



Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas



Manuel García Piqueras

Aventuras STEAM

CIENCIA, TECNOLOGÍA, INGENIERÍA Y ARTE:
UN UNIVERSO DE CONEXIONES MATEMÁTICAS



COMITÉ EDITORIAL

Ágata A. Timón (ICMAT)
Agustín Carrillo de Albornoz Torres (FESPM)
Manuel de León Rodríguez (ICMAT)
Santiago Fernández Fernández (FESPM)
Serapio García Cuesta (FESPM)
Laura Moreno Iraola (ICMAT)

COMITÉ ASESOR

Javier Aramayona Delgado (ICMAT)
Juan Martínez-Tébar Giménez (FESPM)
Onofre Monzó del Olmo (FESPM)

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

© MANUEL GARCÍA PIQUERAS, 2021

© FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES
DE MATEMÁTICAS (FESPM), 2021
SERVICIO DE PUBLICACIONES
AVDA. DE LA MANCHA S/N
02006 ALBACETE
WWW.FESPM.ES

© INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (ICMAT), 2021
NICOLÁS CABRERA, Nº 13-15
CAMPUS DE CANTOBLANCO, UAM
28049 MADRID
WWW.ICMAT.ES

© LOS LIBROS DE LA CATARATA, 2021
FUENCARRAL, 70
28004 MADRID
TEL. 91 532 20 77
WWW.CATARATA.ORG

AVENTURAS STEAM
CIENCIA, TECNOLOGÍA, INGENIERÍA Y ARTE: UN UNIVERSO
DE CONEXIONES MATEMÁTICAS

ISBN: 978-84-1352-153-4
DEPÓSITO LEGAL: M-644-2021
THEMA: PDZ/PBW/YPM

IMPRESO EN ARTES GRÁFICAS COYVE

ESTE LIBRO HA SIDO EDITADO PARA SER DISTRIBUIDO. LA INTENCIÓN DE LOS EDITORES ES QUE SEA UTILIZADO LO MÁS AMPLIAMENTE POSIBLE. QUE SEAN ADQUIRIDOS ORIGINALES PARA PERMITIR LA EDICIÓN DE OTROS NUEVOS Y QUE, DE REPRODUCIR PARTES, SE HAGA CONSTAR EL TÍTULO Y LA AUTORÍA.

A Manuel y Alberto.

Índice

Introducción 11

Capítulo 1. Astrolabio 3D:
el universo en la palma de tu mano 15

Capítulo 2. Cambiar las cosas:
ecosistemas y desafío climático 35

Capítulo 3. Fractales desde la ISS:
arte en la naturaleza 75

Capítulo 4. Buenas vibraciones:
sinusoides y transformadas 83

Capítulo 5. Una extraña roca:
el campo magnético terrestre 101

Bibliografía 117

Anexo 123

Introducción

La vastedad del universo resulta inabarcable para el ser humano: ¿qué es el cosmos?, ¿cuál es nuestro lugar? No tenemos respuestas definitivas, pero los grandes avances en la comprensión de la naturaleza se han conseguido mediante una herramienta tremendamente útil: la ciencia. Las matemáticas, la física o la biología, entre otras, han conseguido destilar un pequeño conjunto de leyes naturales. Ahora bien, ¿es posible aprenderlas sustrayéndolas por completo de su contexto? Imaginemos una película que nos guste mucho, ¿hubiéramos disfrutado igual si le hubiéramos quitado el sonido?

La catalogación del conocimiento resulta deseable y necesaria cuando se vuelve inabarcable. Sin embargo, la apreciación de la realidad se sustenta sobre la estructura relacional de los distintos elementos que intervienen en ella; es por eso que el aprendizaje no puede reducirse exclusivamente a un área específica. El asignaturismo es una enfermedad muy arraigada en amplios sectores de la educación (Lledó, 2020). En contraposición con la enseñanza dividida en compartimentos y descontextualizada, surge la formación STEAM (acrónimo de *Science, Technology, Engineering, Art y Mathematics*), una plataforma adecuada para el desarrollo de la resolución de problemas, la investigación científica, el pensamiento creativo, el espíritu crítico, la iniciativa empresarial, el trabajo en equipo o

la gestión positiva del error. La adquisición de habilidades y competencias se considera un resultado de la educación STEAM. No se identifica con una metodología específica, sino que se concibe como un conglomerado, en constante crecimiento, de diversas metodologías, herramientas tecnológicas y orientaciones pedagógicas. Entre ellas destaca el aprendizaje basado en proyectos (ABP), donde los conceptos y procedimientos pasan a un segundo plano y el foco se localiza en la resolución de problemas en contextos reales. Otra orientación destacable sería el aprendizaje-servicio, una vía que aprovecha la instrucción para actuar sobre una necesidad cívica determinada.

En este libro se presentan una selección de iniciativas STEAM que plantean distintos retos llevados a la práctica y premiados internacionalmente. En el primer capítulo, el estudio realizado sobre la construcción de un astrolabio 3D resultó ganador del concurso *STEMforYouth (Horizon 2020)*. El segundo capítulo analiza la reforestación de una zona arrasada por un gran incendio, que mereció una mención de honor *Climate Detectives* (ESA). En el tercero admiraremos la Tierra desde el espacio, mediante experimentos ejecutados desde la Estación Espacial Internacional (ISS), que obtuvieron la más alta distinción en la competición *Astro Pi* (ESA). El cuarto capítulo nos desvelará el secreto de la armonía en la música y, en el quinto, volveremos a la ISS para adentrarnos en el corazón geomagnético de nuestro planeta; estudios e investigaciones que resultaron finalistas de *MoonCamp* (ESA) y *Astro Pi*.

