Mireia López Beltran y Pura Fornals Sánchez

Una mirada distinta de las matrices

VIAJES, RETOS Y MAGIA

CATARATA

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

UNA MIRADA DISTINTA DE LAS MATRICES.
VIAJES, RETOS Y MAGIA

ISBN: 978-84-9097-732-3
DEPÓSITO LEGAL: M-34.502-2019
IBIC: PDZ

ÍNDICE

Introducción

Las matrices, a pesar de su relevancia, no suelen ocupar un papel protagonista en los libros de matemáticas. Su sencillez y versatilidad hacen que sea una herramienta muy utilizada en multitud de aplicaciones matemáticas, lo que también explica, paradójicamente, que no suelan incluirse entre los principales conceptos matemáticos y que su trascendencia quede, por lo tanto, muchas veces eclipsada.

Este volumen pretende ofrecer una mirada distinta de las matrices, que destaque su importancia y su presencia en la vida cotidiana. Su objetivo, sin embargo, no es realizar un recorrido exhaustivo por sus múltiples aplicaciones y los conceptos matemáticos con los que se relaciona, sino más bien plantear un viaje en el que se entremezclen las matemáticas con la historia, también con el juego y la magia, deteniéndonos en aquellos aspectos que tienen mayor interés, con una mirada amplia y diversa que ayude al lector a profundizar en el concepto y a comprender mejor sus aplicaciones.

En este itinerario histórico se pretende destacar a los matemáticos que estuvieron detrás de sus diferentes desarrollos, aquellos que con sus contribuciones procuraron enriquecer el acervo científico de cada época, pues las matemáticas son una ciencia en constante evolución y actualización. Es importante señalar que cada una de estas aportaciones estaba inspirada en el trabajo de los matemáticos anteriores. Las matemáticas progresan, como otras disciplinas, no individualmente, sino fruto de la suma de esfuerzos que configuran una inteligencia colectiva. Los saltos en el tiempo permiten mostrar cómo el concepto de matriz fue fundamental en el pasado, pero también cómo continúa siendo utilizado y desarrollado en la actualidad.

Hemos querido mostrar la potencialidad de las matrices a través de variadas pinceladas que hagan de ellas las protagonistas de los numerosos contextos en los que intervienen; unos contextos que nos son muy cercanos, incluso inesperados. Teniendo todo esto en cuenta, y con el deseo de despertar la curiosidad matemática, hemos trazado las principales paradas de este viaje matemático.

La primera parada del itinerario nos lleva hasta el famoso problema matemático del paseo sobre los puentes de Königsberg, que fue resuelto en el s. XVIII por Leonhard Euler. La relación de este problema con los orígenes de la teoría de grafos permite a su vez enlazar el histórico paseo con una visión matemática de las actuales redes sociales y la World Wide Web.

El segundo capítulo se detiene en la relación de las matrices con la resolución de retos, partiendo de ejemplos del pasado para llegar a Google y la ordenación de páginas del buscador PageRank.

El tercer capítulo propone dos retos encadenados: ver las matrices que hay detrás de las fotografías digitales o en el cifrado de mensajes secretos. En la criptografía, tan actual y necesaria para asegurar la confidencialidad en el envío de nuestras comunicaciones y transacciones, también están presentes las matrices. En la última parte de esta tercera parada se mostrará el cifrado de Hill, una propuesta del matemático del mismo nombre para cifrar y descifrar mensajes usando las matrices y los principios del álgebra lineal.

En el cuarto capítulo, veremos la magia presente en las matrices. De la mano de los cuadrados mágicos, cuadrados latinos y grecolatinos se hará un recorrido por la dimensión más lúdica de las matrices, sin olvidar cómo estos divertimentos pueden usarse en situaciones más serias, como el diseño de experimentos.

La quinta y última parada está dedicada a los determinantes, sus aplicaciones y su estrecha relación con las matrices.

