CATARATA

Antonio J. Durán

Cálculo infinitesimal

EL LENGUAJE MATEMÁTICO DE LA NATURALEZA

CATARATA

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

CÁLCULO INFINITESIMAL.
EL LENGUAJE MATEMÁTICO DE LA NATURALEZA

ISBN: 978-84-9097-926-6
DEPÓSITO LEGAL: M-2.347-2020
THEMA: PDZ/PBKJ/PBKL

ÍNDICE

Introducción

El cálculo infinitesimal es sin duda la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza que hayan desarrollado jamás los matemáticos. El cálculo se basa en dos conceptos fundamentales, la derivada y la integral, y en el puente que los une: el teorema fundamental del cálculo, que establece que derivar e integrar son procesos inversos.

En el cálculo infinitesimal intervienen una gran variedad de procesos de toda índole, matemáticos, físicos, tecnológicos, económicos, biológicos…, que se modelizan mediante derivadas, integrales o una mezcla de ambas. Parafraseando a Galileo Galilei, se puede afirmar que el cálculo infinitesimal es el lenguaje de la naturaleza. La física moderna nació con Newton, y no es por casualidad que Newton sea también uno de los inventores del cálculo infinitesimal. El otro inventor del cálculo fue Gottfried Leibniz, un todoterreno del pensamiento que también aplicó el cálculo para resolver numerosos problemas de dinámica.

Este libro pretende ser una guía básica del cálculo infinitesimal, enriquecida con abundancia de ejemplos y alguna de sus aplicaciones fundamentales. El nacimiento y primer desarrollo del cálculo infinitesimal fue un proceso enormemente complejo, intenso, apasionante y extendido en el tiempo en el que participaron grandes pensadores y científicos; por esta razón, se han integrado también en el texto detalles sobre la historia de este proceso, así como apuntes biográficos de sus más destacados personajes. El capítulo 1 trata sobre funciones y curvas. Sobre estos elementos actuarán derivadas e integrales; los conceptos fundamentales del cálculo que serán considerados en los capítulos 2 y 3, respectivamente. Se ilustrará también la enorme utilidad del cálculo para el estudio de la naturaleza y, así, el capítulo 4 estará dedicado a uno de sus primeros y grandes triunfos: el papel estelar que tuvo el cálculo infinitesimal en la explicación de cómo y por qué se mueven los planetas en el cielo. Esa explicación supuso la culminación de la revolución científica que inició Nicolás Copérnico a mediados del siglo XVI, y que vino a dar solución a un problema milenario cuyo origen se pierde en la noche de los tiempos, cuando el esplendor del cielo nocturno encandiló a los primeros humanos.

Capítulo 1
Funciones y curvas

¿Qué problemas ayuda a resolver el cálculo infinitesimal?

El *cálculo infinitesimal* es una herramienta científica y tecnológica de primer nivel. Lo que hace tan versátil el cálculo infinitesimal es la gran variedad de procesos matemáticos, físicos, tecnológicos, económicos, incluso de la medicina y otras muy diversas disciplinas, que se corresponden con el cálculo de una derivada, de una integral o que están íntimamente relacionados con ellas o una mezcla de ambas. Así, para empezar a comprender en qué consiste el cálculo, hasta dónde alcanza su potencia y por qué se ha convertido en una herramienta ubicua en la ciencia y la tecnología modernas, nada mejor que desgranar algunos de los problemas que el cálculo ayuda a resolver.

Entre estos se encuentran los problemas de la física. Empezando con los más básicos, como el de determinar la velocidad a la que se mueve un cuerpo, conocido el espacio que recorre, o viceversa, calcular el espacio recorrido por el cuerpo, conocida la velocidad con que se mueve; o, también, el cálculo de la velocidad a la que se mueve un coche, conocida la fuerza con que su motor lo empuja. Según el testimonio de Isaac Newton, las ideas que culminarían con el descubrimiento de *su* método de cálculo nacieron mezcladas con sus primeras reflexiones sobre la gravedad, y esa rudimentaria versión inicial del cálculo infinitesimal le debió de servir, en su más tierna juventud, para hacer uno de sus grandes descubrimientos: la deducción, usando las leyes de Kepler del movimiento planetario, de la ley del inverso del cuadrado de las distancias para la atracción gravitatoria.

Algo parecido ocurrió con la otra versión del cálculo infinitesimal, la de Gottfried Leibniz (1646-1716); poco después de que vieran la luz los dos artículos seminales en que lo dio a conocer —en 1684 y 1686—, ya fue usado su método de cálculo para resolver muchos y muy diversos problemas mecánicos —el de la catenaria, por ejemplo, que consiste en descubrir qué curva forma una cadena que cuelga por gravedad entre dos puntos— que hasta entonces se habían mostrado irresolubles, incluso para genios de la talla de Leonardo da Vinci o Galileo.

También hay problemas geométricos que el cálculo puede resolver, como el cálculo de la tangente a una curva, el área que delimita o su longitud. Otros están a medio camino entre la física y la ingeniería, como el cálculo del centro de gravedad de un cuerpo —muy necesario para la construcción de barcos—.

He aquí otro ejemplo, de los muchos posibles, de la versatilidad del cálculo: ¿a quién, con la práctica médica tan altamente tecnificada de hoy en día, no le han hecho una resonancia magnética o una tomografía? Esos procedimientos están basados en ondas que entran y salen de nuestro cuerpo, y en cierta forma, lo que cada onda hace cuando nos atraviesa es una integral cuyo valor es la diferencia de intensidad con la que la onda sale después de habernos atravesado respecto de la que tenía al entrar; lo que la máquina hace, entonces, es adivinar una visión del interior de nuestro cuerpo teniendo en cuenta los valores de todas esas integrales.

