaban en dichas formaciones. Esta hermosa idea de mezclar aritmética y geometría permitió utilizar argumentos más visuales e intuitivos en el estudio de las propiedades de los números. Por este motivo, a lo largo del capítulo se incluyen algunas “demostraciones sin palabras”, es decir, diagramas que nos ayudan a comprender algunos resultados matemáticos o que encierran la idea de su demostración.

Los números primos, que se estudian en el capítulo 2, son la familia de números naturales más importante de la aritmética, puesto que todo número natural puede expresarse de forma única como producto de los mismos. Es el teorema fundamental de la aritmética, que ya era conocido por los matemáticos griegos. Desde la Antigüedad hasta nuestros días, la comunidad matemática, fascinada por esta familia, se ha planteado cuestiones como la existencia de infinitos números primos, cómo saber si un número cualquiera es primo o no, cómo descomponer un número en sus factores primos, cuál es la densidad y distribución de los números primos dentro de los naturales, si existen funciones matemáticas generadoras de primos o cuáles son las subfamilias más importantes, cuestiones que se abordan en este segundo capítulo. Pero los números primos no solo habitan en el mundo de las ideas matemáticas, sino que poseen aplicaciones interesantes en el mundo real, como también se mostrará a través de algunos ejemplos concretos: el sistema de encriptación RSA (Rivest, Shamir y Adleman) en criptografía, el modelo matemático que describe la relación entre presa y depredador en el caso de las cigarras, la obra plástica de la artista minimalista Esther Ferrer, que

utiliza los números primos como herramienta de creación artística, e incluso su uso en la magia.

La simetría de los números es un tema que se aborda en el capítulo 3. Una parte del mismo se dedica, en general, al estudio de las propiedades matemáticas de los números capicúas, y en particular, al estudio de un mecanismo que transforma los números naturales en capicúas, el algoritmo “invierte el orden y suma”. Otro tipo de simetría que se estudia, relacionada con la multiplicación, es la de los números cíclicos. En el último apartado se muestran algunos trucos de magia matemática, como el clásico del 1.089, el propuesto por el divulgador de las matemáticas Martin Gardner con el número cíclico 142.857 y algunos otros con números capicúas.

El objetivo del capítulo 4 es el estudio de algunas familias de números definidas por el comportamiento de sus divisores propios. Dos de las mismas son los números perfectos y amigos, que ya eran conocidas en la Antigüedad y que fascinaban, más allá de las matemáticas, por sus sorprendentes propiedades. Otro de los apartados del capítulo está dedicado a la sucesión alicuota, una sucesión recursiva en la que cada término se obtiene al realizar la suma de los divisores propios del término anterior. Se cierra el capítulo con otras familias relacionadas, como son los números intocables, extraños y prácticos.

Los números narcisistas, potentes, invariantes digitales recurrentes, de Follet, de Munchausen, de Munchausen opuestos, felices, tristes, factoriones, narcisistas salvajes, *selfies*, de Reacher, de Friedman, simpáticos, vampiros y errores de impresión, relacionados con propiedades de los dígitos en sus representaciones numéricas —que dependen de la base del sistema de numeración en el que se trabaje—, se estudian en el capítulo 5. Algunas de estas familias de números naturales surgen en el contexto de la matemática recreativa, como el libro *Diversiones matemáticas*, del experto en juegos y pasatiempos matemáticos Henry Dudeney, dos de cuyos problemas se analizan en el último apartado.

El capítulo 6 está dedicado a familias de números que surgen como solución a problemas de conteo, por lo tanto, pertenecientes a la rama de las matemáticas conocida como combinatoria. Detrás de preguntas como cuántas estructuras de ramos de doce rosas se pueden formar disponiendo de rosas de seis colores distintos, cuántas apuestas posibles hay en la lotería primitiva, cuántas estructuras de rimas existen para estrofas o poemas de una cierta cantidad de versos, de cuántas formas puede ser dividido un polígono convexo en triángulos mediante diagonales que no se cruzan o de cuántas maneras pueden darse la mano simultáneamente un grupo de personas sentadas en una mesa redonda sin que se crucen los brazos, están las familias de números que se estudian en este sexto capítulo: los números combinatorios, los números de Bell y los de Catalan.

Además, cada capítulo se cierra con una serie de actividades didácticas, diseñadas con un importante componente creativo, con el objetivo de entender mejor, con mayor profundidad y desde otras perspectivas lo estudiado en los anteriores apartados; también para que las personas que lean este libro puedan ir más allá de lo mostrado, que sean matemáticamente activas, que entiendan la importancia de la imaginación y la creatividad en matemáticas y que disfruten de la poesía de los números.