En cuanto a la implementación en el aula, es importante tener en cuenta que cualquier trabajo colaborativo genera tensiones entre los integrantes del equipo que no deben obviarse. La organización inicial es clave: el profesorado debe marcar unos objetivos y una línea de trabajo clara. Su éxito radica en la subdivisión de las tareas y su oportuna asignación, ante las distintas eventualidades que surjan. Pero, por mucha ayuda que reciba, es el alumnado quien tiene que sacar adelante el proyecto en su totalidad. Tendrá que vérselas con su

desconocimiento inicial, centrarse en el objetivo, encontrar una posible solución y trabajar con entusiasmo.

Los proyectos aquí recogidos se apoyan en tecnologías ampliamente difundidas y con un alto impacto en la sociedad actual, como la impresión en 3D o el desarrollo de *software*, pero siempre con la resolución de problemas en contextos reales y una incitación a la investigación científica como objetivos generales de fondo que impregnan todo el discurso, en un contexto general de compromiso con el medio ambiente.

Asimismo, respecto a las ciencias, se tratan aspectos de enorme relevancia en física, química, biología o geología, como la astronomía, el cambio climático, el efecto invernadero, la difusión del calor, la electricidad, el geomagnetismo... En la era de la especialización, el dominio de distintas ramas científicas no está al alcance de una sola persona. Este libro ayudará a establecer una síntesis del conocimiento, desde una perspectiva humanista e integradora, aplicable a la enseñanza secundaria y preuniversitaria. Tampoco se ha descuidado el contexto histórico de los distintos avances científicos, destacando su relevancia actual, mediante la inclusión de notas y aclaraciones al respecto.

Por otra parte, se exhiben relaciones bidireccionales de las ciencias con otros ámbitos artísticos¹. Así, el diseño de un astrolabio no tiene por qué reducirse a su funcionalidad básica, sino que se enriquece mediante una ornamentación que le confiere un extraordinario valor añadido. También se muestra el caso inverso, cuando un mejor conocimiento científico de los elementos que intervienen en el proceso artístico como, por ejemplo, la música o la fotografía, aporta una mayor comprensión de su naturaleza y amplía el abanico de posibilidades para el artista.

Todos los proyectos tienen un mismo hilo conductor: las matemáticas, cuya inclusión imprime una distinción de calidad en el ámbito STEAM. Bien mediante incisos, o bien por

1. Consideramos que la creación científica ya es un arte en sí misma.

referencias directas, se involucra la práctica totalidad del currículo básico fundamental preuniversitario²: aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, funciones elementales, logaritmos, probabilidad, estadística, cálculo diferencial e integral, matrices... En particular, se constata la tremenda eficacia de las matemáticas como instrumento de análisis objetivo, capaz de anticipar resultados que luego son confirmados experimentalmente, aplicable a multitud de situaciones concretas. También se ha procurado armonizar dos visiones frecuentemente enfrentadas: por una parte, la necesidad del empleo instrumental de las matemáticas, sin entrar en detalles, al igual que se maneja un coche sin saber cómo funciona el motor; de otra parte, se establece un discurso que no ahorra en explicaciones y que busca satisfacer a las mentes más curiosas, pues son estas las que hacen avanzar a la ciencia.

Es primordial resaltar que en todos los proyectos incluidos se da la oportunidad de adaptarlos según los propios intereses, ya sea modificando el enfoque o proponiendo mejoras, de modo que el profesorado, en colaboración con su alumnado, haga suyo el proyecto. Al final de cada capítulo hay un apartado con propuestas de ampliación, pues uno de los objetivos principales del libro consiste en dar ideas para llevar al aula.

Gracias a una profunda labor de síntesis, todo lo mencionado anteriormente se atiene a la extensión preestablecida de los libros de esta colección. En cualquier caso, el lector que muestre un interés más allá de estas páginas, podrá ampliar información en un anexo, descargable electrónicamente, donde se incluyen distintos materiales de apoyo.

2. Incluso se va más allá, por ejemplo, cuando se trata la transformada de Fourier.

Capítulo 1

Astrolabio 3D: el universo en la palma de tu mano

El universo es una fuente inagotable de inspiración y comprenderlo es un gran reto. Los científicos han concebido diversos modelos del cosmos, que permiten acercarnos a su complejidad. La ingeniería modela un sistema cuando fabrica un aparato que se comporta de forma semejante al original. El método de las matemáticas consiste en plasmar algunas realidades en definiciones y principios, de modo que permitan derivar propiedades ya conocidas o nuevas predicciones.

Este primer capítulo está dedicado al astrolabio, un instrumento que es un modelo que reproduce el movimiento de la bóveda celeste y que cabe en la palma de nuestra mano. Para construirlo necesitaremos, en primer lugar, conocer ciertos principios astronómicos básicos sobre el movimiento de las estrellas. Después tendremos que diseñar el instrumento y adaptarlo para su impresión 3D. Una vez construido, nos preguntaremos acerca de las posibilidades de medir la precisión del instrumento y cómo podría hacerse, lo que nos llevará a un análisis estadístico de los errores.