Con este libro esperamos poder transmitir el entusiasmo y la fascinación por las matrices que a nosotras nos llegó gracias a las sesiones del proyecto Estalmat de Catalunya. El problema de los puentes de Königsberg, sus gráficos, su relación con la matriz de adyacencia y el producto de matrices fueron el embrión de nuestro interés por las matrices, el mismo que nos ha llevado a ir recopilando diferentes materiales y aplicaciones matriciales, para después recogerlos, ordenarlos y enlazarlos en el volumen que el lector tiene entre sus manos.

No queremos cerrar esta introducción sin agradecer a la FESPM su apuesta por este libro y por nosotras y sin dejar de mencionar al equipo de revisión y edición, por sus comentarios y su paciencia: Agustín, Serapio, Manuel, Ágata y Carmen.

Finalmente, agradecemos a nuestras familias su comprensión y apoyo, gracias a la cual podemos seguir disfrutando con las matemáticas cada día.

Capítulo 1
Paseos, viajes y redes sociales

El mundo que nos rodea nos plantea retos de muy distinta dificultad y categoría. Algunos de estos problemas actuales o históricos involucran elementos cotidianos como calcular los distintos itinerarios de viajes, averiguar la posibilidad de dar un paseo pasando por distintos puentes o hasta preguntarse sobre las características de las principales redes sociales que inundan nuestras vidas. Uno de los elementos clave al plantear un problema es tener herramientas para representar adecuadamente la situación a resolver: como son los *grafos* y las *matrices de adyacencia*. Los grafos permiten representar un conjunto de objetos (que podrán ser las ciudades de los viajes o las personas en una red social), así como los enlaces que relacionan estos objetos (los vuelos de nuestro viaje o las conexiones al seguir a alguien en Instagram). Las matrices de adyacencia representarán la misma situación numéricamente.

La primera de las situaciones que propone este capítulo nos conduce al histórico problema sobre la existencia, o no, de un paseo por los puentes de Königsberg (actualmente la ciudad rusa de Kaliningrado), resuelto por el matemático Leonhard Euler (1707-1783) mediante el uso de los grafos. A continuación, veremos cómo se presenta el problema de calcular los distintos trayectos de un viaje a partir de un diagrama de vuelos. Después, se caracterizarán las distintas redes sociales y la World Wide Web (www) con grafos y, finalmente, se mostrará también un ejemplo sobre el uso de las matrices en los giros en la geometría del plano.

Un paseo por los puentes de Königsberg

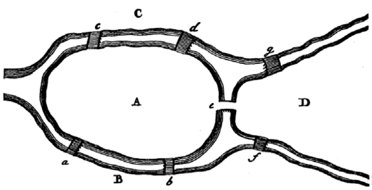
En una carta fechada el 13 de marzo de 1736, Leonhard Euler (1707-1783) escribió: "Me han planteado un problema sobre una isla en la ciudad de Königsberg, rodeada por un río atravesado por siete puentes, y me preguntaron si alguien podía atravesar todos los puentes en un paseo de forma que cada puente se atraviese solo una vez" (Hopkins y Wilson, 2004).

Además, Euler añade en su carta que nadie hasta entonces había resuelto este problema, sin que tampoco se demostrase la imposibilidad de un tal trayecto. Para el matemático este problema era "banal", pero le llamó la atención porque creía que se relacionaba con la llamada *geometría de la posición* que había introducido el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), y estaba convencido de que su resolución necesitaría nuevas técnicas.

En el artículo "The truth about Königsberg" (2004), Brian Hopkins y Robin Wilson indican que no se sabe a ciencia cierta cómo llegó a Euler esta cuestión, pero dan cuenta de la correspondencia que mantuvo Euler con Carl Leonhard Gottlieb Ehler, alcalde de Danzig (en la antigua Prusia y actual Gdansk en Polonia), a 130 kilómetros de Königsberg, en la que abordaban el problema de los puentes.