Conforme el cálculo infinitesimal se fue convirtiendo en análisis matemático a lo largo del siglo XVIII, fueron muchos otros problemas de la física, de la geometría, de la ingeniería, de la economía, y, más recientemente, de la medicina, los que quedaron a su alcance. Esos problemas se formulan habitualmente mediante *ecuaciones diferenciales*: ecuaciones donde se mezclan funciones y sus derivadas. Así, a la lista anterior de problemas podemos añadir el del cálculo de la posición de una cuerda de guitarra después de haber sido pulsada; el cálculo de la distribución de temperaturas en una placa metálica a la que se aplica una fuente de calor; el estudio de las tendencias de un determinado valor en los mercados financieros; el estudio del crecimiento de tumores; la determinación del movimiento de fluidos —con sus múltiples aplicaciones, ya sea en el diseño de aviones o contribuyendo a la modelización del flujo sanguíneo humano que, eventualmente, puede ayudar al cirujano en la inserción de un *bypass*.

Y se podrían seguir añadiendo a la lista problemas de los que requieren del cálculo infinitesimal para su resolución hasta hacerla prácticamente infinita, sin olvidar tampoco que el análisis matemático y las ecuaciones diferenciales son imprescindibles en las dos teorías que revolucionaron la física en el siglo XX: la *relatividad general de Einstein* y la *mecánica cuántica*.

Funciones

Si nos fijamos en los problemas anteriores, observaremos que hay dos cuestiones previas a su formulación a las que hay que atender:

- En algunos de ellos se precisa la cuantificación numérica del fenómeno. Es lo que ocurre en el problema del espacio recorrido y las velocidades, donde previamente hay que cuantificar cuánta distancia se ha recorrido en un tiempo dado o a qué velocidad va el cuerpo que se mueve en un instante dado. Algo parecido ocurre en muchos de los otros problemas; por ejemplo, en el problema de la distribución de temperaturas en una placa

se requiere la cuantificación de la temperatura en cada punto de la placa.
- En otros, el problema versa sobre la identificación de una curva, o sea, de un objeto geométrico.

Aparentemente estas dos cuestiones parecen diferentes, pues para el manejo de la cuantificación se requieren instrumentos numéricos mientras que para las curvas necesitamos herramientas geométricas. El cálculo se acabó descubriendo en el último tercio del siglo XVII y, justo unas décadas antes, en el segundo tercio de ese siglo, se constató que, en realidad, las cuestiones de la cuantificación y de las curvas son, en el fondo, la misma. Este descubrimiento fue fruto de lo que hoy conocemos con el nombre de *geometría analítica*, y fue obra independiente de los matemáticos franceses René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). La geometría analítica estableció un puente que unió la geometría con el álgebra, y fue esencial para el descubrimiento posterior del cálculo infinitesimal al mostrar que las curvas también se pueden cuantificar.

La herramienta que permite cuantificar fenómenos naturales del tipo de los mencionados antes —medida del espacio recorrido, de la velocidad a que se mueve un cuerpo, temperaturas, presiones, densidades, etc.— y también la manipulación algebraica y analítica de curvas, es el concepto de *función*.

El concepto de función se desarrolló en paralelo con los conceptos fundamentales del cálculo —la derivada y la integral—. Como ya se ha dicho, permite modelizar para su estudio matemático buena parte de los procesos que a los humanos nos interesa estudiar, ya sea el comportamiento del valor de las acciones de un determinado banco o empresa en la bolsa de Madrid, ya sea la presión con que el viento golpea las alas de un avión en vuelo o la densidad de cada pequeño trozo del cuerpo humano —que nos permitirá después saber dónde están los huesos, dónde los músculos y dónde las vísceras, sin necesidad de usar un bisturí—. Multitud de procesos naturales, económicos o de cualquier otro tipo, propios de nuestras complejas sociedades, se modelizan mediante funciones. Así que podemos afirmar que las funciones son el lenguaje que usan los científicos para estudiar matemáticamente todos esos procesos.

Una función es una regla que asocia a un número otro número. Habitualmente, aunque no siempre, esa regla viene expresada mediante operaciones algebraicas o analíticas con el correspondiente número.

Ejemplo 1

Una función sería la que a cada número, llamémosle de forma genérica x, le asocia el número

$$\frac{x^2+1}{x^4+5}.$$

Dado que al número genérico x le vamos a asignar valores numéricos distintos, se le suele llamar *variable*. Es corriente usar las letras f, g, h, s o v para denotar una función y las letras x, y o t para denotar una variable. Se escribe entonces $f(x)$ para el valor que la función asigna al número genérico x. En el ejemplo anterior, se escribiría:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+5};$$

en particular, cuando le damos a la variable x valores numéricos concretos encontramos los valores explícitos correspondientes de la función: así, si ponemos $x = 1$ se obtiene

$$f(1)=\frac{1^2+1}{1^4+5}=\frac{1}{3};$$

mientras que para $x = 2$ se obtiene

$$f(1)=\frac{2^2+1}{2^4+5}=\frac{5}{21}.$$

A su vez, para $x = -1$ se obtiene también

$$f(-1)=\frac{1}{3},$$

y para $x=\sqrt{2}$ tenemos

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Con las funciones podemos hacer las mismas operaciones que con los números: las podemos sumar, multiplicar o dividir

—siempre y cuando no dividamos por cero—. Estas operaciones con funciones heredan las propiedades de las correspondientes operaciones con números: así, son conmutativas, asociativas, etc. Con las funciones podemos hacer también algo más: las funciones las podemos *componer*, esto es, aplicar sucesivamente unas detrás de otras.