1.1 El universo: inagotable fuente de inspiración

Hoy en día es posible saber la hora echando un simple vistazo a nuestros móviles, pero hemos perdido el contexto, es decir, nuestro sitio en el universo. Además, no podemos estar totalmente seguros de que alguien no esté espiando nuestros móviles o de que los datos sean correctos... Por ello, los ejércitos del mundo están rescatando sus antiguos sextantes y astrolabios para explicar la navegación celeste a sus futuros oficiales. En caso de guerra total, no podemos saber si los satélites mienten. La navegación celeste vuelve a estar de moda y, con ella, los instrumentos antiguos. Si, por ahora, no deseamos abandonar la Tierra ni poner en órbita ningún artefacto, el astrolabio todavía es útil.

La palabra *astrolabio* proviene del griego clásico *ἀστρολάβιον* y significa, literalmente, “tomador de estrellas”. Se emplea para referirse a un modelo de universo construido estrictamente a partir de conceptos físicos y matemáticos; un mapa de los cielos que da cuenta de las relaciones de sus componentes, como las estrellas, el Sol, los planetas..., a medida que transcurre el tiempo. Nos permite tener todo el cosmos en la palma de nuestra mano.

Los orígenes del astrolabio podrían establecerse alrededor del 150 a. C. En este periodo ya había instrumentos basados en la proyección. El ingenio que conocemos como astrolabio planisférico fue completado en torno al año 900.

1.2 Fundamentos astronómicos básicos, físicos y matemáticos del astrolabio

Los primeros modelos astronómicos fueron obra de astrónomos mesopotámicos, hace más de 5.000 años. Hicieron un mapa de las estrellas, distinguiendo algunas de ellas y agrupándolas en conjuntos. El universo, tal y como lo vemos desde la

Tierra, parece girar muy despacio durante toda la noche³. Como las estrellas están tan alejadas de nosotros supondremos que todas se encuentran a la misma distancia de la Tierra. Así, colocaremos todos los objetos celestes sobre la superficie de un gigantesco globo: la esfera celeste.

Es imposible representar una esfera en un plano. Hay que tener en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera en el plano es de 180° , pero sobre una superficie esférica la suma siempre es mayor que dos rectos. Los antiguos griegos conocían este problema y rebajaron sus pretensiones, sin renunciar a la eficacia. Por un lado, los ángulos deberían preservarse cuando se trasladan al plano, pues expresan la relación entre dos líneas: paralelos o meridianos. También se deberían conservar las circunferencias, pues describen las trayectorias de las estrellas en torno al polo norte. Apolonio de Perga (siglo III a. C.) incluyó una propiedad en *Las Cónicas* (Libro I, proposición 5) sobre la preservación de las circunferencias que indica un conocimiento implícito de la *proyección estereográfica* (p. e.). Esta es una transformación geométrica de la esfera al plano que funciona de la siguiente manera: unimos cada estrella, que está en un punto P , con el polo celeste sur mediante un segmento; dicho segmento corta un plano que contiene el ecuador de la esfera celeste, ese punto de corte es la proyección de la estrella, P' (figura 1, izquierda). Podemos imaginar que el plano que contiene el ecuador celeste es como un papel de radiografía; la estrella dispara un rayo de luz hacia el polo celeste sur que deja una marca sobre el papel. Esto se puede hacer para muchas estrellas, de modo que tendríamos un mapa de los cielos.

Tal y como hemos comentado anteriormente, una proyección de la esfera en el plano nunca es perfecta; cada proyección de la esfera en el plano conllevará una distorsión y esta dependerá del método empleado. La clave está en saber qué es

3. El esparcimiento de Rayleigh nos impide ver las estrellas de día (Del Mazo Vivar, 2016: 505).

posible preservar. Veamos, por ejemplo, cuáles son las ventajas e inconvenientes de la p. e.

- *Preservación de circunferencias*

Las circunferencias en la esfera celeste que no contienen el polo sur (polo de proyección) son proyectadas en circunferencias cuando se emplea la p. e.

- *Conformidad*

La p. e. es una aplicación conforme, es decir, conserva ángulos.

- *Distorsión de circunferencias no máximas*

La p. e. tiene problemas cuando las circunferencias no son máximas (aquellas cuyo centro no coincide con el centro de la esfera), de modo que, a mayor distancia del eje de proyección, más grande será la proyección.

La proyección estereográfica se concreta mediante los siguientes principios:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .
- Dado un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, la razón (cociente) entre el cateto opuesto y el contiguo es constante.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

A partir de estas propiedades obtenemos la ecuación fundamental del astrolabio, que es la que en la práctica traslada los puntos de la bóveda celeste al plano de proyección:

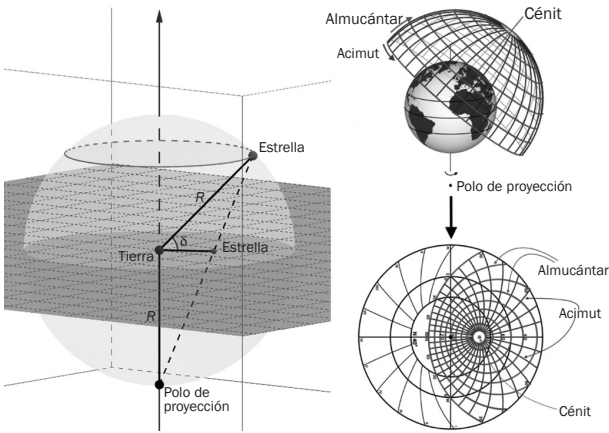
Ecuación fundamental del astrolabio

Cada punto de un círculo paralelo al ecuador de la esfera celeste es proyectado a la misma distancia común:

$$r = R \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - d}{2} \right) = R \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\cos(\delta)}{1 + \sin(\delta)} \right),$$

donde δ es el ángulo que forma X (estrella) con el plano de proyección y R el radio de la esfera celeste (figura 1). Resulta muy útil, pues nos dice a qué distancia del centro del plano de proyección se encuentra el elemento proyectado. De este modo obtenemos los radios de las circunferencias proyectadas, así como sus centros.