Estudiando los posibles caminos

Figura 1



Fuente: The Euler Archive.

En el grabado de la figura 1 se representa la situación del problema que se planteó Euler. En él se puede observar una isla (indicada con la letra *A*) y parte de otra (*D*), dos barrios de la ciudad de Königsberg (*B* y *C*) y siete puentes, indicados de la *a* a la *g*, sobre los dos brazos del río Pregel.

La pregunta que se hacía Euler era: ¿es posible hallar un camino que pase una y solo una vez por cada uno de los puentes y empiece y acabe en el mismo punto de la ciudad? Después de probar unas cuantas veces, dibujando con un lápiz sobre la figura, vemos que no parece fácil encontrar el paseo deseado, es más, después de varios intentos se comienza a intuir que este no es posible. Pero ¿cómo nos podemos convencer de que, en efecto, es totalmente imposible hacer un paseo que nos devuelva al inicio después de pasar una y solo una vez por cada uno de los siete puentes?

Euler publicó en 1736 en "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" ("La solución del problema que concierne a la geometría de la posición")[1] la demostración al problema, en lo que se considera el primer artículo en los campos de la topología y la teoría de grafos.

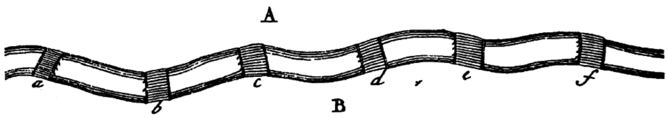
Para presentar su solución, Euler idea un método basado en representar de forma particularmente conveniente los caminos sobre el puente. Para ello, utiliza las letras mayúsculas *A*, *B*, *C*, *D* para cada una de las regiones de tierra separadas por el río (como puede verse en la figura 1). El trayecto de un viajero desde *A* hasta *B*, por el puente *a* o *b*, lo escribe como *AB*. En esta notación la primera letra representa la región que el viajero está dejando, y la segunda letra, la región adonde llega después de cruzar el puente. De este modo, *ABDC* se interpreta como el camino que realiza un viajero que empieza en *A*, atraviesa a *B*, va a *D* y, finalmente, llega a *C*.

1. En Euler (1736) se encuentra la versión original en latín. Hopkins y Wilson (2004) ofrecen un resumen de la obra en inglés (disponible en versión digital) que incluye la resolución propuesta por el autor. En Biggs *et al.* (1986) puede consultarse la traducción al inglés del trabajo (pp. 3-8).

Con esta notación, argumenta que, si es posible concebir un paseo que pase por cada uno de los siete puentes una y solo una vez, entonces la ruta puede ser identificada por ocho letras. También observa que no todas las letras estarán igual representadas, por ejemplo, "las letras A y B están una al lado de la otra dos veces, ya que hay dos puentes, a y b", conectando ambas regiones.

Ejercicio 1. Si se planea una ruta pasando por un número cualesquiera de puentes, ¿cuántas letras tendría esta ruta? ¿Se puede encontrar una expresión general a partir del número n de puentes?

FIGURA 2



Fuente: The Euler Archive.

Para intentar encontrar esta secuencia de ocho letras, Euler reduce el problema a estudiar una sola región A, con un número indeterminado de puentes (figura 2). Primero estudia la situación con un puente. En este caso, existe un camino con dos letras: AB, una de ellas siendo la letra A. Después estudia la situación con tres puentes y en este caso encuentra que el camino tendría cuatro letras: $ABAB$, dos de ellas siendo la letra A. Generalizando, concluye que si el número de puentes p es impar, entonces el número de letras A que debe haber en la secuencia sería $(p + 1) / 2$. Ya que si tenemos p puentes, el camino tendrá $p + 1$ letras (con $p + 1$ número par) donde la mitad de las letras serán A $((p + 1) / 2)$ y la otra mitad B $((p + 1) / 2)$.

