CATARATA

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ICMAT
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Manuel de León

Cónicas

HISTORIA DE SU INDEPENDENCIA DEL CONO

CATARATA

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

CÓNICAS.
HISTORIA DE SU INDEPENDENCIA DEL CONO

ISBN: 978-84-1352-059-9
DEPÓSITO LEGAL: M-26.359-2020
THEMA: PDZ/PB/PBX/PBM

Dedicado a mi hija Cristina.
Agustín Carrillo de Albornoz

Dedicado a la memoria de mi hermana Rosa María
y su esposo José Francisco.
Manuel de León

Índice

Introducción

En la historia de las matemáticas, la búsqueda de soluciones a problemas clásicos ha sido una constante. Esta obsesión ha servido en parte para encontrar nuevos métodos que conllevaban el hallazgo de nuevos conceptos, favoreciendo el avance de las matemáticas. La idea de buscar estas herramientas fue la causa del descubrimiento de las cónicas, que se utilizaron para resolver estos problemas o, al menos, para intentarlo.

Las cónicas surgen en la antigua Grecia como secciones de un cono cuando se corta por un plano y, dependiendo de la inclinación, aparecerán la *elipse*, la *hipérbola* o la *parábola*, aunque también se pueden encontrar otras cónicas denominadas *degeneradas,* como un punto o dos rectas secantes. El interés despertado por las cónicas se mantuvo en épocas posteriores para muchos matemáticos que buscaban la forma de utilizarlas en otros procesos, como la resolución de ecuaciones de distintos grados.

Generadas como secciones cónicas, posteriormente se estudiaron como lugares geométricos de un conjunto de puntos del plano que cumplían una determinada propiedad, hecho que supuso su independencia del cono y su desarrollo por sí mismas. La idea de movimiento que las generaba hizo que se crearan distintos instrumentos para su construcción, al igual que para otras curvas a las que se les asignaba el concepto de *mecánicas*. El estudio de las cónicas como lugares geométricos facilitó la definición de sus características y elementos, siendo una nueva obsesión el trazado de la tangente en un punto de la curva, no solo para las cónicas, sino para cualquier curva en general.

El último paso dado por las cónicas se produce con el descubrimiento de los sistemas de coordenadas que hacen que se definan como curvas a partir de su ecuación, tal y como se conocen en la actualidad, aunque nunca se olvide que se obtienen intuitivamente a partir de un cono.

Consideradas como objetos matemáticos sin un uso claro fuera de la disciplina, obtienen un papel clave cuando Kepler descubre las tres leyes que rigen el movimiento de los astros. En la primera ley establece que los planetas describen elipses en su movimiento alrededor del Sol, que ocupa precisamente uno de sus focos.

Este libro está dedicado al estudio de las cónicas, de su evolución a través de la historia, como recogen los tres primeros capítulos, dedicando el cuarto al estudio de cada una de las cónicas. En él se describirán su ecuación general y reducida, sus características, propiedades y algunos métodos para su trazado. El último capítulo está dedicado a sus aplicaciones y a su presencia en ámbitos tan distintos como la publicidad, el arte, la arquitectura, la medicina o la física y la química.

Los distintos capítulos están apoyados por una gran cantidad de imágenes, la mayoría construidas para facilitar el seguimiento de los conceptos expuestos en el libro. Todas las construcciones se han realizado utilizando GeoGebra, un programa de *software* libre muy extendido en la actualidad, con millones de usuarios que crean y comparten materiales para promover su uso como recurso en el aula.

Con esta idea, a través de las opciones que ofrece este programa, se ha creado un espacio en los recursos de GeoGebra para facilitar el acceso del lector a todas las construcciones incluidas en el libro, de manera que pueda comprender paso a paso el proceso seguido, pueda descargarlas, utilizarlas y, por supuesto, como ocurre con todos los materiales creados por todos los usuarios de GeoGebra, pueda modificarlas si lo considera oportuno. El acceso a estas construcciones se hace a través de la dirección:

https://www.geogebra.org/m/nvqspxj9

Con este libro esperamos despertar en el lector el mismo interés por las cónicas y sus aplicaciones que han tenido a lo largo de la historia los grandes matemáticos que han hecho posibles los avances de la matemática.

Capítulo 1

Las secciones cónicas

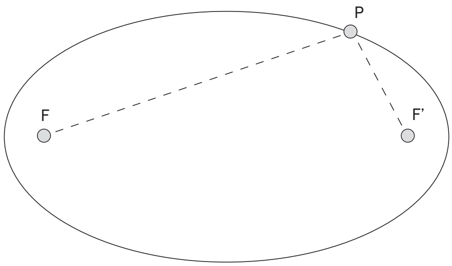
Difícilmente se puede olvidar la cara de asombro de Hipatia de Alejandría (360 d. C.- 415 d. C.) que muestra la película *Ágora* (2009) cuando descubre, a partir de las secciones de un cono, el movimiento elíptico de la Tierra. En ella utiliza el método del jardinero para dibujar una elipse en la arena y definiendo la circunferencia como una elipse muy especial, en la que los dos focos se han acercado tanto que son uno solo.

Siguiendo este método, basta situar dos puntos fijos, que serán los focos de la elipse (F y F' en la figura). Al atar una cuerda a cada uno de esos puntos y tensarla, manteniendo siempre la misma longitud, aparecerá la elipse. De esta forma se puede definir la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante (longitud de la cuerda utilizada).

$$PF + PF' = k$$

Figura 1

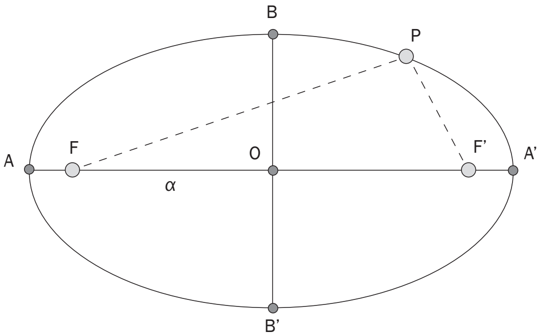
Elipse como lugar geométrico



En la figura 2 vemos representados los vértices A, A', B y B, y el centro O de la elipse; suponiendo que la distancia del punto A al centro es a, tendremos que, como A es un punto de la elipse, la suma de las distancias a los focos es constante.