FIGURA 1
Proyección estereográfica (izquierda)
y plato para una determinada latitud (derecha)



Veamos cómo, a partir de los principios geométricos mencionados (García Piqueras, 2017a: 4-7), se construye un astrolabio planisférico (anverso y reverso).

1.2.1 Anverso

El anverso del astrolabio contiene la p. e. de ciertos elementos de la esfera celeste: los meridianos y paralelos celestes —también llamados *acimut* y *almucántar*, respectivamente—, el *cénit* —el punto que está justo encima del observador—, el horizonte —que es el paralelo de altura 0° para el observador que verá las estrellas que estén justo a partir de esa frontera—... Todos estos

elementos se proyectan en una pieza llamada *plato*, que está realizada para una latitud definida (figura 1, derecha).

Las estrellas se proyectan en otra pieza, llamada *araña*, la cual se coloca encima del plato; solían ser verdaderas obras de arte muy elaboradas. La araña puede girar en torno al centro del instrumento, reproduciendo el movimiento de las estrellas durante la noche. Las estrellas parece que giran en torno al polo norte, pero es la Tierra la que realmente se está moviendo. La araña incluye la *eclíptica*, la trayectoria que sigue el Sol durante todo un año en la esfera celeste. También incorpora una manecilla denominada *regla*.

1.2.2 Reverso

Hay dos tipos de modelos para el reverso del astrolabio: *excéntricos* y *concéntricos*; veremos el primero de ellos, ya que era el más habitual.

Esta parte contiene dos circunferencias: una interna y otra externa (figura 2, superior izquierda). El centro de la interior no coincide con el del instrumento y representa los 365 días del año (366 en bisiesto). La circunferencia externa, cuyo centro sí coincide con el del instrumento, se dividió en doce partes iguales llamadas *zonas del zodiaco*: aries, tauro, géminis, cáncer... El Sol se mueve a una velocidad constante sobre esta circunferencia, que representa la eclíptica. El Sol es observado desde la Tierra, representada por el centro del instrumento. El zodiaco da la medida de la longitud del Sol, es decir, su posición en la eclíptica. Dicha medida se asocia a una fecha específica del calendario mediante la *alidada*, que es la otra manecilla del instrumento. La alidada relaciona el día del año en la circunferencia interna con el correspondiente valor en la externa, es decir, con el valor del zodiaco. Por ejemplo, en la figura 2 (superior izquierda) hay una relación entre el 23 de septiembre y libra 1,5°.

Ejemplo 1

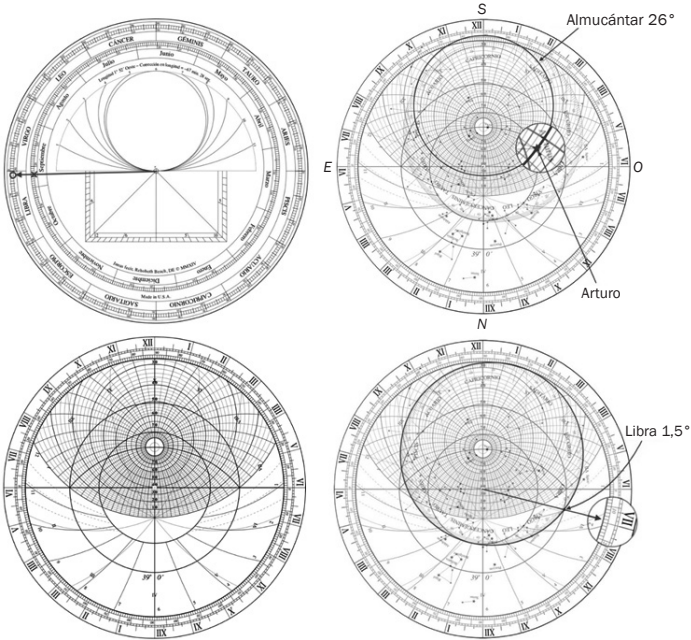
En este ejemplo se trata de hallar la hora civil a partir de la altura de una estrella mediante la ayuda de un astrolabio. Consideremos, como caso

particular, la ciudad de Albacete, cuya latitud y longitud son 38,9942°N y 1,85643°O, respectivamente. Tomaremos como estrella de referencia a Arturo, la más brillante del hemisferio norte y la tercera de todo el firmamento, cuya altura respecto del horizonte en el momento de realizar la observación es $a = 26^{\circ} 09' 14,1''$ (García Piqueras *et al.*, 2018: 17-27) y se sitúa en el oeste del cielo nocturno, cuando acaba de anochecer el 23 de septiembre de 2019.

Paso 1. En el reverso marcamos, mediante la alidada, el 23 de septiembre de 2019 en la circunferencia interna. Está próximo al día 24, pues ronda la medianoche. Sin mover la alidada, observamos el valor que marca en la circunferencia externa: libra 1,5° (figura 2, superior izquierda), que es la longitud del Sol en ese momento.