Ejercicio 2. Encontrar el número de letras A y B que habrá si el número de puentes p es par. Observación: para hallar la expresión general se deberá tener en cuenta si se empieza por la región A o por la región B.

Como en el problema de Königsberg el número de puentes que llega a cada una de las cuatro regiones es impar, no es necesario ampliar el estudio. Ya que a la región *A* llegan cinco puentes, entonces la letra *A* tiene que aparecer tres veces, y como a las regiones *B*, *C* y *D* llegan tres puentes, entonces cada una de estas tres letras tiene que aparecer dos veces. En total, nueve y “esto no puede ser en una secuencia de ocho letras”. De este modo concluye que el paseo no se puede hacer a través de los siete puentes de Königsberg.

La información queda recogida en una tabla:

Figura 3

Tabla de Euler reproducida en el artículo original

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

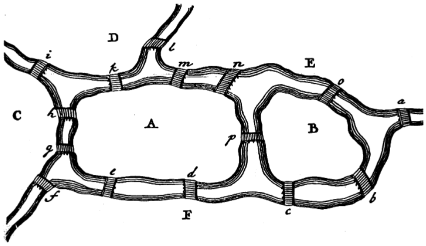
Fuente: The Euler Archive.

En una carta fechada el 3 de abril de 1736, y recogida en el artículo de Hopkins y Wilson, Euler afirma que “este tipo de solución tiene poca relación con las matemáticas, no entiendo por qué esperas que un matemático lo resuelva y no cualquier persona, ya que la solución está basada solo en la razón, y su descubrimiento no depende de ningún principio matemático”.

Quizás esta sensación de estar enfrentándose a un nivel matemático elemental es lo que le llevó a plantearse y resolver el problema general. Para abordarlo, en primer lugar, necesitó continuar el análisis entre los puentes y el número de veces que sale una letra en la secuencia, pero ahora ampliando también a un número de puentes par.

Para ilustrar el método general, propone otro ejemplo con más elementos que el de los siete puentes de Königsberg, concretamente con seis regiones y 15 puentes:

Figura 4



Fuente: The Euler Archive.

Euler estudió el caso general y concluyó que:

- Si hay más de dos áreas a las que conduce un número impar de puentes, ese viaje es imposible.
- Sin embargo, si el número de puentes es impar para exactamente dos áreas, entonces el viaje es posible si comienza en cualquiera de dichas áreas.
- Si, finalmente, no hay áreas a las que conduzca un número impar de puentes, entonces el viaje requerido se puede lograr a partir de cualquiera de ellos.

Euler solo dio una demostración rigurosa de la primera de las tres conclusiones. Las otras dos las probó Carl Hierholzer (1840-1871) y se publicaron en 1871, años después de los trabajos de Euler al respecto.

Contando caminos

Ahora, dejando a un lado el trabajo de Euler, y a partir de la situación de los puentes de Königsberg, se estudian los caminos posibles para ir de una región a otra y el modo en que se puede encontrar una estrategia para contarlos todos[2]. Es decir, ¿de cuántas maneras diferentes se puede ir de una región a

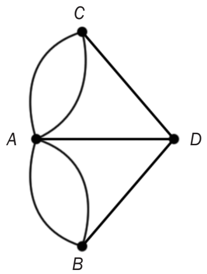
2. Propuesta basada en la idea de Ticó (2004).

otra pasando por un solo puente? Para hacerlo, se representa la situación de la figura 1 con el objeto matemático llamado *grafo*. Un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto.

En nuestro caso, los puntos (que serán los vértices o nodos) representan las cuatro regiones y las líneas (que serán las aristas del grafo), los siete puentes. Con todos los datos del problema se pueden dibujar grafos equivalentes. Uno de ellos puede ser el siguiente:

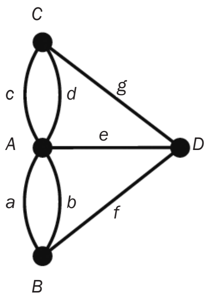
FIGURA 5

Grafo del problema de los puentes de Königsberg



Podemos variar la posición de los vértices e incorporar los nombres de los puentes para obtener otro dibujo equivalente:

FIGURA 6



La información del grafo se puede recoger en la llamada *matriz de adyacencia*. Para un grafo con n vértices, su matriz de adyacencia será una matriz cuadrada de orden n, donde cada elemento representa el número de aristas que unen dos nodos determinados. Fijado un orden en los vértices del grafo, existe una única matriz de adyacencia para cada grafo.

