



Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas



Grupo Alquerque

**José Muñoz Santonja
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
Juan Antonio Hans Martín**

Jugando con las matemáticas

**LOS JUEGOS COMO RECURSO DE ENSEÑANZA
Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO**



COMITÉ EDITORIAL

Ágata A. Timón (ICMAT)
Agustín Carrillo de Albornoz Torres (FESPM)
Manuel de León Rodríguez (ICMAT)
Serapio García Cuesta (FESPM)

COMITÉ ASESOR

David Martín de Diego (ICMAT)
Juan Martínez-Tébar Giménez (FESPM)
Onofre Monzó del Olmo (FESPM)

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

© JOSÉ MUÑOZ SANTONJA, ANTONIO FERNÁNDEZ-ALISEDA
REDONDO Y JUAN ANTONIO HANS MARTÍN, 2020

© FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES
DE MATEMÁTICAS (FESPM), 2020
SERVICIO DE PUBLICACIONES
AVDA. DE LA MANCHA S/N
02006 ALBACETE
WWW.FESPM.ES

© INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (ICMAT), 2020
NICOLÁS CABRERA, N° 13-15
CAMPUS DE CANTOBLANCO, UAM
28049 MADRID
WWW.ICMAT.ES

© LOS LIBROS DE LA CATARATA, 2020
FUENCARRAL, 70
28004 MADRID
TEL. 91 532 20 77
WWW.CATARATA.ORG

JUGANDO CON LAS MATEMÁTICAS.
LOS JUEGOS COMO RECURSO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE
MATEMÁTICO

ISBN: 978-84-9097-989-1
DEPÓSITO LEGAL: M-14.941-2020
THEMA: PDZ/PB

ESTE LIBRO HA SIDO EDITADO PARA SER DISTRIBUIDO. LA INTEN-
CIÓN DE LOS EDITORES ES QUE SEA UTILIZADO LO MÁS AMPLIA-
MENTE POSIBLE. QUE SEAN ADQUIRIDOS ORIGINALES PARA PERMI-
TIR LA EDICIÓN DE OTROS NUEVOS Y QUE, DE REPRODUCIR PARTES,
SE HAGA CONSTAR EL TÍTULO Y LA AUTORÍA.

Índice

Introducción 9

Capítulo 1. Los dados, un complemento
imprescindible en muchos juegos 17

Capítulo 2. Dominós y cartas, unos juegos
muy tradicionales 39

Capítulo 3. Juegos de lápiz y papel 65

Capítulo 4. Puzles 83

Epílogo 105

Bibliografía 107

Introducción

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y la belleza?”

MIGUEL DE GUZMÁN

El juego es una actividad inherente al ser humano desde la antigüedad. Al cubrir sus necesidades más perentorias y convertirse en sedentaria, la humanidad tuvo tiempo libre para dedicar a otros menesteres distintos de la supervivencia. Así aparecieron materiales elaborados que les facilitaban el trabajo, y se potenciaron tanto las ciencias como las artes. En ese contexto también surgieron los juegos.

Hay muchas leyendas, normalmente sin documentar, sobre el nacimiento del juego; por ejemplo, Platón atribuía su invención al dios egipcio Thot, encargado, entre otras, de la música, la sabiduría o la escritura.

El primer juego, que se podría llamar *de mesa*, del que se tiene constancia física, gracias a las excavaciones realizadas en la antigua Mesopotamia (actual Irak) es el juego real de Ur, cuya creación se sitúa antes del 2600 a. C. Pero hay referencias pictóricas en tumbas egipcias, datadas un siglo antes, de la reina Nefertiti jugando al senet, un juego de tablero. Incluso se han encontrado piezas con varios siglos más de antigüedad en Irán, que podrían tener un componente lúdico, aunque no se ha podido determinar su uso preciso.

Los primeros juegos serían seguramente infantiles y primarían los aspectos físicos: saltos, carreras, luchas, etc. Poco después aparecieron juegos donde se manejaban materiales

simples, con una distribución determinada en forma de tablero.

Una referencia imprescindible es el *Libro de los juegos* o *Libro de ajedrez, dados y tablas*, encargo de Alfonso X el Sabio (1221-1284), rey de Castilla, León y Galicia. En su prólogo se destacan las ventajas de los juegos que se desarrollan sentados sobre los que se hacen a pie o a caballo, pues pueden practicarlos todo tipo de personas: hombres y mujeres, viejos y jóvenes, libres y cautivos, en tierra o mar, de noche o de día, con buen o mal tiempo. Dichos juegos son los que nosotros conocemos como *juegos de mesa*.

Muchos de los primeros juegos reproducían actividades cotidianas como carreras o escenas de caza, pero también batallas, como en el caso del ajedrez, o incluso las faenas de la siembra, como en los juegos africanos del tipo *kalah*, que se practican haciendo agujeros en la tierra donde se colocan semillas que sirven como fichas del juego. Así, los juegos servían para aprender procedimientos y actitudes útiles para desenvolverse en sociedad. Lo mismo ocurre hoy: cualquier juego nos obliga a respetar al contrario, a seguir unas normas, a plantear estrategias, a estudiar alternativas, a tener autonomía e iniciativa personal y muchas más competencias que nos preparan para una vida fuera del juego. Los juegos estimulan muchos aspectos sociales y personales como la confianza en nuestras posibilidades, el trabajo en equipo, la comunicación, la obligación de seguir unas reglas previas, el aprender a aceptar el fracaso y reconocer el éxito del contrario, el desarrollo de la inteligencia, la potenciación del pensamiento lógico, etc.

Juegos y educación

En el contexto de la educación formal, la relación con el juego es también muy importante. Como dice el profesor Luis Ferrero de Pablo (1991): “El juego tiene un enorme valor educativo. Desde el punto de vista didáctico, los juegos favorecen

que los escolares aprendan a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, ayudan a desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar”.

El proceso de aprendizaje está muy relacionado con el juego en los primeros años educativos. En las escuelas es normal que los pequeños aprendan comportamientos, actitudes y contenidos mediante el juego. Pero según se avanza en el mundo educativo, los juegos se van arrinconando hasta que llegan a desaparecer, cuando no son denostados por considerar que los aspectos lúdicos están reñidos con la seriedad que debe prevalecer en la enseñanza. Sin embargo, lo contrario a lo divertido es lo aburrido, no lo serio, como dijo el escritor británico G. K. Chesterton. Se puede aprender de una forma rigurosa y seria mientras uno se divierte con un juego.