EJEMPLO 2

Consideremos la función del anterior ejemplo, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+5}$, y la función $g(x) = 2x + 1$

La composición de f con g, a lo que denotamos $g\circ f$ consiste en dado un número x aplicar primero la función f y al resultado obtenido aplicarle la función g:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x^2+1}{x^4+5}\right)=2\frac{x^2+1}{x^4+5}+1=\frac{x^4+2x^2+7}{x^4+5}.$$

Es muy fácil ver que la composición de funciones no es conmutativa: en este caso sí importa el orden en que apliquemos las funciones. En nuestro ejemplo, si aplicamos primero g y luego f se obtiene:

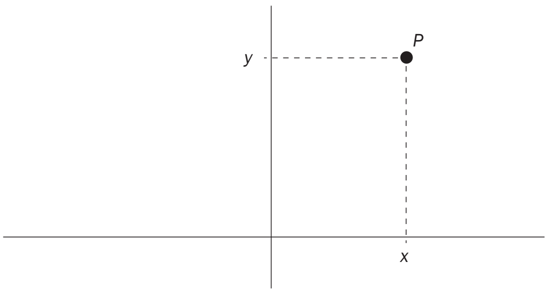
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=\frac{(2x+1)^2+1}{(2x+1)^4+5}=\frac{2x^2+2x+1}{8x^4+16x^3+12x^2+4x^4+3},$$

lo que muestra que no es lo mismo $g\circ f$ que $f\circ g$.

A la función inversa para la composición, esto es, “a la que deshace lo que hace la función” f se la denota por f^{-1}, y verifica que $(f^{-1}\circ f)(x)$ = x, $(f\circ f^{-1})(x)=x$.

Una cuestión muy interesante, y profundamente ligada al nacimiento y evolución del cálculo infinitesimal, es la de la representación gráfica de funciones. La clave está en la identificación de parejas de números reales (x, y) con puntos del plano. Para ello dibujamos dos rectas perpendiculares sobre un plano a las que llamaremos *ejes*, y *origen* a su punto de corte. Dado un punto P del plano, le asociamos una pareja de números (x, y) del siguiente modo: proyectamos el punto P sobre los ejes; el número x será la distancia de la proyección sobre el eje horizontal al origen, con signo positivo o negativo, según la proyección esté a la derecha o la izquierda del origen; de manera semejante, el número *y* será la distancia de la proyección sobre el eje vertical al origen, con signo positivo o negativo, según la proyección esté arriba o abajo del origen —véase la figura 1—. De igual manera se ve que toda pareja de números reales (x, y) representa un punto P del plano.

Figura 1

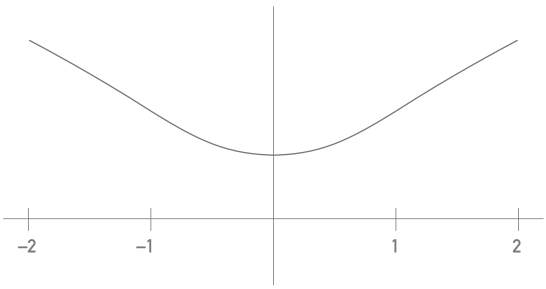


Dada una función $f(x)$ definida en un cierto intervalo $[a, b]$ de la recta, podemos dibujar en el plano los puntos de la forma $(x, f(x))$, de forma que cuando x varíe entre a y b, ese punto describirá una curva en el plano a la que se denomina la gráfica de la función f.

Ejemplo 3

En el caso del ejemplo anterior, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+5}$, la gráfica de la función f, cuando x varía entre -2 y 2, corresponde con la siguiente curva:

Figura 2



La representación gráfica de funciones establece una primera conexión entre estas y las curvas. Diremos más sobre esto en la sección final de este capítulo.

Clasificación de las funciones

Desde el punto de vista del cálculo infinitesimal, se suele establecer la siguiente clasificación de las funciones:

1. Polinomios y funciones racionales.
2. Funciones irracionales.
3. Funciones elementales.
4. Funciones especiales.

1. Los *polinomios* y las *funciones racionales* corresponden con las operaciones aritméticas entre números: sumas, diferencias, productos y cocientes. Ejemplos de polinomios serían las siguientes funciones, en las que solo aparecen sumas de potencias naturales de la variable multiplicadas o divididas por número reales:

$$f(x) = 3x^2 + 1,\ g(x) = x^3 + \frac{x}{2} + 5 \text{ o } h(x) = \sqrt{8}x^5 + x^4.$$

Las funciones racionales son cocientes de polinomios, por ejemplo:

$$s(x) = \frac{x^3 + \frac{x}{2} + 5}{\sqrt{8}x^5 + x^4}.$$

2. En las *funciones irracionales* ya intervienen *raíces*, que corresponden a la operación inversa de elevar a una potencia. Tendríamos así la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, raíz cúbica $g(x) = \sqrt[3]{x}$, o combinaciones racionales de ellas:

$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x + 2 + 5\sqrt{x}}$$

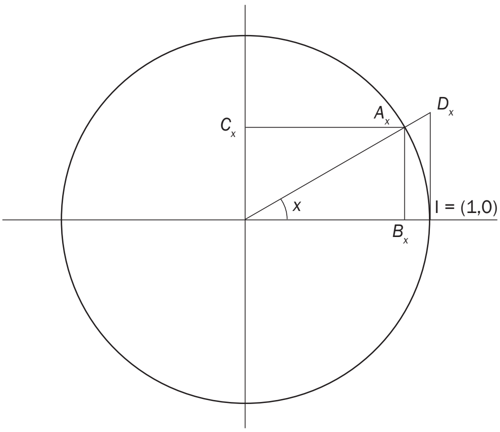
3. Las *funciones elementales* se dividen, a su vez, en *trigonométricas* —y sus funciones inversas—, *exponenciales* y *logaritmos* —inversas estas dos últimas unas de otras—.