Figura 2

Vértices, focos y centro de la elipse



Por lo que:

$$AF + AF' = AF + AO + OF' = AF + AO + OA' - F'A'$$

Como $AF = F'A'$, tendremos que:

$$AF + AF' = AF + AO + OA' - F'A' = AF + AO + OA' - AF =$$
$$AO + OA' = a + a = 2a$$
$$PF + PF' = 2a$$

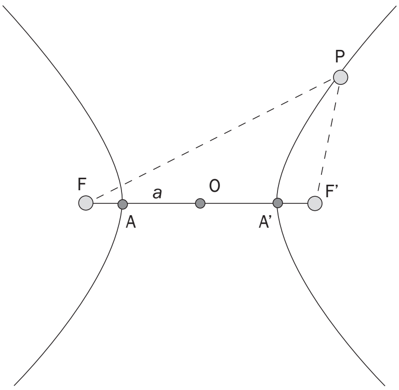
que corresponde al valor constante al que es igual la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos.

De manera análoga, la hipérbola y la parábola se pueden definir como lugares geométricos.

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

Figura 3

Hipérbola como lugar geométrico



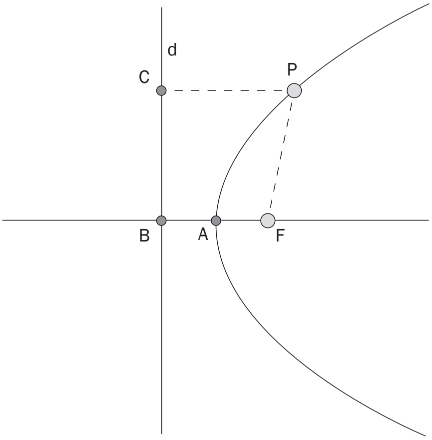
De la misma forma se puede obtener el valor de la constante, que será $2a$. Por tanto: $PF - PF' = 2a$

Para definir la parábola se necesitan un punto (foco) y una recta denominada *directriz*. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al foco es igual a la distancia a la directriz.

$$Distancia\ (P, d) = PF$$

Figura 4

Parábola como lugar geométrico



Estas son las definiciones como lugares geométricos de las tres cónicas, pero podemos plantearnos desde cuándo y cómo se conocían las cónicas.

Las secciones cónicas eran conocidas por los griegos como instrumentos auxiliares para resolver problemas que no podían abordar con los métodos clásicos como eran el uso de la regla y el compás. Entre los problemas clásicos más conocidos, recordemos que se encontraban la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo o la duplicación de un cubo. En este último problema se trataba de encontrar un nuevo cubo de arista b a partir de un cubo de arista a, de tal manera que $b^3 = 2\,a^3$. El problema se planteó cuando los ciudadanos de Atenas, asolados por una terrible peste, decidieron visitar al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo podría conjurarse la epidemia. El oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo para brindarle ofrendas mayores. Los atenienses duplicaron las dimensiones del altar, pero esto no sirvió para detener la peste (de hecho, lo que consiguieron fue un cubo con un volumen ocho veces mayor).

Fue Hipócrates de Quíos, geómetra y astrónomo griego que vivió en el siglo V a. C., quien determinó que resolver este problema era equivalente a obtener dos segmentos de longitudes x e y, medias proporcionales, por lo que deberían cumplir la relación siguiente:

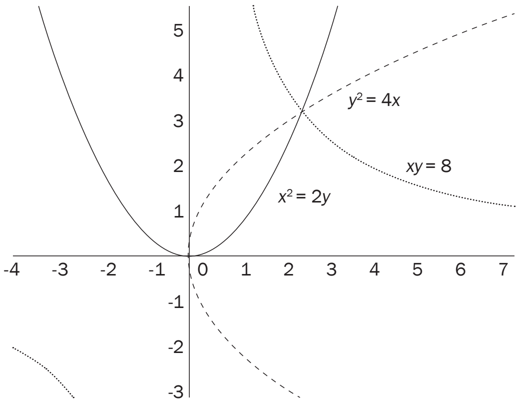
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Determinar estos dos segmentos, en la actualidad, supone encontrar el punto de intersección de dos parábolas o de una parábola y una hipérbola, que corresponden a las que se obtienen de cada una de las igualdades de la expresión anterior.

$$x^2 = a\,y$$
$$y^2 = 2\,a\,x$$
$$x\,y = 2\,a^2$$

FIGURA 5

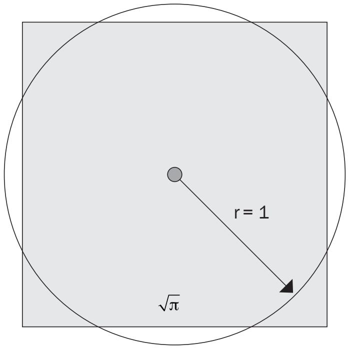
Dos parábolas y la hipérbola para $a = 2$



Hipócrates también dedicó sus esfuerzos a intentar cuadrar el círculo, lo que significaba encontrar el valor b que cumpla la relación $b^2 = \pi\, r^2$, siendo r el radio del círculo inicial. Si consideramos un círculo de radio 1, se trataría de encontrar un cuadrado cuyo lado sea $\sqrt{\pi}$, pero al ser π un número trascendente, se demostraba imposible su resolución con regla y compás.

Figura 6

Cuadratura del círculo de radio 1

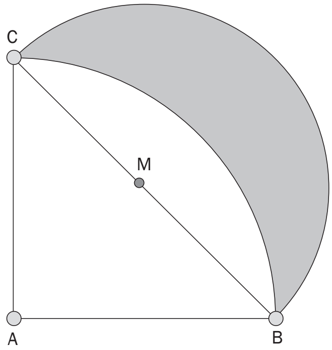


La demostración definitiva de la trascendencia del número π no se realizó hasta el siglo XIX, por lo que este problema ha sido un clásico en la historia de las matemáticas. Sabemos, como demostró Johann Heinrich Lambert en 1761, que es un número irracional, es decir, no se puede expresar como una fracción, lo que supone que tendrá infinitas cifras decimales sin periodo. También sabemos que es un número trascendente, es decir, que no es la raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros, tal y como demostró en 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann.

Los griegos consiguieron, utilizando regla y compás, la cuadratura de distintos polígonos, pero encontraron demasiadas dificultades cuando se trataba de resolver la cuadratura de figuras curvas.

La obsesión de Hipócrates por resolver los problemas clásicos le llevó a buscar la cuadratura de otras figuras, como las *lúnulas*, que son la superficie intersección de dos círculos de radios distintos. En la figura 7 aparece la construcción de una lúnula de Hipócrates, en la que se cumple que el área de la lúnula es igual al área del triángulo isósceles rectángulo *ABC*.