A finales de la década de los setenta del pasado siglo, se elaboró para Inglaterra y Gales *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft*, que pretendía dar pautas para la enseñanza de las matemáticas en primaria y secundaria en la siguiente década y preparar al alumnado para incorporarse a la vida social y laboral. En su punto 227 dice: “Sea cual fuere su nivel de conocimientos, el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y juegos matemáticos puede contribuir a clarificar las ideas del programa y a desarrollar el pensamiento lógico”.

Tipos de juegos matemáticos

Hay muchos ejemplos de la relación entre las matemáticas y los juegos a lo largo de la historia: el fundamento teórico de la probabilidad nació para dar respuesta a problemas planteados en los juegos de azar; la teoría de grafos surgió a partir del estudio de los paseos por los puentes de Königsberg; o los trabajos del matemático John Nash (1928-2015), que aplicaban la teoría de juegos desarrollada por Von Neumann a la economía y que le valieron el Premio Nobel de Economía.

De una forma general, podemos considerar que los juegos, desde el principio de la historia, podrían dividirse en dos grandes bloques: los que dependen del azar y aquellos que se basan en la estrategia que planteen los jugadores.

En el *Libro de ajedrez, dados y tablas* ya citado, se cuenta una leyenda en la que un rey de India, en una discusión sobre si era más importante la suerte o el razonamiento, encargó a diversos sabios que investigaran sobre el tema. Cada uno le presentó un juego distinto: el primero, el ajedrez; otro, un juego de dados; y el tercero, una mezcla de los dos, que combinaba los dados con un tablero de juego. Esta clasificación corresponde a los juegos de estrategia, de azar y de tablero, precisamente los tres aspectos que trata Alfonso X en su libro.

Consideramos que los juegos de azar son aquellos en los que la jugada depende de una serie de elementos aleatorios (dados, monedas, cartas), que influyen en el paso posterior que se debe realizar. El azar impone que el jugador deba tomar decisiones que afectan al desarrollo y desenlace del juego, como dicen en su libro Francisco Hernán y Elisa Carrillo (1989).

Por otro lado, los problemas de estrategia están íntimamente relacionados con la resolución de problemas, aspecto que es la espina dorsal de las matemáticas. George Pólya (1887-1985), impulsor de la resolución de problemas desde finales de los años cincuenta del siglo pasado, decía que no es raro que todos los textos matemáticos, empezando por el papiro de Rhind, del siglo XVI a. C., presenten problemas, pues “los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática”. Así, en la década de los ochenta del siglo pasado, el National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos indicó que la resolución de problemas debía ser el primer objetivo de la enseñanza matemática.

Un problema es una situación nueva que no podemos resolver aplicando un resultado que conozcamos de casos anteriores. Son situaciones en las que debemos elegir diversos procedimientos para afrontar su resolución, aplicar nuestros conocimientos y relacionarlos de forma similar o diferente con

otras situaciones a las que nos hemos enfrentado anteriormente. Esto es interesante para la didáctica, ya que, según Hernán y Carrillo, “aprender a tomar decisiones tiene consecuencias beneficiosas tanto para la resolución de problemas de matemáticas como para un inmenso número de situaciones de la vida”.

Aunque a veces el profesorado de matemáticas es reticente a utilizar estos juegos al no estar relacionados con los contenidos del currículo de Matemáticas, tienen en realidad un interés alto, pues en la búsqueda de estrategias se utilizan los mismos procedimientos aplicados en la resolución de problemas. Estas técnicas, que se conocen como *heurísticas*, no son innatas, sino que hay que aprenderlas y practicarlas, lo que puede hacerse con el juego.

Otra clasificación de los juegos, ya con fines de educación matemática, es la de Fernando Corbalán (1994). En ella se consideran tres grandes bloques. El primero son los *juegos de procedimiento conocido*: aquellos cuya dinámica y reglas ha conocido el alumnado fuera de la escuela. Nos referimos a juegos de cartas, dominó, dados, parchís, oca, rompecabezas, etc. Son juegos que antes se aprendían en el ámbito familiar en tardes de estío, o cuando el mal tiempo invernal impedía realizar otro tipo de juegos al aire libre. Últimamente, estos juegos han sido sustituidos, en gran medida, por los juegos *online* que facilitan las nuevas tecnologías.

Podemos usar juegos del mismo tipo o similares para trabajar distintos conceptos matemáticos. Jugando a la escoba con las cartas podemos practicar las tablas de la suma o al contar puntos con los dados podemos repasar algunas tablas de multiplicar. También podemos encontrar este mismo tipo de juegos pero modificados, donde se han cambiado los materiales introduciendo contenidos matemáticos. Por ejemplo, un bingo en el que para seleccionar el número a tachar hay que realizar una operación previa. O un dominó, donde en lugar de puntos haya figuras geométricas.

El segundo bloque serían los *juegos de conocimiento*, con juegos donde se trabajan contenidos curriculares. Aunque algunos

están creados para trabajar determinados ítems, muchos de ellos pueden adaptarse con facilidad a los diferentes contenidos y niveles educativos.

Y un tercer bloque lo conformarían los *juegos de estrategia*. En estos juegos, a veces nos encontramos con elementos matemáticos, pero otras veces no están tan claramente presentes. Por ejemplo, en el juego del nim, donde hay que quitar fichas o palillos de una determinada distribución, no se ve a simple vista la presencia de las matemáticas, pero la estrategia ganadora se basa en el sistema de numeración binario.

En este libro hemos querido hacer una clasificación más heterodoxa y hemos agrupado los juegos según los tipos de materiales o estructura que han presentado a lo largo de la historia. Este enfoque no es nuevo, pues ya en el *Libro de ajedrez, dados y tablas* se planteó una organización siguiendo esta idea.

Pero la clasificación de juegos nunca puede ser estricta, puesto que podemos encontrar algunos que utilizan dados o tableros y que, sin embargo, son de estrategia, por lo que hay juegos que podrían aparecer en varios capítulos.

Llevar el juego al aula

Desde el punto de vista didáctico, llevar los juegos al aula requiere una serie de recomendaciones para que el aprovechamiento sea el mejor posible.