4. Además de las funciones elementales, y trascendiéndolas, hay todo un catálogo de funciones imprescindibles en física matemática y otros campos que atienden al nombre de *funciones especiales*, aunque por su carácter especializado quedan fuera del propósito de este libro.

Volvamos a las *elementales*. Debemos aclarar que con esta denominación nos referimos a que lo son desde el punto de vista de los conceptos del cálculo; esto es, esas funciones van a tener un comportamiento elemental con respecto a la derivada y la integral. Sin embargo, definir o construir esas funciones en términos de operaciones aritméticas —como hemos hecho con polinomios, funciones racionales e irracionales— no es ni sencillo ni elemental. Por eso, para definir las funciones trigonométricas se usan habitualmente argumentos de tipo geométrico, mientras que para las exponenciales y logaritmos se suele apelar a procedimientos de aproximación.

La trigonometría es un objeto científico muy antiguo: nació en Grecia, allá por el siglo II a. n. e., como herramienta al servicio de la astronomía —para localizar estrellas y planetas en el cielo—. Solo introduciremos las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente. Para ello, consideramos la circunferencia de centro el origen de coordenadas, es decir, (0, 0), y radio 1; dado un número x consideramos sobre la circunferencia un arco que, teniendo un extremo en el punto de coordenadas $I=(1,0)$ y moviéndonos en sentido contrario a las agujas del reloj, tenga longitud igual a x —véase figura 3; obsérvese que este arco abarcará un ángulo cuya medida en radianes es justamente x—. Llamemos A_x al otro extremo de este arco; caso de ser el número mayor que 2π —la longitud de la circunferencia de radio 1— habría que dar una o varias vueltas en torno a la circunferencia hasta obtener el extremo A_x.

Figura 3



Definimos entonces el valor de la función seno en x, lo que denotamos por $\operatorname{sen}(x)$, como la longitud de la perpendicular trazada desde A_x hasta el eje OX —esto es, en la figura 3, la distancia de A_x a B_x—. Definimos, a su vez, el valor de la función coseno en x, lo que denotamos por $\cos(x)$, como la longitud de la perpendicular trazada desde A_x hasta el eje OY —esto es, en la figura 3, la distancia de A_x a C_x—. Por último, definimos el valor de la función tangente en x, lo que denotamos por $\tan(x)$, como la longitud del segmento que tiene un extremo en el punto $I = (1,0)$, es perpendicular al eje OX —tangente por tanto a la circunferencia— y tiene el otro extremo en la recta que une A_x con el origen de coordenadas —en la figura 3 es la distancia de D_x a I—.

Por su definición, las funciones trigonométricas están muy ligadas al número π, la constante matemática —trascendente— más importante, y que los antiguos griegos definieron como la razón entre el área de un círculo y el cuadrado de su radio —para lo cual demostraron primero que esa razón es siempre la misma cualquiera que sea el radio del círculo—.

Seno, coseno y tangente

Las denominaciones de coseno y tangente se empezaron a usar entre los siglos XVI y XVII y responden a consideraciones claras: *coseno* es una abreviación de *complemento del seno*, y *tangente* viene a indicar la recta tangente a la circunferencia sobre la que se mide la función tangente. Sin embargo, el nombre *seno*, que se empezó o a utilizar mucho antes, allá por el siglo XII, responde a un curioso error de traducción. La historia es la siguiente; la consideración de la *semicuerda* del ángulo doble, que no es otra cosa que el seno, como función trigonométrica es de origen hindú, y fue introducida en Europa a través de las numerosas traducciones de libros árabes. Uno de los centros de traducción más importantes fue la Escuela de Traductores de Toledo. Creada por Alfonso VII de Castilla en el siglo XII, alcanzó su periodo de máximo esplendor en el siglo XIII gracias al mecenazgo de Alfonso X el Sabio. Los hindúes habían adoptado el nombre de *jiva* para la semicuerda, que los árabes, en una traducción literal, tomaron por *jiba*. Ahora bien, la escritura árabe consta de consonantes con las vocales puntuadas debajo, a veces suprimidas. De esta manera los traductores se encontraron con la expresión *jb* para la semicuerda. Desconociendo el origen hindú de la expresión, uno de los traductores completó las consonantes formando la palabra árabe *jaib*, que significa bahía, ensenada o golfo, de manera que su traducción latina es *sinus*. De ahí el nombre *seno*.

La riqueza geométrica de la figura 3, utilizada para definir las funciones trigonométricas, es tal que esconde una multitud de armonías que, convenientemente interpretadas, dan lugar a múltiples relaciones y fórmulas entre las distintas funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas son periódicas, esto es, van repitiendo sus valores con una determinada frecuencia: 2π en el caso del seno y coseno, y π en el caso de la tangente.

T.1. sen 0 = 0, sen $\frac{\pi}{2}=1$, sen π = 0, sen $\frac{3\pi}{2}=-1$, cos 0 = 1, cos $\frac{\pi}{2}=0$, cos = –1, cos $\frac{3\pi}{2}=0$.

T.2. $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$.

T.3. $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

T.4. Para x entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se tiene que $0<\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<\frac{1}{\cos x}$.

T.5. $\cos(x+\frac{\pi}{2})=\operatorname{sen} x$.

T.6. $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x\cos y+\cos x \operatorname{sen} y$.