Figura 7
Lúnula de Hipócrates



Ejemplo 1

Para obtener la igualdad anterior, si suponemos que la longitud del lado *AB* del triángulo es 1, el proceso sería análogo para una medida *a* del lado. La hipotenusa del triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras, será:

$$CB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$CB = \sqrt{2}$$

El área del triángulo será

$$A_T = \frac{1}{2}$$

El área del cuarto de circunferencia ABC, cuyo radio es 1, será

$$A_c = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, el área de la cuerda determinada por la hipotenusa *CM* será la diferencia entre el área del cuarto de círculo y el área del triángulo.

$$A_{cu} = A_c - A_T = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Y el área de la semicircunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa *BC* será

$$A_s = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

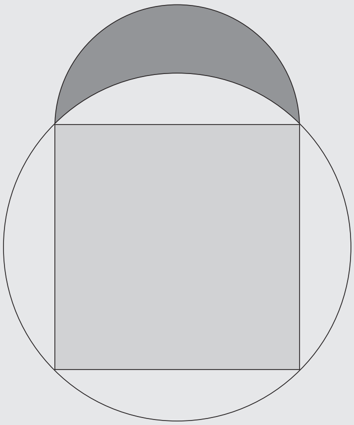
Con las expresiones anteriores, el área de la lúnula sería igual al área de la semicircunferencia menos el área de la cuerda.

$$A_L = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el área de la lúnula es igual al área del triángulo.

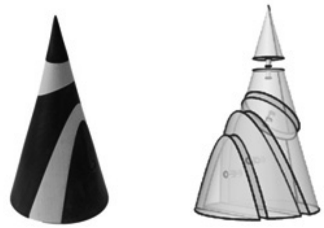
Hipócrates realizó una primera recopilación de los trabajos de geometría, un siglo antes que Euclides, por lo que es posible que este utilizara algunas de sus ideas para incorporarlas a *Los Elementos*. Las lúnulas eran un intento por lograr la cuadratura del círculo, problema que los matemáticos llevaban siglos intentando resolver, y que también ha sido motivo de estudio en siglos sucesivos, hasta que, en 1882, Ferdinand von Lindermann demostró que era imposible. En la actualidad se ha demostrado que solo cinco tipos de lúnulas son cuadrables; Hipócrates descubrió tres de ellas, mientras que las otras dos fueron halladas en 1770.

Ejercicio 1. En un cuadrado de lado 2 unidades, se construye la lúnula cuyo arco exterior corresponde a una semicircunferencia dibujada sobre un lado, tal y como aparece en la figura. Comprueba que su área es la cuarta parte del área del cuadrado sobre el que se ha construido.



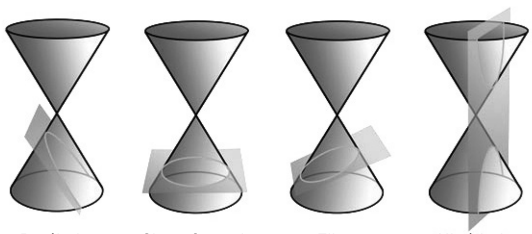
En la misma secuencia de *Ágora*, aparece el cono de Apolonio, creado por Apolonio de Perga (*ca.* 260-190 a. C.), que, además de facilitar la visión de las distintas secciones cónicas, puso nombre a cada una de ellas. Cada una de las piezas que componen este cono muestra las distintas secciones cónicas que, como su nombre indica, se obtienen utilizando un plano para seccionar el cubo.

FIGURA 8
Cono de Apolonio



Cortando por un plano oblicuo a la base aparecerá la elipse; si el corte es paralelo a la generatriz, la sección obtenida será una parábola; mientras que si el corte es paralelo a la altura del cono, aparecerá la hipérbola; y cuando el corte es paralelo a la base, se obtiene la circunferencia.

FIGURA 9
Secciones cónicas



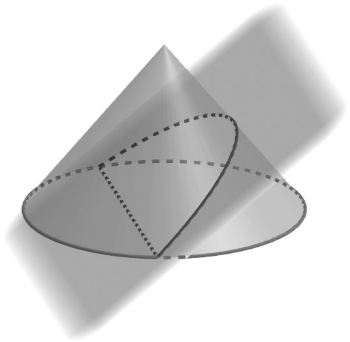
Las cónicas ya eran conocidas por otro matemático, también griego, Menecmo (350 a. C.), a quien se le atribuye su descubrimiento, y que las utilizó como herramientas para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Para resolver este problema, intentó buscar nuevas curvas como intersección de cuerpos sólidos, aunque este método ya había sido utilizado unos años antes por otro matemático y astrónomo griego, como fue Arquitas (428-347 a. C.), que para resolver el mismo problema buscó la curva obtenida como intersección de un cono y un cilindro.

Menecmo utilizó un cono circular recto de una sola hoja que cortaba con un plano perpendicular a una generatriz, obteniendo la curva cuya ecuación ahora podemos expresar de forma analítica como $y^2 = k\,x$, en la que k es una constante que solo depende de la distancia del vértice del cono al plano por el que se ha obtenido la sección.

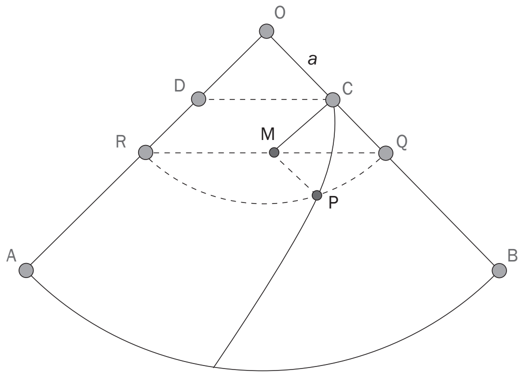
FIGURA 10

Corte entre un cono recto y un plano perpendicular a una generatriz



Aún hoy se desconoce cómo pudo obtener esta propiedad, cuya demostración solo depende de teoremas de geometría elemental. Si P es un punto cualquiera de la sección de corte con el cono a través del plano perpendicular a la generatriz OB,

Figura 11



y si M es el pie de la perpendicular trazada desde el punto P al diámetro RQ, por el teorema de la altura, se tendrá que

$$\frac{RM}{PM}=\frac{PM}{MQ},\ \text{por lo que}\ PM^2 = RO \cdot MQ \quad (1)$$

Al ser un cono recto, el plano que contiene a la sección es paralelo a la generatriz OA, por lo que $RM = DC$. Dado que los triángulos CMQ y ODC son semejantes, se cumplirá la relación

$$\frac{MQ}{DC}=\frac{CM}{OD}$$

y como $OD = a$ y el triángulo ODC es rectángulo en O, se cumplirá el teorema de Pitágoras, por lo que $DC^2 = 2\ a^2$.