FIGURA 2

La extensión del segmento que une el centro del instrumento con la fecha del calendario de la circunferencia interior (23 de septiembre) apunta en su prolongación el valor libra 1,5° en la circunferencia exterior del zodiaco (superior izquierda). Plato para la latitud 39°N (inferior izquierda). Cálculos horarios: paso 2 (superior derecha) y paso 3 (inferior derecha).



Paso 2. Movemos la araña hasta colocar la estrella Arturo en el oeste, sobre el almucántar (altura) $a = 26^{\circ} 09' 14,1''$. Aproximadamente, sobre la altura 26° y próximo al oeste (figura 2, superior derecha).

Paso 3. Movemos la regla, de modo que unamos el centro del instrumento con el valor libra $1,5^{\circ}$ en la eclíptica de la araña. La regla, por extensión, apunta aproximadamente a una pequeña marca tras el VII. Estas marcas corresponden a 5 minutos cada una, es decir, son, más o menos, las 18:55 hora local (figura 2, inferior derecha).

No obstante, para obtener la hora civil que dan nuestros modernos relojes necesitamos considerar dos cuestiones:

La hora UTC (*Universal Time Coordinated*) es +01:00, esto es, debemos agregar una hora.

La superficie terrestre se ha dividido en husos horarios. Cada huso agrupa en una misma hora a todas las regiones que abarca. La diferencia entre el inicio y el final es de una hora. Así, entre dos localidades de un mismo huso horario podría haber una diferencia de casi una hora si nos atenemos a la hora local y, sin embargo, dos relojes situados en dichas localidades marcarían la misma hora civil. En nuestro caso, la corrección que debemos aplicar para obtener la hora civil se haría mediante la siguiente proporción:

$$\text{Latitud} \times \frac{60'}{15^{\circ}} = 1,8653 \times \frac{60'}{15^{\circ}} \approx 7,28''$$

Como nuestra zona horaria está situada al este, en concreto, la longitud de nuestra localidad es $1,8653^{\circ}$, entonces debemos restar la cantidad negativa $-7' 28''$ a la hora local. Es decir:

$$18 \text{ h} : 55' : 00'' - (-00 \text{ h} : 07' : 28'') = 19 \text{ h} : 02' : 28''$$

La España continental está alineada, en términos horarios, con el huso horario de Europa Central, +01:00 UTC, luego tenemos que agregar una hora más:

$$19 \text{ h} : 02' : 28'' + 01 \text{ h} : 00' : 00'' = 20 \text{ h} : 02' : 28''$$

En resumen, debemos añadir $67' : 28''$ a la hora local obtenida usando el astrolabio y, admitiendo un error de medición, esta no debería estar muy alejada de la hora civil real. En nuestro caso particular, un planetario electrónico⁴ muestra las 20:00 h como hora civil, cuando la altura de Arturo es $a = 26^\circ 09' 14,1''$. Por tanto, el error cometido por el astrolabio fue de unos $2' : 28''$. No sabemos qué ocurrirá para un astrolabio con piezas reales construidas, en vez de imágenes (García Piqueras, 2018: 27). Es importante indicar que una de las causas más importantes de pérdida de precisión es la imposibilidad de colocar el eje central en su posición exacta; siempre se desvía hacia un lado.

Estos principios básicos relacionados con el astrolabio y la astronomía serán muy útiles para nuestro primer objetivo: construir un astrolabio con ayuda de una impresora 3D.

1.3 Planos y construcción de un astrolabio

Puesto que los platos del astrolabio y el calendario necesitan una gran precisión, no sería recomendable crearlos con una impresora 3D doméstica. Se necesita mucha precisión para realizar las circunferencias o las pequeñas marcas del calendario. Por eso, suele imprimirse la madre, la araña, la regla y la alidada en 3D, mientras que los platos y el calendario se hacen, por ejemplo, en cartulina.

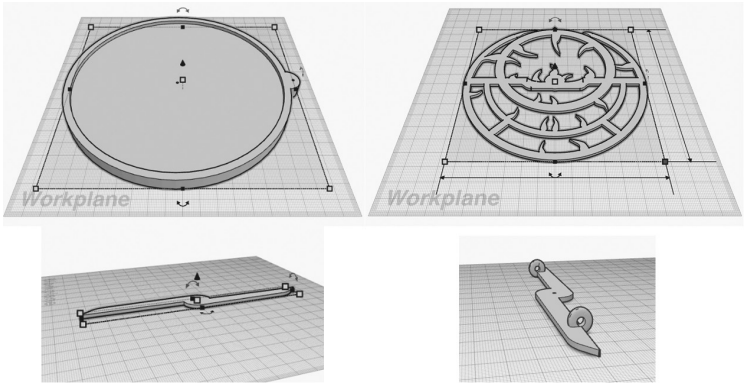
1.3.1 Piezas 3D para el primer modelo funcional

Conviene hacer un primer modelo de trabajo y corregir deficiencias si fuera el caso. Si sale a la primera no es muy normal; habría que revisarlo todo porque seguramente se nos habrá pasado algo. Para delinear las piezas emplearemos cualquier programa de diseño 3D (figura 3) que permita exportación a formato STL. Las piezas están disponibles para su descarga en un enlace del anexo: madre, araña, alidada y regla.