En el caso de los puentes de Königsberg, tenemos un grafo con cuatro vértices. Si se fija el orden de estos según el orden alfabético, quedará A, B, C y D. Si llamamos a la matriz de adyacencia M, en la posición m_{11} aparece el número de puentes que conectan la región A con la A, 0 en nuestro caso; en la posición m_{12} se indica el número de puentes que conectan la región A con la B, 2 en nuestro caso (los puentes *a* y *b*); en la posición m_{13}, el número de puentes que conectan la región A con la C, 2 en nuestro caso (los puentes *c* y *d*); y se completa la primera fila con la posición m_{14}, con el número de puentes que conectan la región A con la D, 1 en nuestro caso (el puente *e*). Del mismo modo se completa la siguiente matriz de adyacencia para el resto de los puentes (aristas):

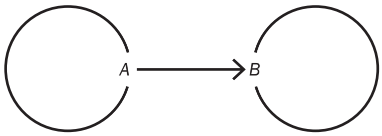
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como en este caso los puentes se pueden cruzar en un sentido y en el contrario, esto implica que la matriz sea *simétrica*. Es decir, existen dos puentes que conectan A con C, $m_{13} = 2$. Pero del mismo modo, estos mismos dos puentes son los que conectan C con A y, por lo tanto, también $m_{31} = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso de existir puentes que no pudieran cruzarse en ambos sentidos, por ejemplo, si uno de los dos sentidos estuviera prohibido a la circulación con coche, habría que indicar el sentido de la conexión en el grafo con una flecha. De este modo aparece un *grafo dirigido* y en este caso, la matriz de adyacencia no sería simétrica, como se muestra a continuación:

FIGURA 7



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Detalles de la notación

La colección de datos ordenados que se obtiene se llama *matriz* y se denota entre dos paréntesis que engloban todos los valores. $A = (a_{ij})$, donde i indicará el número de fila y j indicará el número de columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La disposición de los elementos en tabla y la notación de subíndices dobles se deben a Augustin Louis Cauchy (1789-1857), aunque este la empleó para expresar determinantes, de los que hablaremos en el último capítulo de este libro.

El número de filas m y el número de columnas n determinan la dimensión de la matriz, que se dirá es de dimensión m x n.

Ejemplo 1

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 2 x 3, que contiene seis elementos.

Esta matriz podría corresponder a las ventas realizadas por tres vendedores en turno de mañana y tarde, entendiendo que el segundo vendedor, en el turno de tarde ($a_{22} = -1$), solo ha atendido una devolución y que el tercer vendedor no ha vendido nada por la tarde ($a_{23} = 0$). Como puede verse, resulta una manera muy útil de anotar los datos y comparar el trabajo de los empleados.

Ahora se plantea otra cuestión: ¿de cuántas maneras diferentes se puede ir de una región a otra pasando por *exactamente dos* puentes, no necesariamente distintos? Calculemos todos los elementos para obtener la matriz resultante N.