La primera es que el juego no debe ser una actividad extra utilizada al final de un ciclo educativo. Los juegos no deben ser un pasatiempo para el final de trimestre cuando, tras los exámenes, no queremos comenzar a impartir nuevo temario. Los juegos deben ser un conjunto de actividades diseñadas y aplicadas para conseguir unos determinados objetivos educativos. Por ello, han de estar integrados en los programas escolares y formar parte de las actividades cotidianas del aula.

Es normal que las primeras veces que se llevan al aula los profesores perdamos un poco el control férreo que tenemos,

dueños de la tiza y de la pizarra, pero a medida que se incorporan al curso habitual de la clase, los alumnos se acostumbran a esa metodología y el proceso se hace más fácil y fructífero.

Los juegos son una actividad que suele gustar al alumnado, por lo que tampoco es preciso animarlos a que la practiquen. Pero es importante que este tipo de actividad no consista solo en jugar. Lo más valioso didácticamente es el estudio posterior. Tras atraer su atención y fomentar su interés por el juego, se les debe plantear que estudien las matemáticas que los fundamentan y que busquen una estrategia que les permita tener más posibilidades de ganar al contrario, algo que realmente sirve de estímulo para su estudio posterior.

Tras jugar, es fácil plantear situaciones sobre las normas que tienen algunos juegos o por qué se aplican de ese modo. Por ejemplo, si observamos el juego de cartas del póker, debemos suponer que si una “mano” gana a otra es porque la ganadora es más difícil de conseguir que la que pierde, lo que nos lleva a estudiar cuál puede ser la probabilidad de cada una de ellas. Incluso podemos plantear la situación al revés. Si tenemos un determinado juego con distintas posibilidades, se puede estudiar qué jugada debe ganar a otra a través del estudio de sus posibilidades.

Pero se puede ir más allá proponiendo a los alumnos que se inventen juegos o modifiquen las reglas o los elementos que formen parte de ese juego. Por ejemplo, después de jugar a un dominó o de reconstruir un puzzle y explicarles cómo se diseñan y construyen esos juegos, se puede proponer al alumnado que elijan los conceptos que van a aparecer y animarles a que construyan su propuesta para que la jueguen y prueben sus compañeros. Es una forma ideal de conocer realmente cuáles son los conocimientos de los alumnos, pues en su diseño aparecen aquellos conceptos que dominan.

Hay que tener presente que los juegos, como cualquier otro recurso didáctico, tienen sus limitaciones. Su abuso hace que pierda su capacidad de motivación. Somos partidarios de incorporarlos a clase alternándolos con otros recursos como

audiovisuales, teatro, papiroflexia, recortes de prensa, geometría dinámica, etc.

Otro aspecto emocional importante de los juegos es el aumento de la autoestima y la satisfacción en el alumno que, debido al azar inherente a muchos de los juegos, consigue ganar a otro compañero que, por sus conocimientos, aptitudes o trabajo, suele superarlo normalmente.

Juegos como divulgación de las matemáticas

Los juegos pueden ser una actividad muy indicada para acercar al público general, sin grandes conocimientos en matemáticas, a la materia. Con ellos se puede comenzar a disfrutar de las matemáticas, arrancando con una partida concreta que quizás pueda llevar posteriormente a estudios más profundos al desear perfeccionar nuestro juego.

Basta pensar en la gran atracción que ejercen los distintos tipos de sudokus para todo tipo de público. Aunque en ellos no haya que aportar grandes conceptos matemáticos, es importante que se lleve adelante la estrategia de resolución.

En las siguientes páginas desarrollaremos una serie de juegos matemáticos atractivos para participar y que permiten hacer estudios posteriores para ahondar en el proceso de investigación matemática. No hemos pretendido ser exhaustivos, ya que la limitación del formato de este libro nos impide abordar los miles de juegos disponibles actualmente, algunos de los cuales podemos encontrar en las referencias bibliográficas al final de este volumen. Solo queremos dar una pincelada de las posibilidades lúdicas y didácticas que plantea la utilización de juegos, tanto desde el punto de vista de disfrute personal como en el aula de matemáticas.

Capítulo 1

Los dados, un complemento imprescindible en muchos juegos

En su forma tradicional, un dado es un objeto de forma cúbica que muestra un resultado aleatorio (del 1 al 6) al lanzarlo sobre una superficie horizontal. El dado es un elemento primordial para acercarse al azar y aparece en multitud de juegos cotidianos.

Desde el inicio de su existencia, el ser humano ha estado fascinado por el azar y ha buscado adivinar lo que le deparaba el destino utilizando piedras, conchas de moluscos, cáscaras de nuez, huesos de frutas o incluso huesos de animales. Los huesos son precisamente un predecesor del dado. En concreto, las tabas, un pequeño hueso llamado *astrágalo* que se encuentra en el tarso. La posibilidad de que al lanzar la taba pueda quedar apoyada de cuatro formas diferentes es lo que le da su aleatoriedad y lo que ha hecho que se utilizaran regularmente en juegos de distintos tipos.

Estos elementos aleatorios, incluyendo los dados, se usaban en prácticas ocultas y por adivinos. Por ejemplo, en las ciencias esotéricas, se suele relacionar el dodecaedro con los doce signos del zodiaco chino.

Los juegos de dados

Los dados se consideran el primer juego de azar de la historia. El poeta griego Sófocles, del siglo V a. C., atribuyó la invención del juego, junto con la del ajedrez, al soldado y héroe griego Palamedes de Argos que según el relato mitológico murió en el sitio de Troya. Más allá de este mito, otros autores indican la aparición del juego de dados en Egipto, donde se jugaba a una versión similar a la llamada *craps*, el juego típico de los casinos. Se tiene constancia de la existencia de dados en tumbas egipcias fechadas alrededor del 2000 a. C. Sin embargo, se considera que el más antiguo es el hallado en unas excavaciones en la antigua Persia, actual Irán, con más de 5000 años de antigüedad.

Aunque los dados más comunes tienen forma cúbica, desde la antigüedad se han utilizado otras formas. El juego real de Ur, del que ya hablamos en la introducción, dispone de dados piramidales con cuatro caras. En el siglo XIX se descubrió un dado con forma de icosaedro de 20 caras, datado del siglo IV a. C.