4. Stellarium, p. e.

Antes de la impresión 3D, es importante comprobar que las dimensiones de la impresora son suficientes. A partir del diseño original, es posible reducir las dimensiones de las piezas sobre el plano XY en un porcentaje determinado.

FIGURA 3
Madre, araña, alidada y regla (de izquierda a derecha y de arriba abajo)



Los dos objetos más problemáticos en la fase de impresión son la araña y el tornillo, que une todas las piezas y las mantiene unidas. Es conveniente no tratar de implementar todos los detalles en las primeras fases de cada proyecto, ya que resultaría muy difícil avanzar.

La araña es una pieza compleja. Los artesanos medievales daban rienda suelta a su imaginación, sin descuidar la precisión y la robustez, para darle forma. En nuestro caso, consideraremos el diseño en 2D de Ph. Liechti (2015) para el hemisferio norte y lo transformamos en 3D dándole una tercera dimensión en el eje Z . La araña debe ser recreada con mucho cuidado, de lo contrario el dispositivo perderá precisión. Para hacer una copia fiel de la imagen 2D, emplearemos un programa de dibujo vectorial⁵. Es importante introducir una corrección en esta etapa, ya que las puntas que imitan a

5. Inkscape, p. e.

las estrellas terminan con un pico agudo. Una impresora 3D solo puede imprimir hasta una precisión determinada. En nuestro caso, el valor mínimo era de unos 0,4 mm; el programa de la impresora eliminará las puntas en áreas donde se vuelven más delgadas de 0,4 mm. Esto daría lugar a errores en mediciones posteriores, por lo que las puntas de estrella de la imagen vectorial se editaron de tal manera que cada punta tuviera exactamente 0,4 mm de grosor. Así se consigue la máxima precisión que puede lograr la impresora. Luego, se transfiere la imagen vectorial al programa de diseño 3D y se le agrega una altura (2 mm, por ejemplo) en el eje Z. Este proceso es algo habitual en la impresión 3D. Lo importante es conseguir que todos los programas implicados cooperen entre sí.

1.3.2 Platos y calendario de cartulina

Nosotros emplearemos los platos diseñados por Janus (Morrison, 2007: 58-63). Si el anverso (plato) varía en función de la latitud, el reverso depende de la longitud de la localidad; veremos cómo modificar esto nosotros mismos. El diseño se realizará para el año 2018 y para la localidad de Albacete, latitud 39°N y longitud 1° 52'O (figura 2). Si se deseara construir el astrolabio para otra latitud, se puede escoger un plato que se aproxime lo máximo posible a su latitud (véase el anexo). En cuanto al reverso, es posible modificarlo para otro año y otra latitud (García Piqueras, 2017a: 26-30), a partir de la plantilla *AlbaceteCalendario.ggb* (véase el anexo). Este archivo indica dónde colocar el centro de la circunferencia que representa el calendario y la localización de enero. Cambiaremos la fecha de referencia, 31/12/2016 00:00, el día juliano 2458118,5⁶ y la longitud de la localidad, 1,85583°, expresada en grados en dirección oeste.

6. <http://aa.usno.navy.mil/data/docs/JulianDate.php>

A pesar de que el radio del calendario es de 10 cm, casi el doble del plato de nuestro astrolabio, las diferencias entre 2016 y 2018 son marginales, puesto que la distancia entre ambos centros es:

$$\textit{Distancia (Centro 2016, Centro 2018)} = 0,000201 \text{ cm}$$

También es marginal la diferencia entre 2016 y 2018 para el punto de comienzo del zodiaco en aries (Aries0-Enero0), es decir, la primera parte de la circunferencia interior para la eclíptica.

$$\text{Comienzo enero 2016} \approx 279,1162^\circ$$

$$\text{Comienzo enero 2018} \approx 279,6244^\circ$$

La diferencia entre ambos comienzos es $\approx 0,508236^\circ$, aproximadamente la mitad de un grado; las marcas de los grados en la eclíptica del anverso varían entre 1 mm y 0,5 mm, lo que hace que estas diferencias sean muy difíciles de distinguir cuando se maneja el instrumento.

En resumen, los calendarios para el 2016 y el 2018 son, en la práctica, indistinguibles, de modo que es posible reutilizar los planos de 2016 sin afectar sensiblemente a la precisión del instrumento.

Por otra parte, es necesario dibujar las marcas de los grados de la eclíptica en el anverso del astrolabio. No es conveniente imprimirlas mediante impresora doméstica ni dibujarlas a mano. Una solución es utilizar papel fotocopiable y pegarlo sobre la araña 3D.

Finalizado el proceso de fabricación de las piezas, estas se unen a través de su centro mediante un tornillo y se fijan mediante una tuerca. Es decir, se hace una especie de brocheta con ellas en el siguiente orden:

- alidada (anverso)
- araña (anverso)

- madre con el plato de cartulina (anverso)
- calendario de cartulina (reverso)
- regla (reverso)