En estas actividades se anima a coger fichas de colores, botones o pequeñas piedras, construir diferentes números figurados y descubrir algunas de sus propiedades; a estudiar y experimentar por una misma tanto con las familias de números que se analizan en el texto, como con algunas otras sugeridas en las actividades; a sorprenderse con la presencia de las matemáticas en el arte; a sumergirse en los criterios de divisibilidad de los números y en sus aplicaciones; a realizar manualidades con los números, como pulseras y collares con números amigos, o tarjetas con la fecha de nacimiento de alguien expresada como suma de tres números capicúas o como el resultado de multiplicar dos números a través de un algoritmo

de multiplicación histórico; a crear ilustraciones artísticas con patrones geométricos realizados a partir de algunas familias de números a través de la criba de Eratóstenes o la espiral de Ulam; a disfrutar con la resolución de algunos de los problemas clásicos de la matemática recreativa; a apasionarse con las propiedades del triángulo de Pascal; o a animarse a realizar sencillos, pero efectivos, trucos de magia matemática entre otras actividades.

Capítulo 1

La herencia de Pitágoras

Los números figurados, es decir, aquellos asociados a figuras geométricas, como el triángulo, el cuadrado o el tetraedro, tienen su origen en la antigua Grecia. Los pitagóricos, para quienes todo era número —“la totalidad del universo es armonía y número”⁶—, unieron la aritmética y la geometría en esta familia haciendo posible el uso de argumentos geométricos, más intuitivos, en el estudio de los números.

Algunas obras de matemáticos griegos como Nicómaco de Gerasa (c. 60-120), Teón de Esmirna (c. 70-135) o Diofanto de Alejandría (201/215-285/299) recogen los estudios más antiguos sobre estos números que se conservan. Por ellos se conoce que fueron estudiados por Pitágoras de Samos (c. 585-500 a. n. e.), los miembros de la Academia de Platón, Espeusipo (c. 408-339 a. n. e.) y Filipo de Opunte (siglo IV a. n. e.), o Hipsicles (c. 190-120 a. n. e.). Además, grandes matemáticos como René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) o Augustin Cauchy (1789-1857) también se acercaron a estos números geométricos.

En este capítulo se presentarán las principales clases de números figurados: bidimensionales como los poligonales,

6. P. M. González Urbaneja, *Pitágoras. El filósofo del número*, Nivola, 2001.

entre los que se destacan los números triangulares, o los poligonales centrados; tridimensionales como los poliédricos, en especial los números piramidales; y números tetradimensionales, como los pentatópicos. Se prestará particular atención a las técnicas geométricas que se aplican para estudiar sus propiedades, sobre todo a las demostraciones sin palabras.

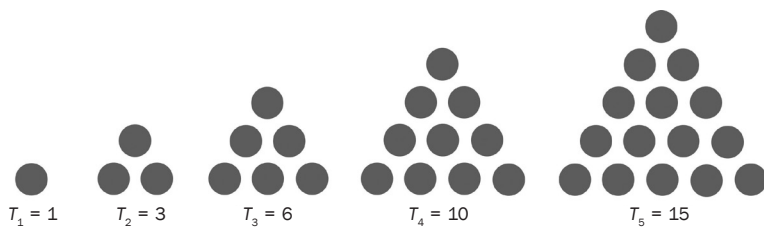
Los números triangulares

Los pitagóricos, quienes representaban los números mediante puntos en un papiro o piedras en el suelo, empezaron a estudiar aquellos números que surgían al construir figuras geométricas planas, como los polígonos regulares, los polígonos estrellados, los rectángulos o los trapecios.

Un *número poligonal* es la cantidad de puntos, o piedras, que se necesitan para representar una figura poligonal regular, como un triángulo equilátero (*números triangulares*), un cuadrado (*números cuadrados*), un pentágono (*pentagonales*), un hexágono (*hexagonales*) o cualquier otro polígono regular.

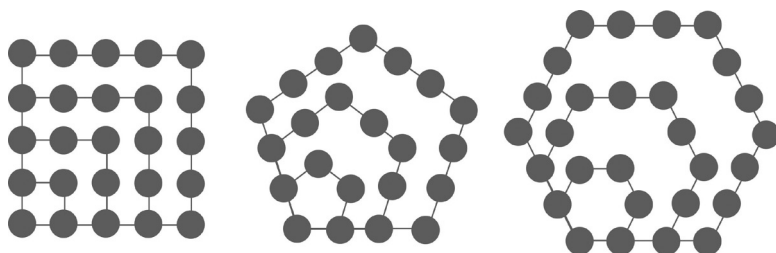
Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10 y 15, ya que esta es la cantidad de puntos que se necesitan para formar un triángulo.