En la Edad Media, los dados estaban extendidos por toda Europa. Cuentan que el juego de dados era corriente entre los soldados que participaban en las cruzadas. Solían jugarlo en una fortaleza de nombre Azart, de donde derivaría el término *hazart*, que se convertiría en el término inglés *hazard*, que significa ‘riesgo’. El paso al término *azar* parece evidente. Una palabra que suena de un modo muy parecido a *azahar*, ‘flor del naranjo’. Y no es casualidad, porque ambas provienen de la misma palabra árabe, *zahr*, ‘flor’, por la flor que los árabes pintaban en una de las caras de sus dados.

A comienzos del siglo XVII se jugaba a los dados en todas las tabernas o posadas de Europa. De hecho, por su amplia implantación, aparecieron leyes prohibiendo su práctica, pues se consideraba peligroso y dañino.

La configuración de los dados

Se ha comprobado, por los hallazgos en excavaciones, que en la Antigua Roma los dados no estaban bien contruidos, es decir, no había la misma probabilidad de obtener cada una de las caras. Al parecer, a los usuarios no les preocupaba este hecho, pues pensaban que los resultados dependían del deseo de los dioses, por lo que al depender el resultado de la providencia no importaba realmente la forma o la construcción del objeto en sí.

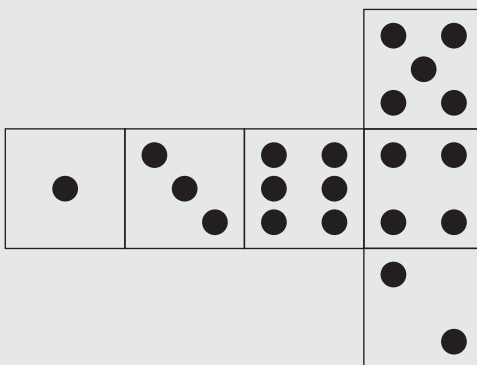
Hasta el Renacimiento no se construyeron dados considerados *justos*. Fue a partir de los estudios sobre probabilidad de Galileo Galilei (1564-1642) y Blaise Pascal (1623-1662) cuando se comienza a tener cuidado en su construcción, de forma que todos los resultados sean igual de probables.

La disposición de los números en sus caras puede seguir muchas distribuciones diferentes, pero hay dos de ellas que se han utilizado, de forma mayoritaria, a lo largo de la historia.

Ejercicio 1. Investiga todas las posibles formas de distribuir los números del 1 al 6 en un dado. Puedes utilizar el desarrollo plano de un cubo tal como se ve en la figura 1, pero asegúrate de que al construir el dado siempre se obtengan configuraciones diferentes.

FIGURA 1

Desarrollo plano de un dado



En el Antiguo Egipto y Mesopotamia se usaba la llamada *configuración primo*. En ella siempre había al menos un número primo en cada par de caras opuestas. Así, en la cara opuesta al 1 iba el 2, a la del 3 el 4 y la del 5 se oponía a la del 6.

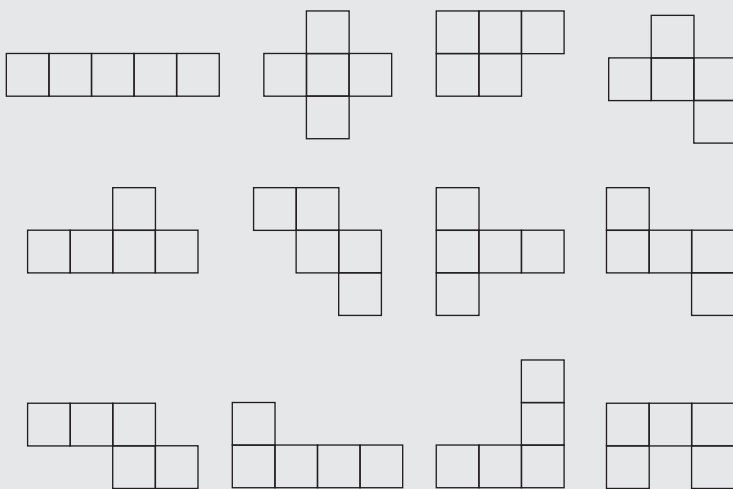
La actual es la *configuración de 7*, que ya aparece en el *Libro de Ajedrez, dados y tablas*, donde se explica la construcción correcta de los dados y cómo distribuir los valores de forma que las caras opuestas siempre sumen 7: frente al 1 se encuentra el 6; frente al 2 el 5 y se emparejan el 3 y el 4.

La construcción estándar de los dados organiza las caras de manera que en el vértice donde coinciden las caras con los valores 1, 2 y 3, estos estén colocados en sentido contrario a las agujas de un reloj.

Ejercicio 2. El desarrollo plano de un cubo está formado por seis cuadrados unidos unos a otros, por un lado común (figura 2). Esos objetos se llaman *hexaminós*. Hay un total de 35 hexaminós: encuéntralos todos. Como ayuda te presentamos los pentaminós, formados por cinco cuadrados. Debes añadir a cada uno de ellos un nuevo cuadrado en todos los lugares posibles y descartar las figuras que aparezcan repetidas.

FIGURA 2

Los 12 pentaminós

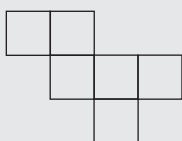


Ejercicio 3. De los 35 hexaminós, solo 11 de ellos permiten construir un cubo al plegar la figura por los lados que unen los cuadrados. Encuentra los 11 hexaminós que cumplen esta propiedad.

Ejercicio 4. Elige uno de los hexaminós, por ejemplo el de la figura 3, y coloca en sus caras los puntos desde 1 hasta 6, para que al reconstruir un cubo quede un dado que sea válido según las normas de la configuración de 7.

FIGURA 3

Hexaminó que corresponde al desarrollo plano de un cubo

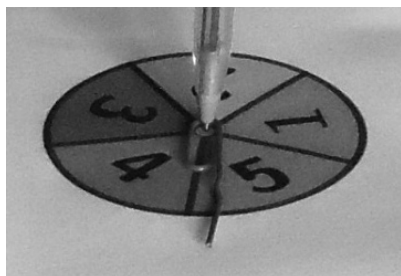


Desde la antigüedad, la forma más habitual de los dados ha sido el cubo con los valores del 1 al 6. Pero no ha sido la única. Hoy día se han puesto de moda los dados poliédricos para utilizarlos en los juegos de rol, con la ventaja de que la mayoría tienen más caras y, por tanto, más resultados. En estos dados tenemos los cinco poliedros regulares: tetraedro (cuatro caras), hexaedro (cubo de seis caras), octaedro (ocho caras), dodecaedro (doce caras) e icosaedro (veinte caras). Se suele añadir un dado de diez caras, una bipirámide pentagonal, que, aunque no es realmente un poliedro regular, permite conseguir un número aleatorio entre 1 y 10.