1.4 Pruebas y escenarios distintos. Verificación de hipótesis

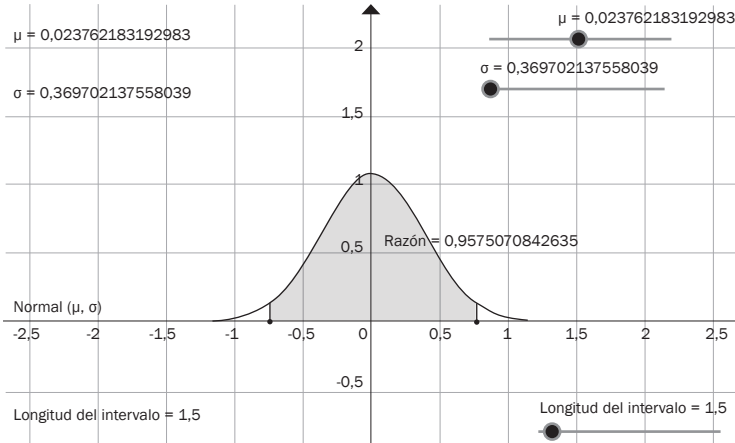
Galileo Galilei (1564-1642) afirmó (Conde, 2015: 63) que las observaciones celestes tienen los siguientes rasgos:

- Hay un único número llamado el *valor verdadero*.
- Todas las observaciones tienen errores.
- Las observaciones se distribuyen simétricamente en torno al valor verdadero.
- Los errores pequeños son más frecuentes que los grandes errores.

Con estos apuntes, Galileo describía la llamada *distribución normal* (Chung y AitShalia, 2003: 229-232) de los errores, que es ampliamente utilizada en astronomía en la actualidad. Si constatamos que los errores del astrolabio siguen esta distribución normal, podríamos aprovechar lo que sabemos sobre esta función —gracias a Abraham de Moivre (1667-1754), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) o Carl Friedrich Gauss (1777-1855), entre otros—, para evaluar la precisión del instrumento. Veremos más sobre la distribución normal en apartados posteriores; de momento, solo necesitamos saber que tiene forma de campana: es simétrica respecto del parámetro μ , media poblacional, y es estrecha (concentrada) o ancha (dispersa) en función de que la desviación típica, σ , sea mayor o menor, respectivamente (figura 4).

FIGURA 4

Intervalo de confianza al 95,75% para la distribución normal $N(\mu = 0,02, \sigma = 0,37)$



¿Qué ocurrirá en nuestro caso? ¿Será normal la distribución de los errores? En caso afirmativo, ¿cuánto valdrá la media μ ? ¿Y la desviación típica σ ? ¿Cuál será la amplitud de los intervalos que contengan el 90%, 95%... de los errores?

Para responder a estas cuestiones es preciso disponer de un conjunto numeroso de observaciones, cuanto más mejor. Consideraremos un número mínimo, en nuestro caso 60, para obtener valores aproximados de la media y la desviación típica. Las observaciones consistirán en obtener la hora a partir de la altura de una estrella⁷. Para realizar un muestreo de los datos, aconsejamos utilizar un método similar al expresado en el siguiente apartado.

1.4.1 Diseño del muestreo

Un posible método de recogida de datos mediante el astrolabio para estudiar su precisión sería similar al siguiente:

7. <https://youtu.be/Gw1GSiDawKA>

- Las observaciones consideradas como valor verdadero se obtendrán a partir de un planetario electrónico⁸.
- Suelen considerarse, al menos, 30 observaciones para disponer de significatividad estadística. No obstante, obtendremos un conjunto de 60 observaciones.
- Las observaciones deberán ser recogidas a lo largo de un año completo, de forma aleatoria. Para ello, se generan aleatoriamente cinco días por cada mes del año y, en cada día, se escoge, también de forma aleatoria, una hora del día entre las 24 posibles (00:00, 01:00..., 23:00).
- Se selecciona una estrella determinada de un conjunto determinado, por ejemplo, Arturo, y como conjunto, Deneb, Vega, Arturo, Capella y Sirio. Estas estrellas suelen estar cerca del cénit, de modo que pueden ser vistas sobre el horizonte la mayor parte del tiempo. En todo caso, si la estrella escogida no está sobre el horizonte en la fecha y hora dada, el protocolo establecería que fuera reemplazada por la siguiente en la lista, hasta que una de ellas se sitúe sobre el horizonte.
- Solo se podrá eliminar un máximo de un 5% de las observaciones demasiado alejadas del verdadero valor. Si hay más observaciones muy alejadas del verdadero valor, debería revisarse el procedimiento.

Mediante este protocolo, se generan 60 observaciones que almacenaremos en una hoja de cálculo (“Observaciones” en el anexo). Después, para cada observación, se obtiene la fecha y la hora, a partir de la altura de la estrella proporcionada por el planetario. Además, se agregan 67’ 28” por la corrección de la hora civil. En la hoja de cálculo se anota el error cometido por el astrolabio con respecto al valor real.

8. <http://stellarium.org>, p. e.

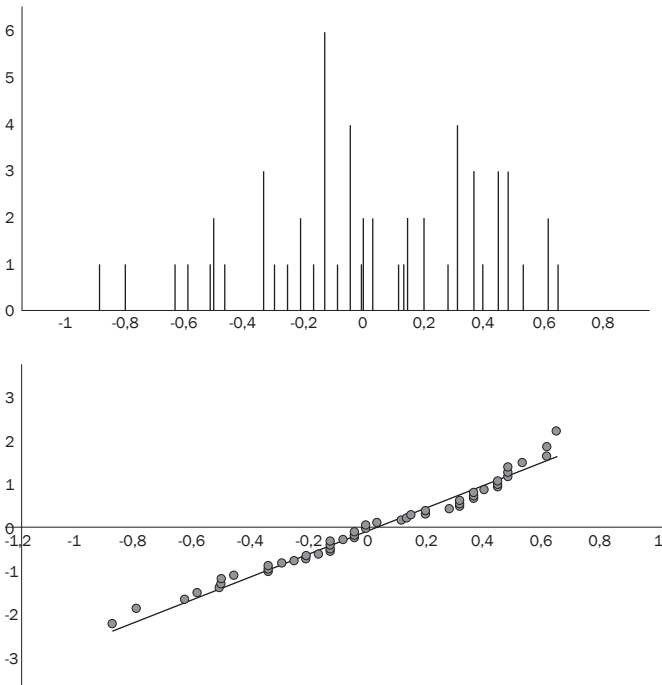
1.4.2 Resultados y análisis estadístico

Los datos obtenidos para la media poblacional y la desviación típica son $\mu = 0,023762$ y $\sigma = 0,369702$, respectivamente.