T.7. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

Ejercicio 1. Justificar estas fórmulas.

Ejemplo 4

La última fórmula de las anteriores (T.7) ha tenido mucha importancia histórica. Es ideal por su utilidad para multiplicar números con muchas cifras si no se tienen a mano ni calculadoras ni ordenadores. Desde la antigua Grecia, multiplicar números de muchas cifras era una tarea habitual en los observatorios astronómicos, y cualquier idea que simplificara esos tediosos cálculos se consideraba bienvenida. En efecto, supóngase que se quieren multiplicar dos números *a, b* con muchas cifras; usando una tabla trigonométrica buscamos dos números *x, y* de manera que *a* = sen *x* y *b* = sen *y*. Si ahora usamos la fórmula anterior tenemos:

$$a\cdot b=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2};$$

y usando de nuevo la tabla, calculamos los cosenos que aparecen en el segundo miembro de la igualdad, con lo cual, el producto ha sido reducido, mediante las tablas trigonométricas, a una suma, dos restas y una sencillísima división por dos. A este método se le denominó *prostafairesis*.

Por su parte, la función exponencial se puede definir mediante aproximaciones a partir de las potencias enteras y funciones irracionales. Dado un número positivo a, al que denominamos base, queremos definir la función exponencial a^x, cuya variable está en el exponente. Cuando el número x es un número natural, pongamos para simplificar $x = 2$, entonces la exponencial se define usando la multiplicación: $a^2 = a \cdot a$. Si x es entero, como $x = -3$, volvemos a usar potencias para definir la exponencial:

$$a^{-3} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a}.$$

Si x fuera un número racional, por ejemplo $x = \frac{1}{2}$, entonces la exponencial se define usando raíces $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Si x no fuera racional, lo aproximamos por racionales, lo que nos permitirá calcular a^x usando los valores de la exponencial en las aproximaciones racionales de x. En cierta forma, esta es la manera en que una calculadora computa los valores de la función exponencial cuando, por ejemplo, le pedimos que calcule $2^{\sqrt{2}}$ y nos da el valor 2,665144142…

La función exponencial hereda de las potencias su propiedad fundamental de transformar sumas en productos: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Aunque la llamemos función exponencial, en realidad hemos definido muchas funciones exponenciales, una para cada número positivo a que tomamos como base.

Cuando la base a es un número mayor que 1, la función exponencial experimenta un crecimiento muy rápido, que es lo que ha pasado al lenguaje común cuando hablamos *de crecimiento exponencial*. Este crecimiento es mayor cuando mayor es la base a. Esto se refleja en la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función exponencial: cuando mayor es a, mayor pendiente tiene esa recta en cada punto de su gráfica.

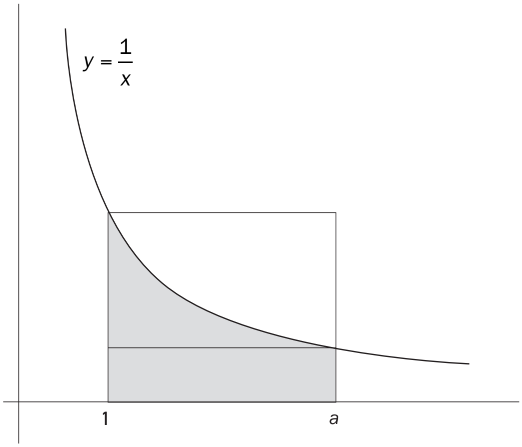
De todas las funciones exponenciales, la más importante es la exponencial asociada al número e. Tras del número π, el número e es la segunda constante matemática —trascendente— más importante. La definición del número e no es fácil; baste decir que es el número que hace que la pendiente de la tangente en $x = 1$ a la función exponencial a^x sea exactamente igual a uno; el número e tiene un valor aproximado de 2,71828… ¿Por qué se elige ese complicado número e como base de la más importante función exponencial, en vez de elegir un número más sencillo, por ejemplo, el dos o el diez? Porque la función exponencial con base el número e es la más sencilla para derivar, pues al derivarla no varía: la derivada de la función e^x vuelve a ser e^x.

Los logaritmos, descubiertos a principios del siglo XVII, se definen como la inversa —con respecto a la composición de funciones— de la función exponencial: dado un número positivo a, al que denominamos base del correspondiente logaritmo, decimos que $\log_a x = y$ si $a^y = x$; esto es, lo que hace la exponencial —asociar el número y al x— lo deshace el logaritmo —asociando el número x al y—. Por tanto, los logaritmos invierten la propiedad fundamental de la exponencial, convirtiendo productos en sumas: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. A su vez, si la exponencial crece muy rápido cuando crece la variable x, el crecimiento del logaritmo es enormemente lento.

Los logaritmos más importantes tienen como base el número e, y se denominan naturales o neperianos —en honor a John Napier (1550-1617), noble escocés y uno de los inventores de los logaritmos; el otro fue el suizo Joost Bürgi (1552-1632). También son muy usados, especialmente en ingeniería, los logaritmos cuya base es el número diez, a los que se llama logaritmos decimales. Los matemáticos, y también los físicos, usamos la notación $\log x$ para indicar el logaritmo neperiano de x —y es la notación que seguiremos en este libro—, aunque en otros ámbitos científicos, y en la ingeniería, esa notación se reserva para los logaritmos decimales, prefiriéndose escribir $\ln x$ para indicar el logaritmo neperiano de x —esta es también la notación habitual de las calculadoras—.