Para empezar, se considera, por ejemplo, de cuántas maneras diferentes se puede ir de la región C a la región D pasando exactamente por dos puentes. La respuesta es dos:

Figura 8

$$C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{e} D$$
$$C \xrightarrow{d} A \xrightarrow{e} D$$

Se tiene que $n_{34} = 2$. Por la simetría de la situación, $n_{43} = 2$. Se calculan ahora los elementos de la diagonal. Es posible, por ejemplo, volver a casa yendo y volviendo por el mismo puente. Para ello hay que pasar por otra región. Es posible ir de A a A pasando por la región B. Como en este caso hay dos puentes que conectan A con B (y B con A por simetría), se tiene que:

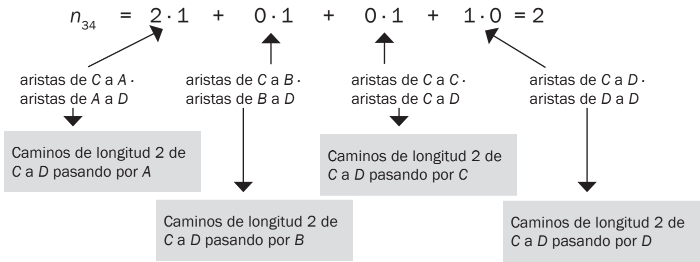
Figura 9

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a} A$$
$$A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{b} A$$
$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A$$
$$A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} A$$

Del mismo modo, hay cuatro opciones para ir de A a A pasando por la región C. Por último, hay una única opción para ir de A a A pasando por D. Por lo tanto, en total, hay $4 + 4 + 1 = 9$, que será n_{11}. De igual manera, se calculan el resto de los elementos de la diagonal.

Para obtener los restantes valores de N se usa la matriz M. Para calcular el valor n_{34}, es decir, el número de caminos para ir de C a D pasando exactamente por dos puentes, se sigue la misma estrategia que para calcular n_{11}. Primero se calculan los caminos para ir de C a D pasando por A. Pasando por un único puente, se puede ir de dos maneras de C a A (tal y como indica la matriz M), y una vez en A se puede ir de una sola manera a D (cruzando solo un puente). En total $2 \cdot 1 = 2$ maneras de ir de C a D pasando por A. Razonando de la misma forma para calcular los caminos pasando por B, se observa que no hay ningún camino, ya que no es posible ir de C a B pasando por un único puente. Tampoco es posible ir de C a C, lo que hace imposible ir de C a D pasando por C. Del mismo modo como no hay camino de D a D, la última opción también es cero. Por eso:

Figura 10



Con estos cálculos se obtiene la matriz N donde se recoge la cantidad de todos los posibles caminos para ir entre dos regiones pasando por exactamente dos puentes (sin necesidad que sean distintos):

$$N = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calcular con la estrategia anterior el resto de los elementos de la matriz *N*.

Se pueden visualizar estos elementos sobre las matrices *M* y *N* de la siguiente forma:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Usando los elementos de la matriz *M*, la expresión de la figura anterior se escribe como:

$$n_{34} = m_{31} \cdot m_{14} + m_{32} \cdot m_{24} + m_{33} \cdot m_{34} + m_{34} \cdot m_{44}$$

que se sintetiza usando la notación de sumatorio con la fórmula

$$n_{34} = \sum_{k=1}^{4} m_{ik} \cdot m_{kj}$$

Esta combinación de productos y sumas define el producto de matrices, que de modo general se expresa como sigue:

Sean A una matriz m x n, $A = (a\text{ij})$ y B una matriz n x p, $B = (b\text{ij})$; entonces, la matriz producto C, tiene dimensión m x p y sus elementos vienen dados por la expresión:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

En el caso anterior, $N = M^2 = M \cdot M$

Ejercicio 4. Calcular el producto de $M \cdot M$ con la expresión anterior y comprobar que se obtiene *N*.

Pero ¿cuántos serán los caminos posibles entre dos regiones pasando por uno o dos puentes? ¿Cómo se puede obtener este resultado? Para ello, se añadirán todas las posibilidades de conseguirlo con exactamente un puente y con exactamente dos puentes. En este caso, se suman los valores correspondientes de las matrices M y N. Por lo tanto:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A partir de la situación de los puentes de Königsberg, de su representación con un grafo y su matriz de adyacencia, han aparecido las operaciones básicas de la suma y el producto con matrices. Aunque la definición del producto de matrices pueda parecer una operación artificial y poco intuitiva, a partir del recuento de caminos en una situación concreta la operación se deduce de manera natural y resulta por ello mucho más comprensible.