FIGURA 1



De la misma forma se construyen los primeros números cuadrados (1, 4, 9, 16, 25), pentagonales (1, 5, 12, 22) o hexagonales (1, 6, 15, 28).

FIGURA 2



Demostraciones sin palabras

Las demostraciones sin palabras, como explica el matemático Roger B. Nelsen —autor del libro *Demostraciones sin palabras*—, se fueron haciendo populares en la comunidad matemática a raíz de su publicación en las revistas *Mathematics Magazine* y *College Mathematical Journal* de la Asociación Matemática de América, en las que empezaron a aparecer hacia 1975, primero como imágenes de relleno entre artículos y posteriormente como secciones fijas.

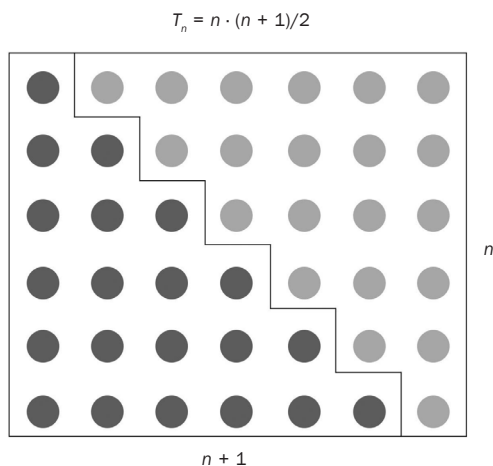
Ya en 1973 el divulgador de las matemáticas Martin Gardner (1914-2010) se había referido a las demostraciones sin palabras como diagramas “en un vistazo” y señaló que “en muchos casos, una demostración farragosa puede ser suplida por una geométrica análoga, tan simple y bella que la veracidad de un teorema es casi vista en una ojeada”.

Aunque, como comenta Nelsen, las demostraciones sin palabras no son realmente demostraciones matemáticas en sí mismas, son más bien diagramas, esquemas o dibujos que encierran la idea de la verdadera prueba matemática o que nos ayudan a comprender por qué un teorema es cierto. Eso sí, son sugerentes, atractivas y todo un ejercicio de estímulo del pensamiento.

Los números poligonales más sencillos son los triangulares. El número triangular n -ésimo, es decir, la cantidad de puntos que se necesitan para formar un triángulo equilátero⁷ de n puntos de lado, es igual a la suma de los primeros n números naturales, $T_n = 1 + 2 + \dots + n$.

Los números triangulares se pueden calcular directamente mediante la fórmula $T_n = n(n + 1) / 2$. Esta puede demostrarse de forma sencilla por medio de la inducción matemática⁸, considerando que $T_n = n + T_{n-1}$, aunque la siguiente demostración sin palabras es sencilla y hermosa.

FIGURA 3



Utilizando argumentos geométricos similares se pueden probar algunas de las propiedades de los números triangulares (actividad 1) como:

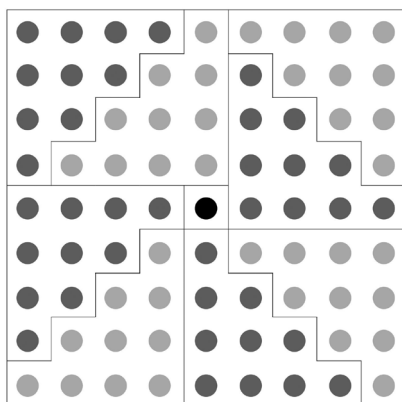
7. Un interesante libro sobre triángulos es el de M. de León y Á. A. Timón, *La engañosa sencillez de los triángulos*, Los Libros de la Catarata, 2017.

8. Una propiedad $P(n)$ se cumple para todo número natural n , si lo hace para $n = 1$ y si suponiendo cierta la propiedad para $k \leq n$ se puede probar que también lo es para $k = n + 1$.

- i) $T_n + T_{n-1} = n^2$;
- ii) $3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$;
- iii) $3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$;
- iv) $T_n^2 + T_{n-1}^2 = T_{n^2}$;
- v) $T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1} = (2n + 1)^2$;
- vi) $8T_{n-1} + 4n = (2n)^2$.

En particular, puede demostrarse visualmente el conocido teorema de Diofanto, $8T_n + 1 = (2n + 1)^2$, con el siguiente diagrama.