A mediados del siglo XVII se descubrió una muy importante propiedad de los logaritmos neperianos: si el número a es mayor que uno, entonces el $\log a$ coincide con el área que encierra la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ entre las abscisas $x = 1$ y $x = a$:

Figura 4



Ahora bien, es claro que esa área sombreada debajo de la hipérbola de la figura 4 está contenida en el rectángulo que tiene por base el intervalo $[1, a]$ y altura 1, y, a su vez, contiene al rectángulo con base el intervalo $[1, a]$ y altura $\frac{1}{a}$; de la misma figura se deduce que

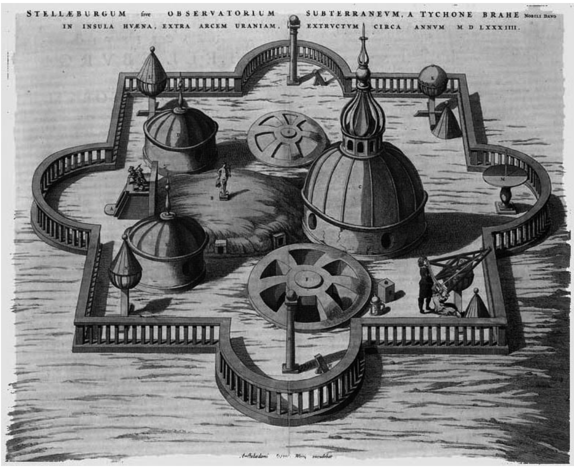
$$\text{L.1.} \quad \frac{a-1}{a} < \log a < a - 1.$$

Algo parecido ocurre si el número positivo a es menor que uno, entonces el $\log a$ coincide con el área que encierra la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ entre las abscisas $x = a$ y $x = 1$, pero cambiada de signo.

La razón que llevó a Napier a descubrir los logaritmos podría servir de guion para una superproducción de aventuras hollywoodiense. A finales del siglo XVI, reinaba en Escocia Jacobo VI; era hijo de María Estuardo y alcanzó el trono de Inglaterra en 1603. En 1589 se decidió que el rey debía casarse con Ana de Dinamarca. La boda se hizo primero por poderes, hasta que una expedición fue a buscar a la ya reina a Dinamarca. En esa expedición participó John Craig, médico del rey y amigo de John Napier. Debido a unas tormentas, el barco se vio forzado a buscar refugio en la isla de Ven, situada entre las costas de Dinamarca y Suecia. Allí se ubicaba el observatorio astronómico de Tycho Brahe (1546-1601), probablemente el mejor de la época. Brahe ha sido el mejor astrónomo de observación de la historia antes de la invención del telescopio. Cuenta la leyenda que perdió parte de la nariz en un duelo a cuenta de la existencia de los números imaginarios; la sustituyó por una prótesis de plata o de oro… Aunque quizá fuera de cobre, o al menos a esa conclusión llegaron en 1901 cuando, con motivo del tercer centenario de la muerte de Brahe, decidieron abrir su tumba para comprobar si entre los huesos del astrónomo había o no alguna prótesis nasal. Sea cual fuera el material de la prótesis de Brahe, le tuvo que dar un aspecto de lo más inquietante.

Figura 5

Observatorio astronómico subterráneo de Tycho Brahe



Fuente: Joan Blaeu, *Atlas Maior*, vol. 1, Ámsterdam, 1662.
Wikimedia Commons.

Brahe llamaba a su observatorio Uraniborg, "Castillo del cielo". Se había construido con los planos del arquitecto masón Hans van Steenwinkel, llenos de simetrías y dimensiones de intención simbólica y esotérica. Contaba con comodidades y lujos poco usuales en el siglo XVI: se decía que las habitaciones tenían agua corriente, y que vivían en él enanos clarividentes y alces gigantescos que calmaban su sed con cerveza en vez de con agua —parece ser que el animal predilecto de Brahe se desnucó una noche al rodar borracho por unas escaleras—. En el exterior había pajareras, cenadores, miradores y un jardín de hierbas medicinales que surtía la botica construida en los sótanos del castillo; Brahe y, sobre todo, su hermana Sophia —que fue uno de sus principales asistentes— fueron muy aficionados a la botánica y la alquimia. Brahe llegó incluso a construir un sistema de represas en la isla para alimentar un molino de papel que proveía su imprenta particular.

Del paraíso que Brahe se construyó en Ven le echaron finalmente sus excesos y el joven rey Christian IV —hijo y sucesor de Federico II—. Brahe dejó su isla en 1597 camino de Alemania. La ira de los campesinos de Ven, a quien Brahe había estrujado a base de impuestos y tasas que recaudaba con enorme voracidad y haciendo uso de una crueldad inhumana, provocó la destrucción parcial de sus castillos al poco de que los abandonara; el paso del tiempo se encargó de rematar la tarea. Con todo, una visita a la isla de Ven merece aún hoy la pena: a hora y media en ferri de Copenhague, puede alquilarse una bicicleta y recorrer todos sus rincones en seis o siete horas; del observatorio de Brahe solo quedan unas pocas ruinas, pero son enormemente evocadoras.

Durante su breve estancia en Uraniborg, el médico escocés amigo de Napier aprendió el método de prostafairesis, que enseñó a Napier a su vuelta a Escocia. Recordemos que este método se basa en la fórmula trigonométrica T.7 y permite el cálculo simplificado de productos de números con muchas cifras. Napier pensó entonces que el método todavía se podía simplificar si se desarrollaba una herramienta para transformar directamente productos en sumas. Se aplicó entonces a ello, y fruto de sus desvelos fueron los logaritmos.

Curvas

Hasta el siglo XVII las matemáticas se podían dividir en tres disciplinas, la aritmética, el álgebra y la geometría, o incluso dos, pues aritmética y álgebra fueron casi lo mismo durante muchos siglos.