Sustituyendo en (1), se tendrá:

$$PM^2 = RM \cdot MQ = DC \cdot DC \cdot \frac{CM}{a} = 2\ a^2\,\frac{cm}{a} = 2\ a\ CM$$

$$PM^2 = 2\ a\ CM$$

Considerando el plano de la sección, es posible tomar un sistema de referencia con origen el punto C, eje de abscisas la recta que contiene al segmento CM y eje de ordenadas la recta perpendicular en C a la recta anterior, la expresión obtenida anteriormente se podría escribir en la forma $y^2 = 2\,a\,x$, que corresponde a la ecuación de una parábola.

Con procedimientos análogos, Menecmo obtuvo la elipse y la hipérbola como secciones de conos acutángulos y obtusángulos, respectivamente, utilizando siempre planos perpendiculares a una generatriz. Las tres secciones cónicas obtenidas con los procedimientos anteriores reciben el nombre de *Triada de Menecmo.*

Ejercicio 2. Determina las secciones que se pueden obtener en un cilindro recto. Y en un cubo ¿qué secciones se pueden obtener con distintos cortes con un plano?

Euclides de Alejandría (325-265 a. C.) en sus *Elementos* estableció una nueva forma de analizar y resolver los problemas, creando un método sistematizado, a la vez que facilitó una serie de recursos que sirvieron para enriquecer la geometría y la forma de abordarla, produciendo el conocimiento necesario a pesar de las carencias de la época.

En estos libros, Euclides establece distintos elementos para obtener curvas y la forma de estudiarlas. Al igual que Menecmo, hace uso del concepto de cono sin muchas referencias a las secciones cónicas, aunque es probable que en los cuatro libros perdidos de Euclides, titulados *Las Cónicas*, apareciera alguna referencia a estas secciones, incluso realizando aportaciones mucho más importantes que las conseguidas por Menecmo. El estudio de las curvas en esta época se realizó de forma geométrica, limitándose a seccionar el cono con un plano para determinar las distintas cónicas que se podían obtener.

El sentido de curva para Euclides podía aparecer en los libros perdidos sobre las cónicas, pero al extraviarse estas obras, las únicas referencias que quedan son las que aparecen reflejadas en las distintas proposiciones de *Los Elementos*, tal y como figuran en las primeras definiciones del libro I, donde describe las características de puntos, líneas, superficie plana, tipos de ángulos, figuras, círculos, elementos de un círculo, semicírculo, triángulos y cuadriláteros y figuras multiláteras (así llama a los polígonos de más de cuatro lados), con definiciones como:

- Definición 1. Un punto es lo que no tiene partes.
- Definición 2. Una línea es una longitud sin anchura.
- Definición 5. Una superficie es la que solo tiene longitud y anchura.
- Definición 7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
- Definición 13. Un límite es aquello que es extremo de algo.
- Definición 15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Estas definiciones dan una idea general acerca de lo que era una figura para Euclides y su manera de distinguirlas, entre las que destaca el círculo. Además, en ellas se describen elementos como el centro o el diámetro, y también el concepto de semicírculo.

Esta definición del círculo como figura plana, sujeta a unas determinadas condiciones en cuanto a los límites y superficie, puede tomarse como un modelo para definir nuevas figuras, lo que nos lleva a pensar que Euclides conocía el significado de lugar geométrico y la forma de generar otras curvas o superficies, tal y como refleja en su libro XI, donde se crea una esfera a partir del giro de un semicírculo.

De esta manera, Euclides relaciona las figuras planas con las figuras sólidas en el sentido de que las primeras permiten generar sólidos simplemente realizando rotaciones respecto a un determinado eje de referencia. Al igual que Menecmo, es probable que Euclides distinguiera secciones generadas a partir de figuras que poseen volumen. Sin embargo, Euclides comparte la manera en la que Menecmo define el cono en términos de figura plana; por esta razón, en la definición 18 de su libro XI de *Los Elementos*, Euclides establece qué es un cono y da una manera de generarlo; diferenciando los distintos tipos de conos que utilizó Menecmo. En dicha definición establece que: "Cuando un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo permanece fijo y el triángulo gira a su alrededor hasta volver a la posición de la que empezó a girar, la figura formada es un cono. Si la recta que permanece fija es igual al lado del ángulo recto que gira, el cono es rectángulo; si es menor, obtusángulo; y si es mayor, acutángulo". Esta definición permite establecer una relación entre la manera como Euclides define el círculo y el cono, suponiendo que Euclides fuese consciente de que para obtener curvas bastaba seccionar el cono, y para generar curvas como el círculo bastaba cumplir una determinada propiedad. Por tanto, se podría deducir que una curva para Euclides está referida al contenido, cuyos límites son líneas y círculos, y que denota un entorno continuo.

Los Elementos de Euclides fue una de las primeras obras que se imprimieron tras el descubrimiento de la imprenta, y desde su primera edición en 1482 se han publicado más de mil ediciones. Puede que algunos resultados recogidos en estos libros no fueran descubiertos por Euclides, pero el estilo y la sencillez con la que están escritos han hecho que sea una obra que ha perdurado a lo largo de los siglos. Matemáticos como Galileo Galilei o Isaac Newton se apoyaron en *Los Elementos* para sus descubrimientos, y el filósofo Beltrand Russell escribió: "A los once años comencé con Euclides, con mi hermano como tutor. Fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No había imaginado que existiera un libro tan delicioso".

La habilidad que Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) tenía para realizar cálculos numéricos le permitió obtener una buena aproximación de la razón entre la longitud de una circunferencia y su radio. El proceso seguido consistió en inscribir un hexágono regular en una circunferencia, al calcular los perímetros de los polígonos obtenidos duplicando sucesivamente el número de lados, hasta llegar a un polígono regular de 96 lados. El valor obtenido fue una aproximación de π que se puede expresar por la desigualdad

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Este valor era la mejor aproximación obtenida hasta este momento por los egipcios y los babilónicos.

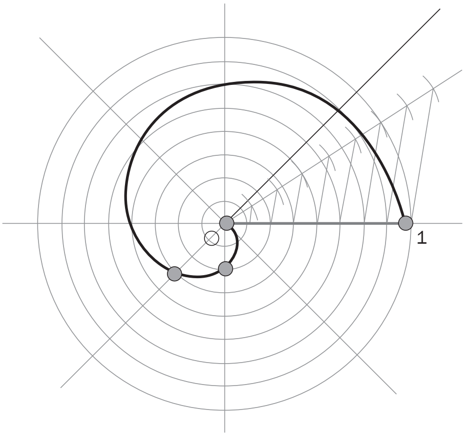
> El símbolo de π lo introdujo en 1706 el matemático galés William Jones (1675-1749), posiblemente como primera letra de la palabra griega que designa al perímetro (περίμετρος).