En algún juego usaremos esos dados. Aunque están comercializados y son fáciles de conseguir, siempre se pueden sustituir por ruletas. Basta dividir un círculo en las partes que se quiera (todas ellas iguales) y con un lápiz y un clip abierto se puede simular perfectamente una ruleta. Así podemos crear “dados” que no se pueden encontrar en otras formas. Por ejemplo, en la imagen podemos ver una ruleta con cinco valores.

FIGURA 4

Ruleta con cinco valores



Juegos con dados normales

En este primer bloque vamos a incluir juegos con los dados usuales. El primero es un juego tradicional que se juega con dados de póker. Aquí trabajaremos con los dados numéricos.

Juego 1

Acumulando puntos

Se juega con cinco dados cúbicos y un cubilete. Es aconsejable jugar en grupos de tres o cuatro jugadores.

Cada jugador dispone de una tabla donde ir anotando la puntuación obtenida y que incluye seis categorías correspondientes a los seis resultados posibles del dado. La dinámica del juego es la siguiente:

1. Cada jugador, en su turno, hará tres tiradas con los dados.
2. Tras la primera tirada debe elegir cuál de las seis categorías va a seleccionar (que no puede haber escogido en los turnos anteriores), por ejemplo, el 5, y separa todos los dados en los que tenga esa puntuación.
3. Vuelve a lanzar los dados otras dos veces y sigue separando, en cada ocasión, los dados en los que ha aparecido la categoría elegida y tirando los restantes.

4. Al final, calcula la puntuación obtenida con los dados separados, la anota en su tabla y así sucesivamente.
5. Una vez completadas las tablas de todos los jugadores, gana el que ha obtenido más puntos al sumar las puntuaciones de todas las categorías.
6. Si en algún momento de las dos primeras tiradas el jugador consigue los cinco dados con el valor deseado, llamado *tiro servido* , en la siguiente jugada vuelve a tirar todos los dados y sigue acumulando los puntos que obtenga.

Con este juego podemos practicar o repasar las tablas de multiplicar. Si aún no se han explicado, en lugar de multiplicar el número de dados por su valor, se pueden sumar la cantidad de valores obtenidos en los dados apartados.

Lo usual es usar cinco dados, pero puede variarse la cantidad según nos interese, aunque no resulta rentable manejar un número excesivo de dados como nueve. Para poder abarcar la tabla completa se puede considerar que cuando salga el 1 equivale al 7, por lo que se tendrán las categorías del 2 al 7 y se puede repasar una tabla más. También podemos utilizar otros dados poliédricos con mayor puntuación, por ejemplo, dados con ocho o diez caras para practicar más tablas aparte de las seis primeras.

Juego 2

Par o impar

Es un juego para dos jugadores, se necesitan dos dados cúbicos y un papel para anotar. Se fija una serie de jugadas o un tiempo determinado para que acabe la partida.

Uno de los jugadores elige la opción par y el otro la opción impar. Si no se ponen de acuerdo, lanza cada uno un dado y el que obtenga mayor puntuación es el primero en elegir y el primero en comenzar a jugar.

Cada jugador, en su turno, lanza los dos dados y suma los valores obtenidos. Si obtiene un valor que corresponde con la

opción elegida (par o impar), se anota un punto; si no, no se anota nada. En ambos casos pasa el turno al contrario. Gana el que tenga más puntos al finalizar el juego.

Lo más interesante de este juego es el estudio posterior de las posibilidades que tiene cada jugador de ganar, que se plantea en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5. ¿Es un juego equitativo o justo? Es decir, ¿tienen los dos jugadores las mismas posibilidades de ganar?

Para estudiar todas las opciones, hay que dejar bien claro que al lanzar dos dados podemos obtener tanto el par de números 1 y 6 como 6 y 1 y hay que considerar las dos posibilidades de forma independiente.

Una vez practicado y estudiado el juego se pueden presentar variantes. Por ejemplo, ¿es un juego justo si en lugar de sumar le restamos al mayor valor el menor? El siguiente paso es plantear qué ocurre si la operación que hacemos con los dados es la multiplicación. Con dos o tres partidas se observa, de forma empírica, que la opción par sale más veces que la impar. De todos modos, conviene estudiar los resultados para realizar el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6. Si queremos que el juego sea justo con el producto, ¿qué puntuación debería asociarse a obtener par o impar al lanzar los dados y multiplicar los valores obtenidos?

Si se juega en grupos de cuatro o cinco personas, cada jugador elige la opción par o impar y se juega tal como se ha descrito.

Juego 3

Operaciones con tres dados

Es un juego de dos a cinco jugadores. Se necesitan tres dados cúbicos, papel y lápiz para hacer las operaciones y llevar la puntuación de cada jugador.

Cualquiera de los jugadores lanza los tres dados sobre la mesa y todos los jugadores realizan un cálculo con los tres valores y dos de las operaciones aritméticas, de forma que se obtenga un número entero, lo más grande posible.

El jugador que obtiene el mayor resultado del cálculo se anota un punto. Por ejemplo, si al lanzar se obtiene 2, 3 y 6, se podrían conseguir los valores $(2 + 3) \cdot 6 = 30$; $3 \cdot 6 + 2 = 20$; $(6 + 2) \cdot 3 = 24$. Si varios jugadores llegan al máximo valor,

todos se anotan el punto. Tras varias partidas, gana el jugador que obtenga más puntos.

Es importante que se escriban las operaciones que han llevado al resultado que han obtenido, cumpliendo la jerarquía de operaciones y utilizando paréntesis si es necesario.

Otra opción es que gana el punto el que obtenga el menor resultado, con lo que aparecen números negativos que siempre presentan más complicaciones para ordenar adecuadamente.

En este juego pueden participar grupos grandes. Una persona lanza los dados e indica al resto los valores obtenidos. Los que consiguen mayor resultado tienen que presentar su solución al grupo. Si a algún jugador se le ocurre un cálculo mayor, una vez presentado el resultado, se anota dos puntos. En todos los casos suponemos que la operación presentada es correcta.