FIGURA 4



Como consecuencia del resultado se obtiene un test para saber si un número concreto es triangular. Así, N es triangular si, y solo si, $8N + 1$ es un cuadrado, y en tal caso, $n = \left[\frac{\sqrt{(8N + 1)} - 1}{2} \right]$. Por ejemplo, el número de la bestia 666 es triangular para $n = 36$, pero no 123.456.789.

Pueden obtenerse además dos fórmulas relacionadas con la multiplicación:

$$T_{n+m} = T_n + T_m + m \cdot n, \quad T_{n \cdot m} = T_n \cdot T_m + T_{n-1} \cdot T_{m-1},$$

donde la primera permite realizar la multiplicación de dos números, con tan solo sumas y restas, siempre que se disponga

de una tabla de números triangulares, lo cual es interesante para temas de computación.

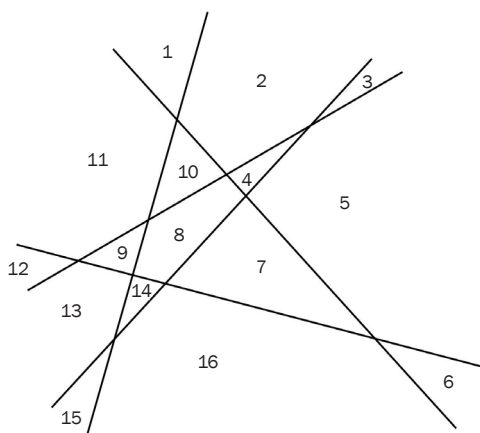
El príncipe de los matemáticos, C. F. Gauss, anotó en su diario el 10 de julio de 1796 que todo número natural puede ser expresado como suma de tres, o menos, números triangulares, el conocido como *teorema eureka*, con la escueta expresión:

$$\text{EYRHKA num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Por ejemplo, $25 = 1 + 3 + 21 = 10 + 15$.

Los números triangulares aparecen en las soluciones de algunos problemas matemáticos, como el *problema de los apretones de manos*. T_n es el número de apretones de manos que se darán en una fiesta con $n + 1$ personas si se saludan todas; de una forma más matemática es la cantidad de aristas que tiene un grafo completo⁹. O si se considera el problema de calcular la cantidad máxima de regiones en las que n rectas dividen al plano, su solución es $1 + T_n$.

FIGURA 5

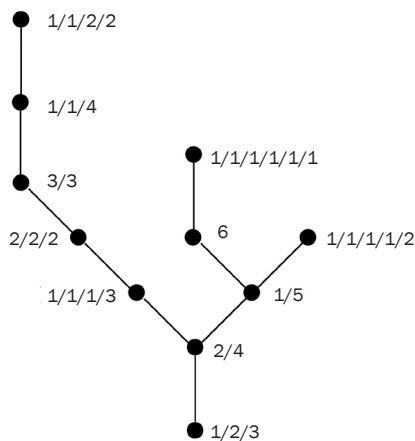


9. Un grafo completo es un grafo simple que incluye todas las aristas posibles entre los vértices del grafo. Véase R. Ibáñez, *Del ajedrez a los grafos*, RBA, 2015.

Solitario búlgaro

Martin Gardner en su columna de juegos matemáticos de la revista *Scientific American* explicó un juego de cartas llamado *solitario búlgaro*, relacionado con los números triangulares. Se empieza con un mazo de 45 cartas y se corta tantas veces como se desee formando pilas con un número arbitrario de cartas cada una, desde una sola pila con 45 cartas, sin cortar, hasta 45 pilas con una única carta. A continuación, se coge una carta de cada montón y todas las cartas recogidas se ponen en la mesa formando un nuevo montón. Se continúa con este procedimiento una y otra vez. Llegará un momento en el que haya una pila con una carta, otra con dos cartas, otra con tres, así hasta una pila con nueve cartas. A partir de ahí el proceso se estaciona, habrá nueve pilas con cartas desde una hasta nueve. Esto ocurre siempre independientemente de cuáles sean los montones iniciales. Además, este solitario puede realizarse con igual resultado en cualquier cantidad de cartas igual a un número triangular.

FIGURA 6



Al solitario búlgaro con un número triangular cualquiera de cartas se le puede asociar un árbol (grafo) con raíz (es decir, un vértice destacado hacia, o desde, el que confluyen las aristas del árbol), donde cada vértice representa una de las posibles distribuciones en pilas y cada arista un movimiento de cartas. Así, en la siguiente figura, que se corresponde al juego de 10 cartas, el vértice $3/3$ son dos montones con tres cartas cada uno y el vértice $3/3$ se une al vértice $2/2/2$. La raíz es el vértice de la distribución estacionaria de cartas, $1/2/3$.