La *aritmética* tiene que ver con los números y sus operaciones. Los devaneos de la humanidad con los números responden a la necesidad de contar, y se pierden en la noche de los tiempos. El *álgebra* supuso una extensión de la aritmética que se acabó visualizando en el siglo XVII mediante la introducción de símbolos, que venían a representar números, y su manipulación. Nuestra relación con el álgebra es también muy antigua, aunque su concreción como disciplina matemática fue mucho más lenta: sus iniciales balbuceos se remontan a Babilonia —resolución de ecuaciones de primer y segundo grado— y su concreción llega en el siglo XVII con el desarrollo de la simbología moderna, pasando por el griego Diofanto (s. III) o al-Jwarismi (ca. 780-850), del título de uno de cuyos libros deriva, precisamente, la palabra *álgebra*.

La *geometría* es también muy antigua, y responde a la necesidad de medir. A nivel muy elemental, fue practicada por egipcios, babilonios, indios y otras culturas; en Grecia alcanzó cotas de inigualable esplendor: desde sus brillantes inicios con Pitágoras (s. VI a. n. e.) o Tales (s. VI a. n. e.) hasta la madurez de Euclides (ca. 325-265 a. n. e.) o Apolonio (262-190 a. n. e.), y la cumbre suprema de Arquímedes (287-212 a. n. e.).

Aritmética y álgebra habían sido, y lo eran a principio del siglo XVII, disciplinas íntimamente relacionadas; no así la geometría, que parecía habitar un universo paralelo al universo de la aritmética y el álgebra. Pensemos en un objeto geométrico, una circunferencia, por ejemplo. Es, por definición, el lugar geométrico del plano formado por los puntos equidistantes de uno al que llamamos su centro. Cuando pensamos en una circunferencia visualizamos un dibujo: un fino trazo simétrico que se cierra sobre sí mismo y está igualmente curvado en cada una de sus partes. Pensemos ahora en un objeto algebraico, en una ecuación como $x^2+y^2=1$. Como hemos dicho, álgebra y aritmética están íntimamente conectadas, de manera que asociada a esa ecuación están las parejas de números que la verifican. Por ejemplo:

$$x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}.$$

Naturalmente, esa ecuación admite muchas más soluciones:

$$x=\frac{5}{13},\ y=\frac{12}{13}.$$

En realidad, esa ecuación tiene infinitas soluciones fraccionarias, todas las que se puedan generar mediante la fórmula

$$x=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\ y=\frac{2mn}{m^2+n^2},$$

donde *m* y *n* son dos números enteros cualesquiera —no nulos a la vez—. En la capacidad de producir esas fórmulas genéricas reside parte de la potencia del álgebra, cuando se la compara con la aritmética. Pero no acaba aquí la historia, pues la ecuación $x^2+y^2=1$ admite más soluciones que las racionales. Véase el caso

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esos ejemplos, la circunferencia y la ecuación $x^2+y^2=1$, con sus infinitas soluciones, no parecen tener ninguna relación. Pertenecen a ámbitos aparentemente distintos: la circunferencia al de los diseños gráficos —geometría— y la ecuación y sus soluciones, a las relaciones genéricas entre números —álgebra—. Es un buen ejemplo para mostrar que álgebra y geometría habitan universos disjuntos, y, en lo esencial, así se habían visto las cosas desde la Antigüedad hasta principios del siglo XVII —la simbología que he usado para manejar la ecuación corresponde a bien entrado ese siglo—. Esa situación dio un vuelco espectacular hacia la cuarta década del siglo XVII, cuando se estableció un puente que venía a mostrar que el álgebra y la geometría estaban, en realidad, íntimamente relacionadas, o, por usar una metáfora más apropiada, son dos caras de una misma moneda. Por ejemplo, ese puente establece una relación indisoluble entre la circunferencia y la ecuación $x^2+y^2=1$.

La pieza clave para construir el puente que une geometría y álgebra consiste en la identificación de parejas de números reales (x, y) y de puntos del plano, como explicamos en el apartado anterior. Con dicha convención, consideremos todas las parejas de números reales (x, y) que verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Si representamos todas esas parejas en el plano según el convenio de la sección anterior, es fácil ver, usando el teorema de Pitágoras, que todos esos puntos representados en el plano están a la misma distancia del origen: distan una unidad del origen, y viceversa. Dicho de otra forma, los puntos de la circunferencia con centro en el origen y radio uno son precisamente los puntos cuya representación (x, y) verifica la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Esto que acabamos de ver para la circunferencia se puede aplicar a una curva cualquiera, obteniéndose lo que se llama *ecuaciones implícitas de la curva*, que permiten manejar la curva como las parejas de puntos (x, y) verificando una determinada ecuación.

Con ese simple, aunque ingenioso, artificio hemos obrado una especie de milagro: mostrar que los dos universos aparentemente disjuntos del álgebra y la geometría tienen una profunda conexión. Ese puente entre álgebra y geometría, al que hoy llamamos *geometría analítica*, acabaría fecundando y cambiando las matemáticas. De hecho, la geometría analítica fue fundamental en el nacimiento del cálculo infinitesimal.

De la ecuación algebraica $x^2 + y^2 = 1$, podemos despejar la variable y como función de x: $y = \sqrt{1 - x^2}$, suponiendo que x está entre -1 y 1 para evitar raíces cuadradas de números negativos. Es fácil deducir ahora que la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, cuando x varía entre -1 y 1, corresponde con la parte superior de la circunferencia de centro el origen y radio uno. O sea, la geometría analítica permite el manejo de curvas mediante funciones.