La figura 5 (inferior) muestra un gráfico donde los puntos están distribuidos muy cerca de la línea recta. Esto significa que la distribución de los errores está basada en una normal o, al menos, no es rechazable la hipótesis de la normalidad (Field, 2009: 822). Por tanto, a partir de nuestro análisis estadístico, podemos asumir como hipótesis que la distribución de los errores sigue la distribución normal, que denotamos $N(\mu, \sigma)$, donde $\mu \approx 0,023762$ y $\sigma \approx 0,369702$. Esta afirmación recibe el nombre de *hipótesis de normalidad*.

FIGURA 5

Diagrama de barras (superior) y gráfico Q-Q o Normal Quantile Plot (inferior)



1.4.3 Análisis de la precisión

Asumida la hipótesis de la normalidad, procederíamos a calcular intervalos de confianza. Es decir, nos preguntamos qué intervalos de tiempo contendrían el 90%, 95%... de los errores.

Imaginemos que todos los errores van alojándose en la recta real, como si fueran granos de arena que se van depositando. Suponemos que al final, cuando se hayan echado muchos granos de arena, es decir, cuando se hayan registrado muchos datos, formarán una duna, más o menos simétrica. El punto de equilibrio de la duna es μ , la media poblacional, y el grado de dispersión en torno a μ es la desviación típica, σ . Si la duna es suave, la desviación es mayor que si la duna fuera pronunciada. Así, consideraremos que los valores numéricos de los errores, es decir, la función o variable aleatoria X que recoge los errores, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , que denotaremos $N(\mu, \sigma)$. Entonces

$$1 - \alpha = Pr(a < X < b),$$

donde $(1-\alpha) \cdot 100\%$ es el nivel del intervalo de confianza (a, b) . Es decir, el intervalo donde el $(1-\alpha) \cdot 100\%$ de los granos de arena han caído entre a y b . Si convenimos en que el área total de la duna al representarla en el plano cartesiano es 1, entonces $(1-\alpha)$ será el área bajo la gráfica de la distribución normal en dicho intervalo (a, b) .

A partir de *ErrorAstrolabioDistribucionNormal.ggb* (figura 4), incluida en el anexo, obtuvimos los siguientes valores para la razón del área bajo la gráfica de la distribución normal $N(\mu, \sigma)$, que arrojaron los siguientes intervalos de confianza:

90% de confianza $\approx (-0,5847, 0,6323)$
Longitud del intervalo $\approx 1,217$ (1 h 13')

95% de confianza $\approx (-0,7012, 0,7487)$
Longitud del intervalo $\approx 1,4499$ (1 h 27')

98% de confianza $\approx (-0,8367, 0,8843)$
Longitud del intervalo $\approx 1,721$ (1 h 43' 15")

No es un instrumento de precisión. Recordemos que está basado en una tecnología que data de la Antigüedad. Pero además, lo más probable es que los astrónomos no se basaran en un solo dato, es decir, una única observación hecha con el astrolabio. El sentido común nos dice que es mejor si utilizamos varias observaciones y, después, nos quedamos con la media. Por ejemplo, si queremos determinar el tiempo podríamos hallar la altura de dos o tres estrellas, en vez de medir solo una. Si se tiene la suficiente habilidad en el manejo del instrumento, sería posible encontrar la hora asociada a esas alturas en poco tiempo.

Veamos cuáles son las matemáticas que están en relación con lo que nos dicta el sentido común.

Si obtuviéramos más observaciones, que expresáramos utilizando variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n ; su distribución es también $N(\mu, \sigma)$, y si encontramos el valor

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

entonces la distribución de \bar{X} es:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Considerando que el número de observaciones n que podrían realizarse, por alguien con la suficiente habilidad y experiencia, sería de dos, tres o cuatro, calculamos intervalos de confianza para la \bar{X} con distintas amplitudes. Por ejemplo, con $n = 4$ observaciones para intervalos de 30' será de un 82,4%, mientras que para 45' y 60' será de un 95,8% y un 99%, respectivamente.

Un astrónomo experimentado podría tomar perfectamente cuatro observaciones en dos o tres minutos, lo cual hace que el instrumento tenga un intervalo de confianza al 96% en un intervalo menor de 45', aproximadamente.

Actividades finales.

- a) Considera otras construcciones que permitan mejorar la precisión del astrolabio, sabiendo que el punto débil es la correcta posición del centro en todas las piezas. Si se construye, estudiar su precisión.
- b) Diseña tu propia araña de astrolabio: en el anexo encontrarás una imagen con las estrellas más importantes del hemisferio norte, así como enlaces a colecciones museísticas de todo el mundo con objetos de incalculable valor para inspirarte.