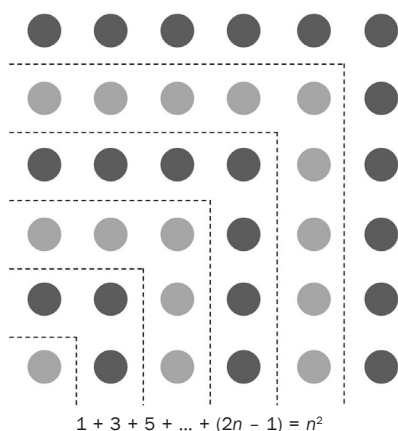
Los números triangulares también han interesado al mundo de la cultura y el arte. Por ejemplo, han sido utilizados en algunas obras del artista conceptual Mel Bochner y del artista minimalista Carl Andre.

Los números poligonales

Los números poligonales, es decir, la cantidad de puntos que se necesitan para representar una figura poligonal regular, pueden verse —que fue la definición dada por Hipsicles— como la suma de los términos de una progresión aritmética¹⁰ que empieza en 1 y cuyas diferencias sucesivas son $d = 1, 2, 3 \dots$ (donde $d = k - 2$, para k el número de lados del polígono). Así, para $d = 1$ queda la sucesión de los números naturales cuyas sumas parciales son los triangulares, para $d = 2$ los números impares cuyas sumas generan los cuadrados, para $d = 3$ la sucesión 1, 4, 7, 11... cuyas sumas son los pentagonales, y así para el resto.

10. Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión es constante.

FIGURA 7



El término general de una sucesión aritmética es igual a $a_n = 1 + (n - 1) \cdot d$, luego la suma de los n primeros términos de la sucesión es:

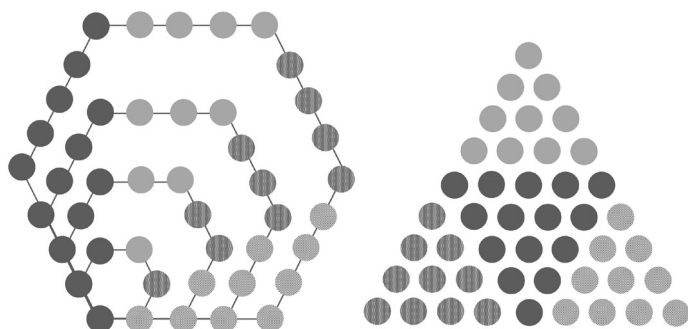
$$P(k, n) = n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d = \frac{2 + (n-1) \cdot (k-2)}{2} \cdot n.$$

Esto proporciona una familia de fórmulas para los números poligonales, en función del número de lados k . Por ejemplo, para los números pentagonales P_n y hexagonales H_n se tiene:

$$P_n = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}, H_n = n \cdot (2n-1).$$

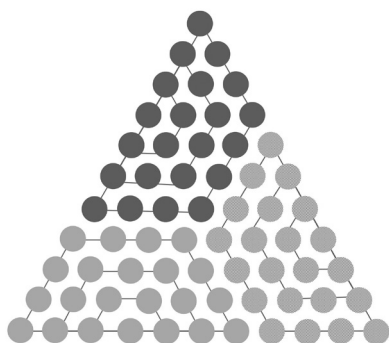
La geometría que subyace a los números poligonales hace que muchas de sus propiedades se descubran o entiendan visualmente, aunque sus demostraciones vienen de la mano de las fórmulas algebraicas. Por ejemplo, la siguiente demostración sin palabras nos muestra que “todo número hexagonal es triangular”, de hecho, que $H_n = T_n + 3T_{n-1} = T_{2n-1}$, que se prueba fácilmente con las fórmulas algebraicas.

FIGURA 8



De la misma forma, puede demostrarse que “todo número pentagonal es un tercio de un número triangular”, en concreto, $P_n = (1/3)T_{3n-1}$.

FIGURA 9

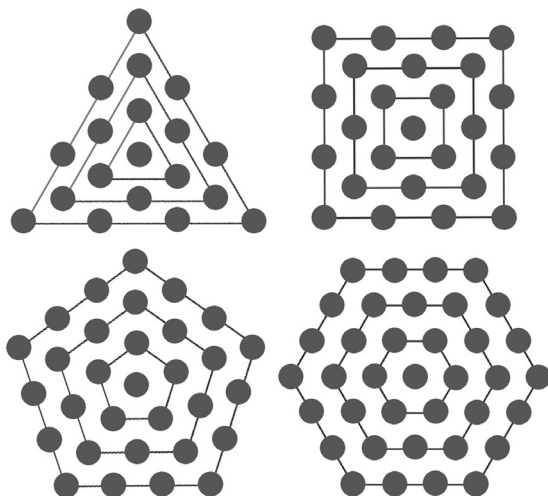


El matemático francés Pierre de Fermat conjeturó en 1638 que todo número natural podía ser expresado como la suma de, como máximo, tres números triangulares, cuatro cuadrados, cinco pentagonales y, en general, k números k -poligonales. Por ejemplo, el número 75 es igual a $10 + 10 + 55$ (triangulares), $1 + 9 + 16 + 49$ (cuadrados) o $1 + 5 + 12 + 22 + 35$ (pentagonales). Este resultado se conoce como el *teorema del número poligonal de Fermat*.