Un bonito ejemplo es el de las *cónicas*, las curvas que apasionaron a los matemáticos griegos y que estos más estudiaron. Las cónicas corresponden, en ecuaciones implícitas, a un polinomio de segundo grado en las variables x e y:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0,$$

donde *a, b, c, d, f, g* son constantes y caracterizan la cónica. Las hipérbolas corresponden al caso en que $b^2 > ac$; las parábolas al caso $b^2 = ac$ y las elipses al $b^2 < ac$, siendo una circunferencia cuando $b = 0$ y $a = c$.

Así pues, las funciones permiten unificar las dos cuestiones previas a la formulación de los problemas de la física, la geometría, la ingeniería o la economía a los que hacíamos referencia al principio de este capítulo. Las funciones se convierten así en el paso previo esencial para modelizar problemas que después se resolverán utilizando las herramientas del cálculo infinitesimal —derivadas e integrales—.

Finalizaremos este capítulo con otras formas analíticas de manejar curvas.

La manera de asociar un punto del plano con sus dos coordenadas es un *convenio*. A la forma antes explicada, usando dos ejes coordenados, se le llama *representación cartesiana* —en homenaje a Descartes, uno de los descubridores de la geometría analítica—. Da lugar a las ecuaciones cartesianas de una curva, que permiten manejarla mediante una función f; es el caso ya comentado de la circunferencia de radio uno y la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

También podemos representar puntos mediante parejas de números usando las llamadas *coordenadas polares*. En este caso se parte de una semirrecta con origen en un punto al que denotamos por O. A la semirrecta se la llama *semieje de coordenadas* y al punto O el origen de coordenadas. Un punto P del plano es entonces representado por su distancia r al origen O y por el ángulo θ que forma la semirrecta que une O con P y el semieje de coordenadas —medido en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj—. Es muy fácil establecer la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto y sus coordenadas polares (r, θ):

$$x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Las coordenadas polares dan lugar a la representación polar de una curva. La representación en polares de curvas con alguna simetría con respecto a un punto suele ser más sencillas que la representación cartesiana. Por ejemplo, la circunferencia con centro el origen y radio R corresponde en polares con la función constante $r(\theta)=R$.

Las cónicas también tienen una ecuación muy simple en polares:

$$r(\theta)=\frac{l}{1+e\cos\theta}.$$

Esta representa una cónica caracterizada porque uno de sus focos está en el origen, y donde e es la llamada *excentricidad*: cuando $e = 0$ se obtiene una circunferencia de radio l; para $0 < e < 1$, una elipse; para $e = 1$ una parábola, y para $e > 1$ una hipérbola —la justificación de que esas ecuaciones polares representan una cónica es un buen material para trabajar en el aula o un buen ejercicio para el lector—.

Otra curva también estudiada por los griegos, y con ecuación en polares muy sencilla, es la *espiral de Arquímedes.* Es la curva que genera un punto que se mueve con velocidad constante a sobre una semirrecta que, a su vez, gira sobre su extremo con velocidad angular constante b. Es un ejercicio sencillo ver que sus ecuaciones polares son:

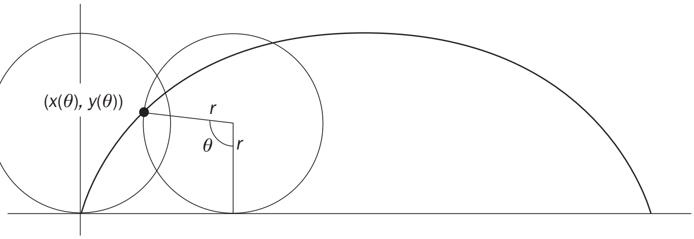
$$r(\theta)=R+\frac{a}{b}\theta,$$

donde R es el punto de la semirrecta desde donde el punto que dibuja la espiral inicia su movimiento.

La última forma de representación de curvas que consideraremos son las *ecuaciones paramétricas*. En este caso, partiendo de la representación de un punto mediante sus coordenadas cartesianas (x, y), a la curva se le asocian dos funciones con respecto a un parámetro t que varía en un intervalo $[a, b]$: una función $x(t)$ para representar la primera coordenada de los puntos de la curva, y otra función $y(t)$ para representar la segunda coordenada. Habitualmente, el parámetro t suele tener una interpretación geométrica más o menos sencilla. La curva surge al representar los pares de números $(x(t), y(t))$ cuando el parámetro t recorre el intervalo $[a, b]$.

En el contexto del cálculo infinitesimal, el ejemplo de coordenadas paramétricas más interesante es el de la *cicloide*, que se convirtió a lo largo del siglo XVII en la curva más "sexy" del momento. La cicloide es la curva descrita por un punto marcado en una circunferencia que rueda sobre una recta sin deslizamientos. Fue Galileo el que la llamó cicloide, y la estudiaron casi todos los grandes matemáticos del siglo XVII, ya fuera para calcular su tangente, el área o la longitud de uno de sus arcos, como para abordar los múltiples y sorprendentes problemas físicos de los que es solución —y que la convierten en una curva muy conveniente para el diseño de puentes u ornamentos arquitectónicos—. La mejor forma de manejar una cicloide es mediante las ecuaciones paramétricas obtenidas tomando como parámetro el desplazamiento angular de la circunferencia:

FIGURA 6



Las ecuaciones paramétricas de un arco de cicloide generado por una circunferencia de radio r vienen dadas por

$$x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen} \theta), y(\theta) = r(1 - \cos \theta), \text{ con } \theta \in [0, 2\pi].$$

Ejercicio 2. Justificar las ecuaciones paramétricas que acabamos de ver.