Veamos otras versiones:

1. Cada jugador lanza los tres dados y realiza un cálculo con los tres valores y dos operaciones. Los jugadores van sumando los resultados que obtienen en cada tirada, y gana el primer jugador que llega, por ejemplo, a los 1.000 puntos.
2. Se puede jugar con tablero de números, de forma que cada jugador lanza los tres dados y realiza las operaciones para conseguir uno de los valores que esté libre del tablero, donde coloca una ficha. Cada jugador dispone, por ejemplo, de cinco fichas y gana el primero que coloca todas las fichas sobre el tablero. En esta versión es conveniente que jueguen por parejas. Un ejemplo de tablero puede ser el siguiente.

FIGURA 5

Ejemplo de tablero para operaciones con tres dados

2	3	6	8	11
14	17	18	22	25
27	30	32	35	40
42	45	46	48	50

El tablero puede contener números más pequeños, por ejemplo, los números del 1 al 20 y se pueden simplificar las condiciones. Se puede proponer conseguir los números con dos o tres valores de los dados. Así, si se utilizan solo dos dados, se anotan un punto y con los tres, se anotan dos puntos. El tablero también puede ser rellenado por los propios jugadores.

Otra versión sería con un dado icosaédrico y tres cúbicos. Se lanzan los cuatro dados y con lo obtenido en los tres cúbicos hay que obtener el resultado del de 20 caras. Sería equivalente al ejemplo anterior, pero complicándolo con el azar, pues deben conseguir lo obtenido en el dado. También podemos usar una ruleta donde añadimos los números que queramos.

Otra posibilidad es que al lanzar tres dados los jugadores deben conseguir todos los resultados posibles utilizando los valores obtenidos. Los jugadores se anotan medio punto por cada resultado correcto conseguido y se le resta medio punto por cada resultado erróneo que el contrario detecte. Otra forma es anotarse un punto por cada resultado correcto que no tenga el contrario.

Ejercicio 7. Hemos lanzado tres dados y hemos obtenido los valores 3, 4 y 6. Encuentra todos los resultados posibles que podemos conseguir con esos valores y dos operaciones cualesquiera. Se deben utilizar paréntesis para romper la jerarquía de operaciones.

En todos los juegos podemos ampliar las opciones, añadiendo a las operaciones la potencia y la radicación, teniendo claro que si utilizamos una raíz, el índice de la raíz debe ser uno de los números que aparezcan en los dados.

Juego 4

En busca de los divisores

Se trata de un juego para dos jugadores. Se necesitan dos dados cúbicos, papel para hacer operaciones y anotar la puntuación obtenida.

La dinámica del juego es la siguiente:

1. Cada jugador, en su turno, lanza los dos dados. El jugador forma un número de dos cifras colocando los valores obtenidos en los dados en el orden que desee. Una vez elegido el orden no puede cambiarlo.
2. El jugador halla todos los divisores de dicho número, menores que él mismo, y los suma. El resultado obtenido se lo anota en su puntuación personal y pasa el turno al contrario.
3. Si el otro jugador, antes de lanzar los dados, descubre otro divisor que se le hubiese pasado al primer jugador, puede añadirlo a su propio contador. Posteriormente lanza los dados y repite el proceso.
4. Gana el primer jugador que llega al número de puntos que se fije como meta, por ejemplo, 300.
5. Si el número que forma un jugador es primo, en esa jugada solo puede anotarse un punto.

Como vimos antes, se puede plantear el mismo tipo de actividad añadiéndole un tablero y modificando un poco la dinámica.

Necesitamos dos dados cúbicos, varias fichas de color distinto para cada jugador y el tablero siguiente.

FIGURA 6

Tablero del juego de números primos

3	2	5	5	3	7	11
5	7	3	3	13	5	2
11	2	2	2	5	2	3
5	5	3	7	2	3	13
2	7	2	11	5	3	2
7	2	17	5	3	7	3
5	11	3	5	2	19	7

El jugador, en su turno, lanza los dos dados y forma un número de dos cifras, por ejemplo, 36. Escoge un primo que sea divisor de dicho número, por ejemplo el 3, y coloca una de sus fichas en una casilla que contenga el 3. Se queda con el cociente de la división $36 : 3 = 12$ y busca otro divisor, por ejemplo el 2, coloca su ficha en una casilla con un 2, y continúa con el cociente, $12 : 2 = 6$, mientras pueda colocar fichas.

En la versión original (del Grupo Cero de Valencia¹), se trabaja con un solo dado que se lanza dos veces, la primera tirada corresponde a las decenas y la segunda a las unidades del número formado. Si el jugador se da cuenta de que es primo, puede lanzar otra vez. Si intenta buscar divisores, siendo primo, pierde el turno. Si el jugador dice que es primo y el contrario advierte que no lo es, el contrario puede rellenar casillas con todos los divisores que obtenga del número antes

1. Grupo de profesores de bachillerato que surgió en Valencia a finales de los años setenta y comenzó la revolución de la didáctica en nuestro país.

de pasar a su turno. Nosotros preferimos que se lancen dos dados y que el jugador decida qué número forma. En ese caso, si forma un número primo, pierde el turno.

Nuestro método de juego es que cada jugador tenga un número determinado de fichas y gana el primero que se quede sin ellas. Esto obliga a que deba tener presente, de los dos números que puede formar, cuál es el que tiene mayor número de divisores primos. Otra opción es que gane el primero que consiga que cinco de sus fichas estén en línea recta en casillas contiguas, sea horizontal, vertical o diagonalmente.

El tablero se puede modificar ampliándolo o reduciéndolo o cambiando los valores. O jugar con dados con mayor número de caras, ya que el 19 es imposible que sea divisor de ningún número formado por dos dados de seis caras, con la numeración usual del 1 al 6.

Juego 5

Elige la fracción

Es un juego para varios jugadores. Se juega con dos dados, o uno que se lanza dos veces. El primer dado será el numerador y el segundo el denominador, pero en este segundo se considera el doble del valor obtenido, es decir, si sale un 4 se toma el valor 8. Así, por ejemplo, si un jugador lanza los dos dados y obtiene en el primero un 4 y en el segundo un 5. Como este segundo lo dobla, obtiene la fracción $4/10$, que simplificada es $2/5$.