El caso triangular fue demostrado por Gauss (*teorema eureka*) en 1796. El matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) probó el caso cuadrado en 1770. El caso general fue demostrado por el francés Augustin Cauchy en 1813.

Existe otra familia de números figurados planos que son también la cantidad de puntos que se necesitan para representar una figura poligonal regular, pero con una configuración distinta a la anterior, con un punto en el centro y los puntos con la forma del polígono alrededor. Son los *números poligonales centrados*.

FIGURA 10



Como puede verse en la figura, los primeros *números triangulares centrados* son 1, 4, 10 y 19; los *cuadrados centrados* son 1, 5, 13 y 25; los *pentagonales centrados* 1, 6, 16 y 31; y los *hexagonales centrados*, llamados por Martin Gardner *números hex*, 1, 7, 19 y 37. Utilizando técnicas geométricas, fórmulas como las siguientes: $CC_n = 1 + 4T_{n-1}$, $CC_n = C_n + C_{n-1}$ y $hex_n = 1 + 6T_{n-1}$, se pueden demostrar fácilmente (actividad 6).

Es fácil obtener la fórmula general para estos números:

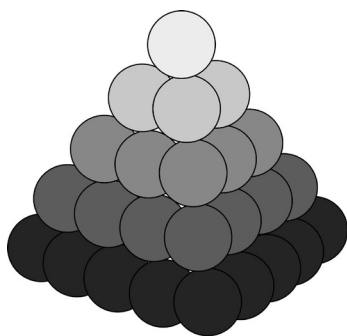
$$CP(k, n) = 1 + k + 2k + \dots + (n-1)k = 1 + \frac{(n-1) \cdot n \cdot k}{2}.$$

Existen otros tipos de números figurados planos como los números rectangulares, trapezoidales, poligonales truncados o poligonales estrellados.

Ordenando bolas

Sir Walter Raleigh (1552-1618), navegante, escritor y cortesano inglés, le planteó al matemático Thomas Harriot (1560-1621), a quien había contratado como asesor científico para su expedición a América en busca de El Dorado, algunas cuestiones relacionadas con el apilamiento de balas de cañón en la cubierta de un buque. Entre ellas preguntó cuál era la cantidad de balas de cañón de una pila piramidal de base triangular, cuadrada o rectangular¹¹.

FIGURA 11



11. Asimismo, le preguntó por la mejor forma de apilar las balas de cañón, cuestión sobre la que Thomas Harriot discutió, por carta, con el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), lo cual daría lugar a la conocida conjetura de Kepler sobre el empaquetamiento de esferas, que no fue demostrada hasta 1998 por el matemático estadounidense Thomas Hales.

La respuesta a la cuestión de cuántas balas de cañón, o bolas, hay en una pirámide de base triangular con n capas de altura es la siguiente: en la capa de arriba de la pila hay una bola, en la siguiente capa hay tres, en la tercera hay seis, en la cuarta diez, es decir, la cantidad de balas de cañón de cada capa es un número triangular. Por lo tanto, la respuesta a la cuestión planteada es la suma de los números triangulares $T_1 + T_2 + \dots + T_n$, que viene dada por la fórmula:

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

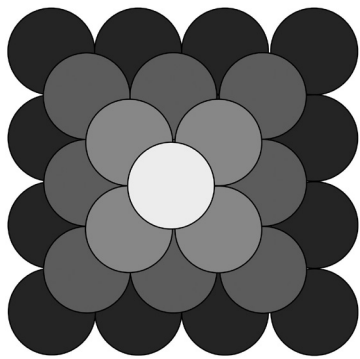
Existen varias demostraciones sin palabras de esta fórmula¹². Una de las más hermosas es la mostrada en la actividad 8, aunque aquí se muestra otra basada en un curioso gráfico numérico.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & 2 & & & & \\
 1 & 2 & 3 & & & & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & \\
 3 & 2 & 1 & & & & \\
 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 5 & & \\
 & & 4 & 4 & & & \\
 & 3 & 3 & 3 & & & \\
 2 & 2 & 2 & 2 & & & \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & 7 \\
 & & & & & 7 & 7 \\
 & & & & 7 & 7 & 7 \\
 & & & 7 & 7 & 7 & 7 \\
 & & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7
 \end{array}$$

$$3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 7$$

$$3 \cdot (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = T_n \cdot (n + 2) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