El interés por resolver los problemas clásicos también llamó la atención de Arquímedes, obteniendo la solución para dos de ellos: la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo, a partir de la espiral que lleva su nombre. En su libro *Sobre las espirales* describe que, aunque se conocían las secciones cónicas desde hacía más de un siglo, no se habían producido avances en aspectos como el cálculo de áreas sobre dichas curvas.

En la obra de Arquímedes las curvas adquieren gran importancia, utilizándolas también como herramientas para encontrar la solución de los problemas clásicos. La espiral la utiliza para resolver la cuadratura del círculo, para calcular la longitud de un arco de circunferencia y en la trisección del ángulo. La forma de definir esta curva se hace en términos de giros de líneas y la invariancia de un extremo de la línea. Así define esta curva: "Si una línea recta dibujada en un plano gira uniformemente cualquier número de veces alrededor de un extremo fijo hasta que regresa a su posición original y si, al mismo tiempo que la línea gira, un punto se mueve uniformemente a lo largo de la línea recta comenzando en el extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano".

Figura 12

Espiral de Arquímedes

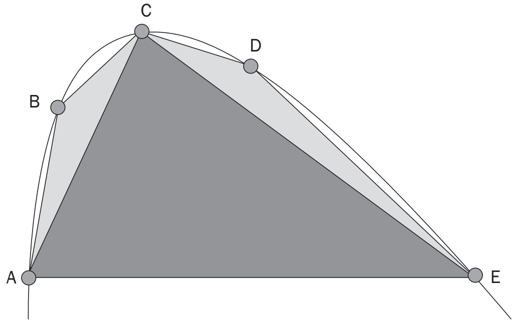


Fuente: https://www.mongge.com

En el libro citado aparece una proposición en la que describe la cuadratura de un segmento de parábola, que es igual a cuatro tercios del área de un triángulo inscrito que tenga igual base y la misma altura que el segmento de parábola.

Figura 13

Cuadratura de un segmento de parábola



También calculó el área de la elipse, escribiendo "las áreas de las elipses son entre sí como los rectángulos construidos sobre sus ejes", lo que viene a decir que el área de la elipse es igual a la expresión πab, siendo a y b los semiejes, y que fue demostrada posteriormente por Kepler en el siglo XVII.

El trabajo de Arquímedes se considera precursor del cálculo, ya que utiliza métodos de aproximación para realizar determinadas cuadraturas. Las curvas le sirven como instrumentos para ampliar el conocimiento, resolver problemas y crear procedimientos geométricos.

En los trabajos anteriores, para obtener las distintas cónicas eran necesarios conos diferentes, algo que 50 años después cambió Apolonio de Perga, ya que demostró que se podrían obtener a partir de un único cono, cambiando la inclinación del plano con el que realizaba la sección. Desde este momento, las cónicas tienen interés por sí mismas y no como hasta entonces, que eran herramientas auxiliares para resolver otros problemas.

Apolonio de Perga (*ca.* **262-190 a. C.**)

De Apolonio se conoce, además de su lugar de nacimiento, Perga (ciudad griega situada en la actual Turquía), que fue matemático y astrónomo, que estudió y enseñó en Alejandría, recibiendo el calificativo de "El gran geómetra", fundamentalmente por sus trabajos sobre cónicas.

Figura 14

Fuente: https://vidasfamosas.com/2011/08/31/apolonio-de-perga-fundador-de-las-matematicas/

Contemporáneo de Arquímedes, fue considerado el tercer talento griego, el matemático al que se debe el mejor y más completo estudio de las secciones cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, a las cuales dio nombre.

También, se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento observado de los planetas, así como la variación de la velocidad de la luna.

La mayoría de los trabajos de Apolonio han desaparecido, y solo de algunos se conocen breves descripciones realizadas, unos 500 años después, por Pappus, otro matemático también de Alejandría. Sin embargo, gracias a la traducción al árabe realizada en el siglo IX por Thabit Ibn-Qurra, se conocen *Las*

Cónicas, que recogen en ocho libros 487 proposiciones en las que estudia estas curvas con todo detalle.

El primer libro está dedicado a la generación de las secciones cónicas y al estudio de sus propiedades elementales, desarrollado de forma más amplia que el resto de estudios conocidos hasta esa fecha; en el segundo libro estudia los diámetros, ejes, asíntotas y otras cuestiones de carácter general, mientras que el tercer libro contiene una gran cantidad de teoremas que servirán para el estudio de sólidos, y en el cuarto libro analiza las distintas formas en las se pueden intersecar las diferentes cónicas.

En el prólogo de su quinto libro, Apolonio escribe:

> En este libro quinto he expuesto proposiciones relativas a los segmentos de máxima y mínima distancia. Has de saber que mis predecesores y contemporáneos solo superficialmente han tratado la investigación de las líneas de distancia mínima y solamente han probado qué líneas rectas tocan a las secciones cónicas y qué propiedades tienen en virtud de ser tangentes. Por mi parte yo he probado estas propiedades en el libro primero (sin hacer uso sin embargo en las demostraciones de la teoría de las líneas de distancia mínima). Las proposiciones en las que trato los segmentos de distancia mínima las he separado en clases y he tratado cada una con una demostración cuidadosa. También he puesto en conexión estas cuestiones con las relativas a los segmentos de distancia máxima que antes he mencionado, porque consideraba que los que cultivan esta ciencia las necesitan a fin de obtener un conocimiento del análisis y discusión de los problemas así como de su síntesis. Por otra parte, esta materia es una de esas que parecen dignas de estudio por sí mismas.

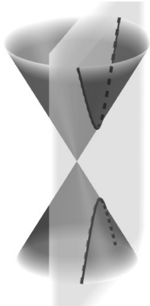
En el libro VI, dedicado fundamentalmente a la igualdad y semejanza de cónicas, aparece el siguiente interesante problema: dada la cónica y dado un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

Las proposiciones del libro VII, nuevas en su mayor parte, como Apolonio mismo señala, contienen numerosas relaciones métricas entre diámetros conjugados, áreas y otros elementos de las cónicas, dedicando el último de los libros —se supone, ya que no hay muchas referencias— a la resolución de determinados problemas relacionados con las cónicas.

En *Las Cónicas*, además de utilizar un único cono para obtener las distintas secciones cónicas, sustituyó el cono de una hoja por un cono de dos hojas, lo que facilitaba la obtención de las dos ramas de la hipérbola.