Antes de comenzar a jugar, cada jugador elige una fracción simplificada de entre los resultados posibles con los dados. Para determinar el orden de las elecciones se lanzan los dos dados, se suman y se establecen los turnos de mayor a menor puntuación obtenida.

Una vez comenzada la partida, cada jugador en su turno lanza los dados y forma la fracción resultante, la simplifica si es posible, y si coincide con la fracción elegida se anota un punto. Gana el jugador que tenga más puntos después del tiempo fijado para la partida.

Con el fin de hacerlo más dinámico, se puede permitir que, por orden, cada jugador elija dos o tres fracciones entre los resultados posibles. Para ello es interesante que previamente hagan un estudio de todos los resultados posibles y de cuáles tienen más opciones de salir.

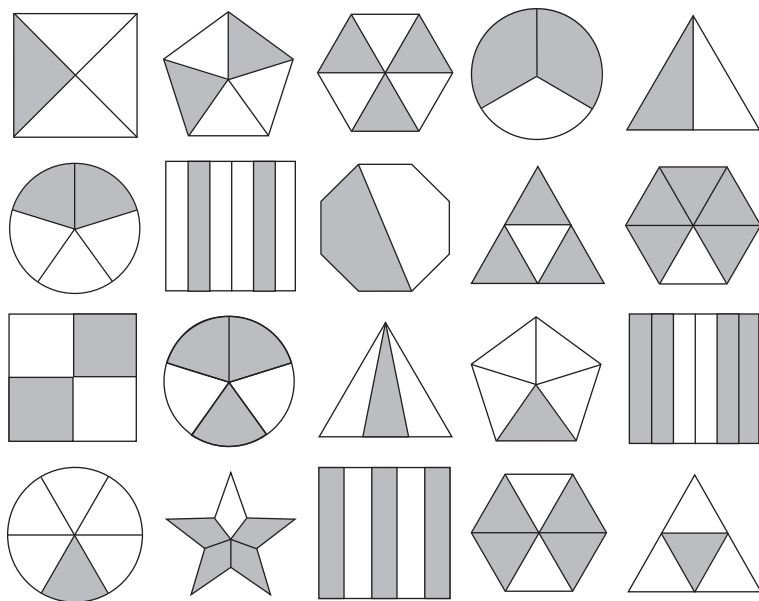
Como hemos visto en otras ocasiones, se pueden plantear juegos de dados ayudados de un tablero. El siguiente adapta un juego publicado en el blog de Ana García Azcárate².

Juego 6 Fracciones gráficas

Es un juego pensado para dos jugadores. Se necesitan dos dados cúbicos, cinco fichas de distinto color por jugador y un tablero como el siguiente.

FIGURA 7

Tablero con gráficas de fracciones



2. Véase *Juegos y matemáticas*: <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/>

La dinámica es fácil. Cada jugador, en su turno, lanza los dos dados. Si obtiene una puntuación doble, vuelve a lanzar. Con los valores obtenidos forma una fracción propia, es decir, aquella en la que el numerador es menor que el denominador. Coloca una de sus fichas sobre uno de los dibujos que represente la fracción que se ha construido, representando con la parte coloreada el numerador y con el total, el denominador. Si no hay casillas libres con el gráfico correspondiente, se pierde el turno.

La partida se acaba cuando se acaban las fichas o bien después de un determinado tiempo, y gana el jugador que ha colocado más fichas.

Juego 7

Radicales con dados

Es un juego pensado para cuatro jugadores y se necesita un dado cúbico.

En cada jugada uno de los jugadores hace de árbitro y se encarga de validar los resultados y que no haya copias entre los jugadores. La dinámica es la siguiente:

1. El árbitro lanza dos veces el dado y los jugadores construyen un radical donde el índice es lo aparecido en la primera tirada, y lo obtenido en la segunda será el exponente del radicando, cuya base se fija en 3.
2. Los jugadores simplifican el radical, si es posible o indican que no se puede.
3. Pasado un tiempo prudencial, por ejemplo medio minuto, el árbitro comprueba las soluciones y adjudica un punto a todo el que tenga la respuesta bien.
4. La partida puede jugarse a ocho turnos de forma que cada jugador haga dos veces de árbitro. Gana el jugador que tiene más puntos al acabar la partida.

Como es complicado conseguir que nadie copie el resultado, otra forma de jugar es dar el punto al primero que

simplifica el radical correctamente y en la siguiente tirada ese jugador es el que hace de árbitro.

Como es un juego bastante rápido, se pueden jugar varias partidas cambiando la base del radicando. Por ejemplo, en lugar de 3 se puede considerar 9 o 27.

Pero los juegos con dados no tienen que pertenecer siempre al estudio de los números. A continuación, veremos algunos juegos que tratan otros temas.

Juego 8

Tipos de triángulos

Se juega con tres dados y una hoja para anotar. Pueden jugar de dos a cinco jugadores.

Cada jugador, en su turno, lanza los tres dados e indica si es posible construir con las medidas obtenidas un triángulo. También debe indicar si el triángulo construible es escaleno, isósceles o equilátero. Si se equivoca tanto al decir que sea o no construible, o en el tipo de triángulo, pierde el turno y el jugador que descubre la equivocación se anota un punto.

Una vez que el jugador ha indicado de qué tipo es el triángulo se anota en su cuenta particular tres puntos si el triángulo es equilátero, dos por isósceles y uno por escaleno. Se anota un punto si indica que el triángulo no se puede construir.

Se acaba el juego una vez que cada jugador ha lanzado diez veces los dados y gana el que tenga más puntos.

Ejercicio 8. Al lanzar los tres dados, ¿en qué porcentaje de soluciones posibles se pueden obtener los valores que permitan dibujar un triángulo equilátero?, ¿qué proporción de soluciones dan lugar a un triángulo que se pueda construir y sea isósceles?, ¿y uno escaleno?

Tras hacer el ejercicio se puede plantear la discusión de si es adecuado el reparto de puntos, dependiendo de las posibilidades de salir cada uno de los tipos de triángulos.