FIGURA 12



12. R. B. Nelsen, *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, 2001.

Si la pila de balas de cañón fuese una pirámide de base cuadrada, habría una bola en la capa de arriba, cuatro en la siguiente, nueve en la tercera: cada capa es un número cuadrado. Por lo tanto, la respuesta a la cuestión planteada sobre una pirámide de base cuadrada es la suma de los números cuadrados $C_1 + C_2 + \dots + C_n$, que viene dada por la fórmula:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Existen también hermosas demostraciones visuales de esta fórmula que pueden verse en “Matemáticas para ver y tocar” (blog *Cuaderno de Cultura Científica*, 2016).

Los anteriores son dos ejemplos de números figurados tridimensionales, es decir, configuraciones espaciales geométricas realizadas con bolas. En concreto, son los *números tetraédricos*, que forman una pirámide triangular —tetraedro—, y los *números piramidales cuadrados*, pertenecientes a la familia más amplia de números piramidales con bases poligonales.

FIGURA 13

	1	4	10	20	35	56	84	120	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

De la anterior demostración sin palabras se deduce una curiosa propiedad de los números tetraédricos, que son la suma de las diagonales de la tabla de multiplicar (figura 13). Cada uno de los tres triángulos de la izquierda es el quinto número tetraédrico, 35, pero si se cuenta la cantidad de veces que aparece cada cifra del 1 al 5 es igual a $1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, que es la quinta diagonal de la tabla de multiplicar.

De la misma forma que en el apartado anterior se pueden construir, ahora con bolas, diferentes números figurados tridimensionales, como los *cúbicos* (1, 8, 27, 64...), los *octaédricos* (1, 6, 19, 44...), los *icosaédricos* (1, 12, 48, 124...), los *dodecaédricos* (1, 20, 84, 220...), los *estrella octángula* (1, 14, 51, 124...) y otros.

El abogado, político y matemático Sir Frederick Pollock (1783-1870) conjeturó que todo número natural podía ser expresado como suma de, como mucho, cinco números tetraédricos, siete números octaédricos —que ha sido probada para números mayores que un número muy grande, e^{10^7} —, nueve números cúbicos —demostrado a principios del siglo XX—, trece números icosaédricos y veintiún números dodecaédricos.

Más allá de la tercera dimensión

También se definen números figurados para dimensiones mayores que tres. Para estos se pierde la visualización de los objetos geométricos que los definen, aunque la analogía dimensional —es decir, el estudio de las propiedades en una cierta dimensión, viendo el comportamiento en las dimensiones más bajas— es una buena herramienta para trabajar con cuatro, o más, dimensiones.

La figura geométrica más sencilla en el espacio de dimensión cuatro es el pentatopo, el análogo al triángulo equilátero en el plano o al tetraedro tridimensional. Se trata de una pirámide tetradimensional con un tetraedro de base. Si empezamos por el vértice, las secciones horizontales de un triángulo

equilátero son líneas, por eso los números triangulares son la suma de los primeros números naturales (estos son los *números lineales*); mientras que las secciones de un tetraedro son triángulos equiláteros y los números tetraédricos son la suma de los triangulares. Resulta que las secciones del pentatopo son tetraedros y los *números pentatópicos* son la suma de los números tetraédricos: $1, 1 + 4 = 5, 1 + 4 + 10 = 15, 1 + 4 + 10 + 20 = 35$ o $1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$.

Los números pentatópicos están dados por la fórmula:

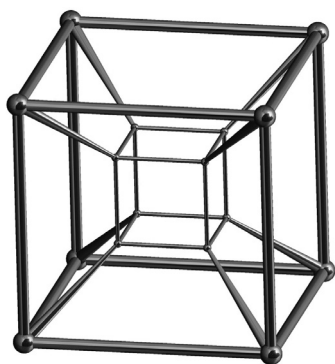
$$PT_n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{24}.$$

Con esta expresión, queda demostrado además un resultado sencillo, que el producto de cuatro números consecutivos es divisible por 24.

La siguiente figura más sencilla en la cuarta dimensión es el hipercubo¹³. De forma análoga al razonamiento anterior, los *números hipercúbicos* o *bicuaadrados* son las potencias cuartas n^4 : 1, 16, 84, 256, 625...