Figura 15

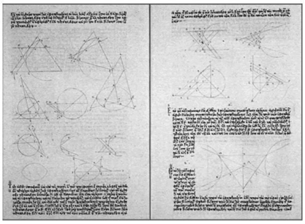
Hipérbola obtenida en un cono de dos hojas



Apolonio no solo da otro enfoque al estudio de las cónicas, sino que organiza de mejor manera todos los resultados sobre ellas, definiendo y estudiando sus elementos y estableciendo distintos métodos para su construcción.

Figura 16

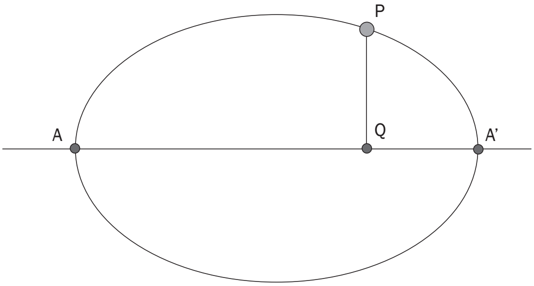
Las Cónicas de Apolonio en manuscritos disponibles en el Vaticano



Fuente: https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Apolonio3.asp.htm

A diferencia de sus predecesores, una vez obtenidas las secciones cónicas se olvida del cono, para estudiar sus propiedades, definiéndolas como lugares geométricos en el plano. Así, define como condición necesaria y suficiente para que un punto P pertenezca a una elipse el que cumpla: $PQ^2 = K\,AQ \cdot QA'$, siendo k una constante mayor que cero.

Figura 17



De manera análoga, determina condiciones para la hipérbola y la parábola.

Figura 18

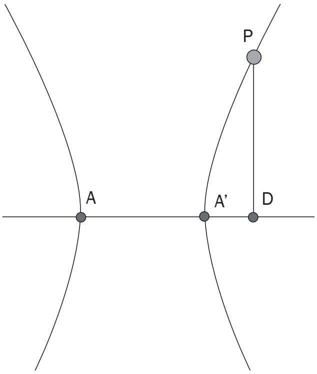
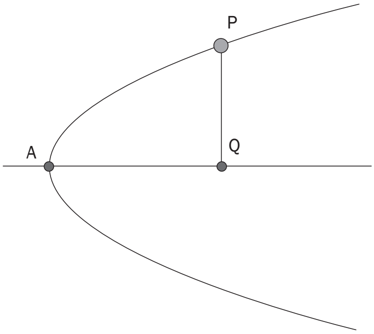


Figura 19

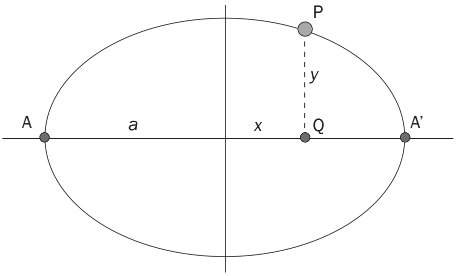


$PQ^2 = K\,AQ \cdot QA' \quad k<0$

$PQ^2 = K\,AQ$

De las expresiones anteriores, fácilmente se obtienen las ecuaciones cartesianas de cada una de las cónicas, lo que nos hace pensar que Apolonio estuvo muy cerca de descubrir la geometría analítica. Si consideramos un sistema de referencia cartesiana, coincidente con los ejes, obtendremos las ecuaciones de la elipse, la hipérbola y la parábola.

Figura 20



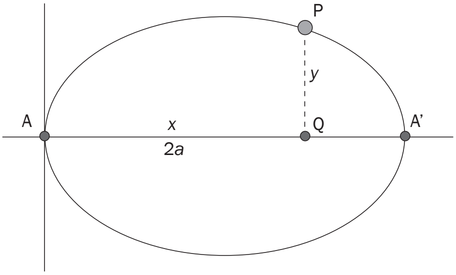
$$PQ^2 = K\ AQ \cdot QA'$$
$$y^2 = K(a+x)\cdot(a-x)$$
$$y^2 = K(a^2 - x^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 b^2 = k\ a^2$$

De manera análoga se obtendrían las ecuaciones conocidas en la actualidad para la hipérbola y la parábola.

Si en lugar de tomar este sistema de referencia, tomamos el sistema de referencia que aparece en la figura, la ecuación de la elipse se transformará en:

$$y^2 = k\ x - \frac{l\ x^2}{2\ a}, \text{ siendo } l = 2\ a\ k$$

Figura 21



$$PQ^2 = K\ AQ \cdot QA'$$
$$y^2 = K\ x\ (2a - x)$$
$$y^2 = 2akx - kx^2$$

Si llamamos $l = 2\ a\ k$, la expresión anterior se escribiría

$$y^2 = lx - \frac{l\ x^2}{2a}$$

Con sistemas de referencia similares, las ecuaciones de la hipérbola y la parábola serían:

Hipérbola $y^2 = k\ x + \dfrac{l\ x^2}{2\ a}$, siendo $l = 2\ a\ k$

Parábola $y^2 = k\ x$, siendo $l = k$

El coeficiente de x en cada una de las expresiones anteriores se denominó *latus rectum*, que geométricamente se podría interpretar como el doble de la ordenada de un foco.

Antes de continuar con la historia, mencionemos que hay otras secciones cónicas, las que dan lugar a las denominadas *cónicas degeneradas*. Con los cortes del plano y cono que aparecen en las imágenes siguientes se obtendrán como secciones un punto, una recta o dos rectas.

Figura 22

Punto como sección cónica

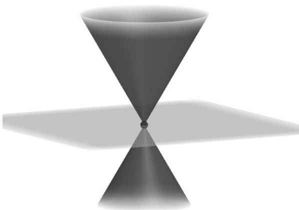


Figura 23

Recta como cónica degenerada

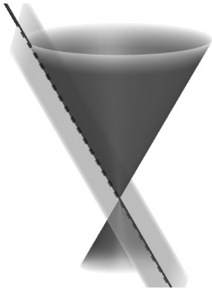
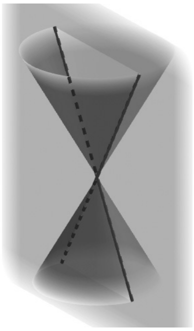


Figura 24

Dos rectas como sección cónica



Ejercicio 3. Intenta obtener rectas y puntos como secciones de un cilindro. ¿Es posible obtenerlas también como secciones de un cubo?