Ejemplo 2

Siguiendo con el ejemplo de las ventas, supongamos que disponemos de otra matriz (B) con las ventas hechas por los mismos trabajadores otro día; calcular las ventas totales de los dos días resultará muy fácil sumando elemento a elemento, $a_{ij} + b_{ij}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+4 & 4+0 \\ 3+1 & -1+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

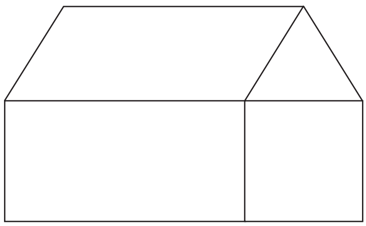
La *suma de las dos matrices* dará en este caso las ventas de los tres trabajadores en el conjunto de dos días.

Esta operación se puede generalizar a tantas matrices como sea necesario, todas de dimensión n x m.

Dibujos de un solo trazo

El problema tratado tiene una estrecha relación con los dibujos de un solo trazo que muchos de los lectores habrán jugado a resolver durante su infancia.

FIGURA 11



Como en el problema de los puentes de Königsberg, se cuenta el número de aristas que inciden en cada vértice del dibujo. En el caso de la figura 11 hay siete vértices con un número de aristas incidentes que son: 2, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 2. Se observa que hay más de dos vértices con un número de aristas impar, y, por lo tanto, recordando las conclusiones de Euler, será imposible realizar el dibujo de un solo trazo.

Los caminos que pasan una sola vez por todos los lados reciben el nombre de *caminos eulerianos* y los que pasan por todos los vértices una sola vez, *caminos hamiltonianos*. En el Museo de Matemáticas de Catalunya (MMACA), se pueden encontrar un dodecaedro y su representación plana (*grafo asociado*) para practicar estos recorridos.

Figura 12
Dodecaedro

Fuente: Museo de Matemáticas de Catalunya.

Figura 13
Grafo de dodecaedro

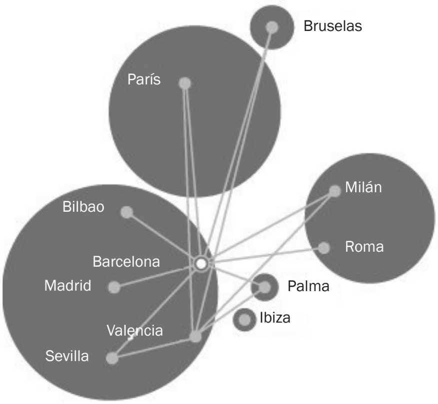
Fuente: Museo de Matemáticas de Catalunya.

Viajes y vuelos

Ahora se considera otra situación similar, por ejemplo, los vuelos entre diferentes ciudades europeas de una compañía aérea.

Ejemplo 3
Se obtiene el siguiente grafo representando cada ciudad con un vértice, y cada arista uniendo dos ciudades con vuelo directo para esta compañía aérea:

Figura 14



Si se considera el orden de las ciudades por orden alfabético (Barcelona, Bilbao, Bruselas, Ibiza, Madrid, Milán, París, Palma, Roma, Sevilla, Valencia), se obtiene la matriz de adyacencia:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa las conexiones con un vuelo entre dos ciudades. En este caso, el elemento a_{15}= 1 indica que hay un vuelo entre Barcelona y Milán y $a_{2,10}$= 0 indica que no hay vuelos entre Bilbao y Valencia. La matriz es simétrica, puesto que el diagrama no nos indica que los vuelos sean solo de ida en ningún caso. También es fácil ver que tiene ceros en la diagonal, puesto que, según el gráfico, no se puede volar de una ciudad a ella misma sin hacer escala.