FIGURA 14

Proyección en perspectiva del hipercubo
tetradimensional en el espacio
tridimensional



13. Véase R. Ibáñez, *La cuarta dimensión*, RBA, 2010.

Actividades didácticas

Actividad 1. Matemáticas para ver y tocar (1).

Utilizando fichas de colores, botones o pequeñas piedras —también pueden dibujarse puntos sobre papel—, construye demostraciones sin palabras de las seis propiedades de los números triangulares que aparecen en el primer apartado, del mismo tipo que las dos demostraciones de ese apartado.

Actividad 2. Rectas del plano.

Demuestra, de forma recursiva, que:

- a) el número de rectas uniendo n puntos es T_n ;
- b) la cantidad máxima de regiones en las que n rectas dividen al plano es $1 + T_n$.

Actividad 3. Solitario búlgaro.

Juega a este solitario con 45 cartas, o con otras cantidades triangulares de cartas, y dibuja el árbol asociado.

Actividad 4. Números figurados planos.

Utilizando fichas de colores, o dibujando puntos, representa y calcula los diez primeros números de todos los números poligonales hasta diez lados (triangulares, cuadrados, pentagonales...). Lo mismo para los números poligonales centrados y los poligonales centrados estrellados; estos últimos se obtienen añadiendo en los lados de los anteriores los números triangulares correspondientes al tamaño del lado. Obtén fórmulas para cada familia y comprueba que los números obtenidos las verifican.

Actividad 5. Eureka.

Comprueba que algunos números naturales (hasta cien o una serie de números elegidos al azar) pueden ser expresados como la suma de, como mucho, tres números triangulares, cuatro cuadrados, cinco pentagonales, seis hexagonales, siete heptagonales y ocho octogonales. Asimismo, verifica las conjeturas de Pollock para dichos números.

Actividad 6. Matemáticas para ver y tocar (2).

Utilizando fichas de colores, o dibujos de puntos, construye demostraciones sin palabras similares a las vistas en el segundo apartado para las fórmulas de los números poligonales centrados que aparecen ahí, así como para las siguientes fórmulas de los números k-poligonales, para diferentes valores de k:

a) $P(k, n) = P(k - 1, n) + T_{n-1}$ (Nicomáco)

b) $P(k, n) = T_n + (k - 2) \cdot T_{n-1}$ (Bachet de Méziriac)

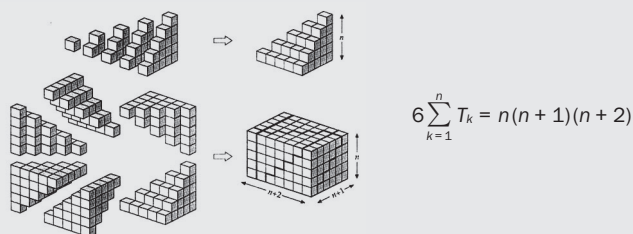
Actividad 7. Números figurados tridimensionales.

Utilizando pequeñas bolas de poliestireno, plastilina, madera o plástico —unidas mediante un sistema eventual o permanente—, construye y calcula los diferentes números figurados tridimensionales: piramidales de distintas bases, cúbicos, octaédricos, icosaédricos, dodecaédricos o estrellas octángulas.

Actividad 8. Matemáticas para ver y tocar (3).

Las matemáticas manipulativas son una excelente herramienta de aprendizaje y comprensión de las matemáticas, en particular, de los números. Teniendo en cuenta que algunas fórmulas de los números naturales, como las sumas de los números cuadrados, cubos o triangulares, admiten demostraciones sin palabras* utilizando pequeños cubos (figura 15), busca en la bibliografía y construye —con cubitos de madera, plástico o algún material didáctico— dichas pruebas visuales para ver, tocar y comprender.

FIGURA 15



* Véanse los libros *Demostraciones sin palabras/Proofs without words* de Roger B. Nelsen.

Actividad 9. La fiebre de Urbicande.

En la novela gráfica *La fiebre de Urbicande* de la serie “Las ciudades oscuras”, del dibujante belga François Schuiten y el guionista francés Benoît Peeters, aparece una red cúbica. Primero hay un extraño cubo, al que le sale otro cubo en cada una de sus seis caras, luego en total hay 7 cubos en esta etapa; en la siguiente etapa de crecimiento vuelve a aparecer otro cubo en cada cara, en total, 25 cubos, y así continúa creciendo la estructura reticular. ¿Cuántos cubos habrá en cada etapa de esta red?*

* Véase R. Ibáñez, “La ecuación de las ciudades oscuras”, *Cuaderno de Cultura Científica* (blog), 2020.