Fue Apolonio quien introdujo los nombres de *elipse*, *hipérbola* y *parábola*, palabras que se adaptaron de un uso anterior, quizás por los pitagóricos cuando intentaban encontrar la solución de las ecuaciones cuadráticas por el método de ampliación de áreas.

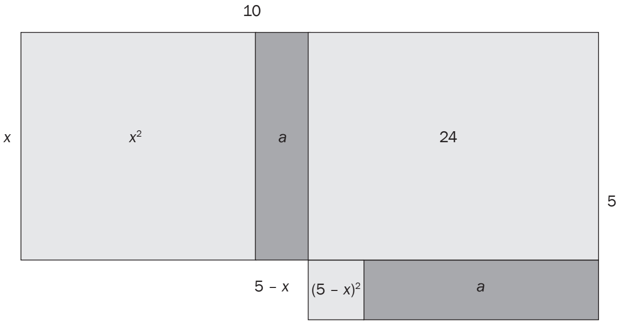
Método de ampliación de áreas

En el libro II de *Los Elementos* de Euclides (alrededor del 300 a. C.), hay distintas proposiciones que permitieron a los matemáticos utilizar un método geométrico para resolver problemas algebraicos como la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la ampliación de áreas para completar cuadrados. Exponemos este método con un ejemplo que servirá para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + c = b\,x$.

Ejemplo 2

Para resolver la ecuación $x^2 + 24 = 10x$, nos apoyamos en la siguiente figura en la que se ha completado el cuadrado cuya área es x^2, y el rectángulo $10x$ con otro cuadrado y un nuevo rectángulo, de manera que haya dos rectángulos con igual área a, para lo que se toma como medida del cuadrado el valor $b/2$, que en esta ecuación será igual a 5.

Figura 25



Descartando los dos rectángulos cuya área es $a(5-x)$, tendremos que el resto de partes del cuadrado de lado 5 será igual al área de las partes que quedarían, quitando el rectángulo a, en el rectángulo de lados 10 y x.

Por tanto:

$$(5-x)^2 + 24 = 5^2$$
$$(5-x)^2 = \pm 1$$
$$5 - x = \sqrt{1} = 1$$
$$x = 4 \text{ y } x = 6$$

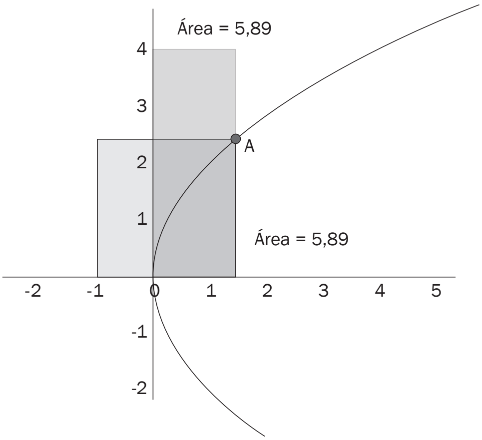
Ejercicio 4. Resuelve utilizando el método anterior, la ecuación $x^2 + 48 = 14x$.

Los nombres *elipse* ("elleipsis", insuficiencia), *hipérbola* ("hyperbola", exceso) y *parábola* ("parabole", equiparación) corresponden al resultado del cálculo y comparación del cuadrado construido sobre la ordenada de cualquier punto de la curva, que será menor, mayor o igual, respectivamente, que el rectángulo cuyos lados son la abscisa y el *latus rectum*.

Ejemplo 3

Aprovechando las posibilidades que GeoGebra ofrece, con el que hemos realizado las figuras mostradas hasta este momento, dibujamos la parábola $y^2 = 4x$, en la que de acuerdo con la definición, 4 es el valor del *latus rectum*. Para cualquier punto de la parábola dibujamos el cuadrado sobre la ordenada y el rectángulo cuyos lados sean el valor de su abscisa y el correspondiente al valor 4 anterior, que podemos observar en la figura que sus áreas son iguales.

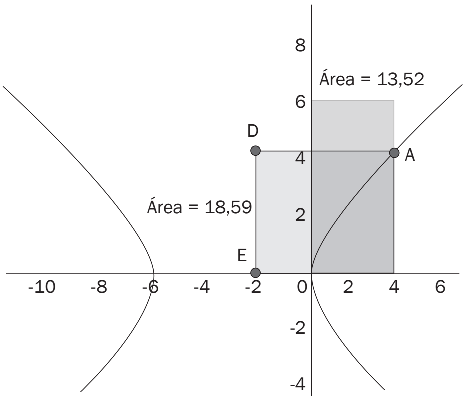
Figura 26



Ejemplo 4

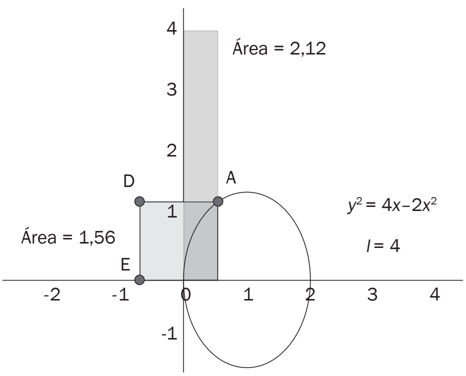
Para la hipérbola cuya ecuación es $y^2 = 6x + x^2$, en la que, de acuerdo con lo indicado anteriormente, el valor l es igual a 6, la representación del cuadrado y el rectángulo aparecen en la imagen siguiente, construida también con GeoGebra, que nos permitiría mover el punto *A* para comprobar que el área del cuadrado excede al área del rectángulo.

Figura 27



De la misma manera, podemos comprobar que en el caso de la elipse, el área del cuadrado es menor que el del rectángulo, lo que justifica los nombres asignados por Apolonio a las cónicas.

Figura 28



Ejercicio 5. Comprueba de forma analítica que se cumple la condición establecida para la parábola $y^2 = -2x$.

Como se ha indicado anteriormente, Pappus y otros estudiosos contribuyeron a la recuperación de textos griegos, con lo que ayudaron a que llegasen hasta la época actual. Los textos de Apolonio se encuentran entre los conservados, permitiendo conocer otras obras distintas de *Las Cónicas*. Estos textos tuvieron especial interés en el estudio de lugares geométricos, en particular en dos definidos por Apolonio: el lugar descrito por los puntos, tales que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante y cuyo resultado es una recta perpendicular a la recta determinada por esos dos puntos; y el lugar geométrico de los puntos, cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante y distinta de uno, dando lugar a una circunferencia, la cual se ha denominado *círculo de Apolonio*. Este nombre no parece muy acertado, ya que este lugar había sido descrito por Aristóteles.