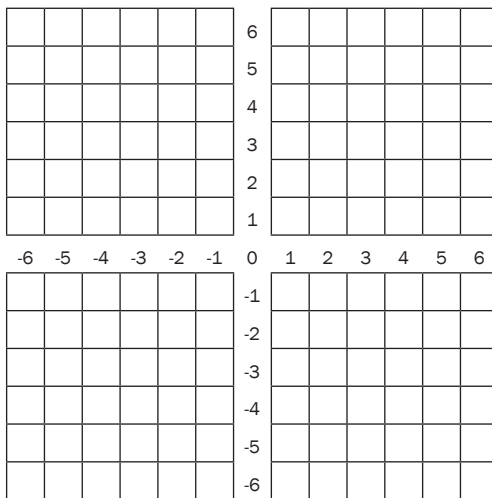
Juego 9

El juego de las coordenadas

Este es un juego para dos jugadores y se necesita un dado cúbico, una moneda, varias fichas de color diferente por jugador y un tablero como el siguiente.

FIGURA 8

Tablero del juego de coordenadas



Los pasos a seguir en el juego son:

1. Cada jugador en su turno lanza el dado y la moneda; si sale cara, le añade el signo más al valor del dado, y si sale cruz le coloca un menos. Ese valor, así obtenido, será la abscisa del punto que busca. Vuelve a lanzar los dos elementos y obtiene la ordenada del punto.
2. A continuación coloca una de sus fichas en la casilla correspondiente a ese punto si la casilla está libre; en caso contrario, pierde el turno.
3. Si una vez colocada la ficha el contrario, antes de hacer su jugada, descubre que está mal colocada, se retira del tablero y juega su turno el contrario.

4. Gana el primer jugador que consigue colocar sus fichas sobre el tablero.

En la propuesta original de Mauricio Contreras, juegan cuatro jugadores sobre un tablero desde -10 hasta 10 en ambos ejes, utilizando dados de diez caras o ruletas. Cuando el jugador ha construido las coordenadas de su punto, coloca su ficha en la casilla si está libre, pierde el turno si ya había colocado antes allí su ficha, pero si se encuentra la ficha de un contrario, la captura y coloca su propia ficha. Gana el jugador que consigue capturar cinco fichas de los contrarios.

Otro enfoque es que el jugador consigue los dos números y decide cuál es la abscisa y cuál la ordenada del punto, y coloca la ficha en la casilla correspondiente. Gana el primer jugador que consigue colocar cuatro de sus fichas seguidas en línea, sea horizontal, vertical o diagonalmente, salvando los ejes.

Juegos con dados adaptados

En el juego 5 hemos visto un ejemplo en el que se podría utilizar un dado modificado. Para ello, necesitamos que en sus caras aparezca el doble del valor que aparece normalmente. Si queremos construirlo, basta colocar papel adhesivo en las caras y se escriben, a mano o por ordenador, los elementos que deben aparecer. Podemos hacer lo mismo para conseguir un dado con fracciones como el que vamos a utilizar en algunos de los siguientes juegos.

Veamos una serie de juegos con dados modificados tomados, al menos la mayoría, de los materiales del Grupo Cero de Valencia.

Juego 10

Operaciones con fracciones

Pueden jugar varios jugadores y solo se necesita un dado tetraédrico, uno cúbico con los valores $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $2/3$ y $3/4$ y un papel para hacer operaciones y anotar la puntuación.

Cada jugador en su turno lanza el dado tetraédrico y dos veces el dado cúbico. El número obtenido en el dado de cuatro caras indica la operación que se va a realizar, el 1 es para la suma, el 2 la resta, 3 el producto y 4 la división.

El jugador realiza la operación correspondiente con las fracciones obtenidas al lanzar el dado cúbico, primera fracción operada con la segunda. Si obtiene un resultado correcto se anota un punto.

Gana quien tenga más puntos después de diez tiradas.

Hemos colocado la misma distribución de fracciones que en los dados que aparecen en otros juegos, pero se pueden cambiar a gusto de los jugadores.

En el caso de que la operación que aparece sea una resta o una división, se permite hacer las dos operaciones que salen al cambiar entre sí el orden de las fracciones obtenidas y anotarse un punto por cada respuesta correcta.

Juego 11

Juego de fracciones equivalentes

Juego para dos o tres jugadores que disponen cada uno de seis fichas, de distinto color por jugador. Se necesita un dado tetraédrico con los valores 2, 3, 4 y 6 y un dado cúbico con los valores 2, 4, 6, 8, 10, 12, además del siguiente tablero.

FIGURA 9

Tablero del juego de fracciones

$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$

El dado tetraédrico aporta el numerador de la fracción y el cúbico el denominador. Cada jugador en su turno lanza los dos dados y construye la fracción correspondiente. Si la fracción se puede simplificar, coloca una de sus fichas en una casilla libre que tenga la fracción simplificada. Si la fracción no se puede simplificar, se retira una de las fichas que el jugador hubiese puesto ya sobre la mesa y pasa el turno.

Gana el primer jugador en colocar sus seis fichas en el tablero.

Ejercicio 9. De todas las fracciones que se pueden obtener en este juego, ¿cuántas hay que no se pueden simplificar?, ¿qué proporción representan del total de fracciones?

Se puede modificar la regla correspondiente y, si se obtiene una fracción irreducible, dado que es fruto del azar, solo se pierde el turno y no una de las fichas que ya se había colocado.

No vamos a encontrar comercializados dados tetraédricos con los números indicados y, como son más difíciles de adaptar, basta considerar que si sale un 1, equivale a un 6.

Juego 12

Juego de fracciones decimales

Es un juego para dos o tres jugadores que juegan con el dado cúbico de fracciones que hemos visto anteriormente. Los jugadores tienen fichas de distinto color. Se juega sobre el siguiente tablero.

FIGURA 10

Tablero del juego de fracción decimal

0,2	0,25	0,3̄	0,5	0,6̄	0,75
0,5	0,3̄	0,6̄	0,75	0,2	0,25
0,25	0,5	0,2	0,6̄	0,75	0,3̄
0,6̄	0,75	0,5	0,25	0,3̄	0,2
0,3̄	0,6̄	0,75	0,2	0,25	0,5
0,75	0,2	0,25	0,3̄	0,5	0,6̄

Cada jugador, en su turno, lanza el dado y convierte la fracción obtenida en decimal. Coloca una de sus fichas en una casilla donde aparezca ese decimal.

El objetivo del juego es que la suma de los decimales de las casillas ocupadas por un jugador corresponda a un número entero. Gana el primer jugador que lo logra.