Ejemplo 5

Aprovechando las herramientas disponibles en la actualidad, se puede utilizar GeoGebra para obtener el lugar a partir de una sencilla construcción. Sean A y B los dos puntos para los que se busca obtener el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen:

$$\frac{PA}{PB} = k, \text{ siendo } k \neq 1$$

Dibujamos los dos puntos A y B en el plano y un punto P cualquiera al que posteriormente impondremos la condición deseada para que pertenezca al lugar geométrico.

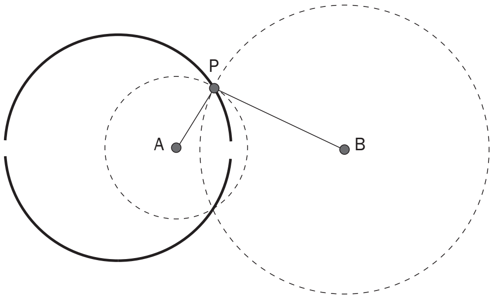
Supongamos que se desea encontrar el lugar geométrico para $k = 2$. Una vez trazado el segmento PA, se dibuja la circunferencia cuyo centro es A y pasa por P, cuyo radio será r. A continuación, se traza la circunferencia cuyo centro es B y su radio será $2r$. Los puntos de intersección de las dos circunferencias serán los que determinen el lugar geométrico que se puede dibujar

utilizando las herramientas que permiten activar el rastro y también moviendo el punto *P* por todo el plano.

Fácilmente se podrán encontrar en la web otras construcciones de este famoso círculo.

FIGURA 29

Círculo de Apolonio



El "problema de Apolonio" también aparece descrito por Pappus: dados tres elementos que pueden ser puntos, rectas o circunferencias, hay que encontrar una circunferencia tangente a los tres objetos dados.

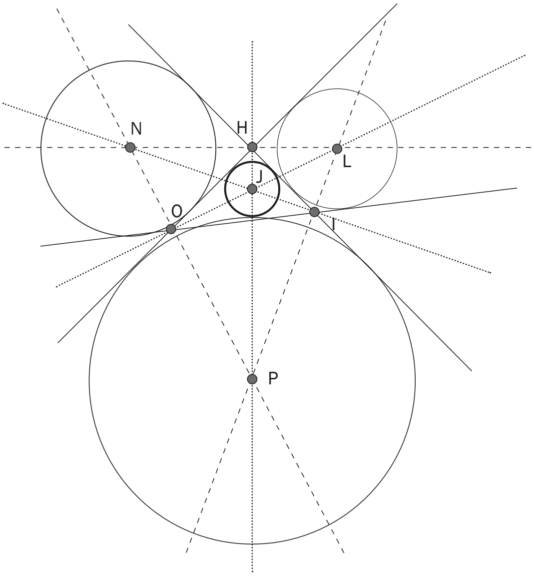
Este problema da lugar a diez casos, de los que los dos más sencillos, cuando se trata de tres puntos o de tres rectas, aparecían descritos en *Los Elementos* de Euclides. Apolonio estudió estos dos casos junto con otros seis (dos puntos y una recta; dos rectas y un punto; dos puntos y una circunferencia; dos circunferencias y un punto, dos circunferencias y una recta; un punto, una recta y una circunferencia) en el libro I de *Las Tangencias*, y los dos casos restantes (dos rectas y una circunferencia, y tres circunferencias) en el libro II. Por los trabajos de recuperación de Pappus, ya que estos textos originales se han perdido, se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y quizás Isaac Newton encontró con regla y compás la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas.

En la siguiente figura aparece la construcción de la circunferencia tangente a tres rectas. Las tres rectas determinan un triángulo, por lo que bastará con encontrar la circunferencia inscrita a dicho triángulo, para lo que es suficiente determinar el incentro como punto de intersección de las bisectrices interiores y el punto de tangencia a una de las rectas como punto de intersección con la recta perpendicular trazada por el incentro.

Como las bisectrices exteriores de dos ángulos y la bisectriz interior del otro se cortan en un punto que será el centro de la circunferencia exinscrita, bastará con determinar el punto de tangencia, como punto de intersección de la recta perpendicular por dicho punto a una de las rectas tangentes. De esta forma tendremos las tres circunferencias exinscritas, que también cumplen la condición de ser tangentes a las tres rectas.

Figura 30

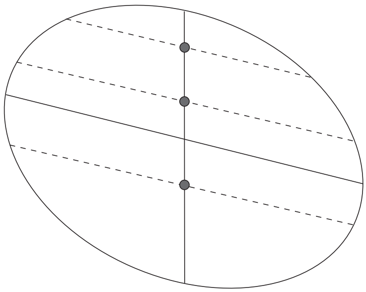
Circunferencias tangentes a tres rectas



El estudio realizado por Apolonio en su tratado sobre las cónicas es el más completo de los realizados hasta su época, en el que describe elementos y propiedades no citados hasta ese momento. Llama la atención, por otro lado, la falta de referencias a los focos, que en la actualidad constituyen un elemento fundamental en la definición de las distintas cónicas.

En dicho estudio, aparecen referencias y propiedades de los diámetros, ejes o asíntotas, demostrando que los puntos medios de las cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse o una hipérbola están situados sobre un segmento denominado *diámetro conjugado*.

FIGURA 31
Diámetros conjugados

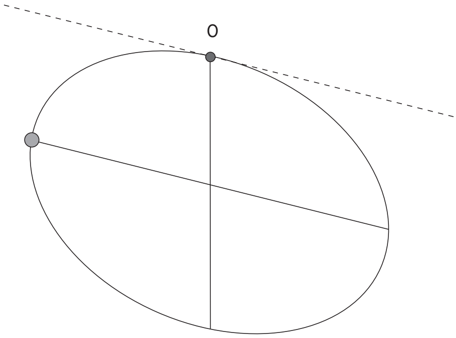


Apolonio utiliza dos diámetros conjugados como sistema de referencia para definir las cónicas, lo que le permitirá trazar tangentes por un punto de la cónica. Establece que si por el extremo de un diámetro se traza una recta paralela al diámetro conjugado, la recta tendrá un único punto en común con dicha cónica y no se podrá trazar otra entre ella y la cónica, por lo que dicha recta será tangente a la cónica.

H000 conicas (10).indd 43 08/10/20 13:45

FIGURA 32

Tangente a una elipse



Los métodos utilizados por Apolonio son muy semejantes a los planteamientos de la geometría analítica de Descartes, conocida 1.800 años después, de la que nos hemos servido para justificar de manera sencilla y gráfica algunas de las expresiones con las que representar las distintas cónicas.