Al igual que en el caso anterior, ahora es posible contar las posibles conexiones entre dos ciudades con una escala (es decir, usando dos vuelos). Se plantea el producto del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

En este caso se ha resaltado el cálculo de $b_{11} = 8$, como producto de la primera fila por la primera columna. Si se hace lo mismo con el resto de elementos, aparece la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0&5\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&2&1&2&2&2&1&2&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&2&1&2&2&2&1&2&0\\ 0&1&2&1&2&2&2&1&2&0\\ 0&1&2&1&2&2&2&1&2&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&2&1&2&2&2&1&2&0\\ 5&0&0&0&0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix}$$

Y se observan las mismas relaciones, $b_{1,10} = 5$ indica que hay cinco posibilidades de volar de Barcelona a Valencia haciendo una escala.
Se puede obtener B como $A \cdot A = A^2$. Y, como antes, se pueden obtener los posibles vuelos entre dos ciudades, con un vuelo o con dos vuelos (una escala), haciendo: $C = A + B$:

$$C = \begin{pmatrix} 8&1&1&1&1&1&1&1&1&5\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&2&1&2&2&2&1&2&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&2&1&2&2&2&1&2&1\\ 1&1&2&1&2&2&2&1&2&1\\ 1&1&2&1&2&2&2&1&2&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&2&1&2&2&2&1&2&1\\ 5&0&1&0&1&1&1&0&1&5 \end{pmatrix}$$

Una vez llegados a este punto, se pueden calcular las posibles conexiones entre dos ciudades con exactamente tres vuelos (dos escalas) a partir de la multiplicación $A \cdot A^2 = A \cdot B$. Y de manera general, con exactamente n vuelos, a partir de la expresión A^n.

Ejercicio 5. Calcular *B, C* y A^3 con el producto de matrices y comprobar el resultado con las matrices anteriores.

La red y las redes sociales

Tanto la situación del paseo por los puentes de Königsberg como los vuelos de una compañía aérea conducen a una matriz de adyacencia simétrica (correspondiente a un grafo no dirigido). En ambos casos, el puente conectaba las regiones *A* y *B*, y se podía ir tanto de *A* hacia *B* como de *B* hacia *A*. Del mismo modo, el diagrama de vuelos incluía tanto ida como vuelta entre cualquiera de los destinos. Pero esto no tiene que ser siempre así; por ejemplo, las redes sociales o las mismas páginas web ilustran diferentes situaciones.

Facebook e Instagram

En "Teoría de grafos y redes sociales: un enfoque matemático", de López-Gómez, se observa que la red de Facebook tiene un comportamiento como los ejemplos anteriores: si el usuario *A* es amigo del usuario *B*, esto implica que *B* es amigo de *A*. Por lo tanto, para representar esta red social aparece también un grafo no dirigido con una matriz de adyacencia simétrica. Además, también tendría valores cero en la diagonal.

Pero no pasa lo mismo analizando Instagram. En este caso, el hecho que un usuario *A* siga a un usuario *B* no implica que el *instagrammer B* siga al usuario *A*. Es decir, es necesario un grafo dirigido para representar esta red social y este tendrá una matriz de adyacencia no simétrica. En este caso también se obtiene la diagonal con valores nulos.

Twitter y la World Wide Web

Parece claro que no todas las matrices de adyacencia tienen como máximo el valor uno, por eso López-Gómez propone estudiar el caso de la concurrencia de dos *hashtags* en un tuit. En este caso puede haber más de un tuit en que dos *hashtags* estén de manera simultánea. Por lo tanto, es necesario un *grafo pesado* (con pesos en sus aristas) para representar la situación. Su matriz de adyacencia tendrá valores distintos de cero según el número de tuits donde ocurra la simultaneidad.

También podríamos observar el ejemplo de estudiar la World Wide Web y los enlaces entre las páginas web. En este caso hay páginas web que incluyen vínculos a sí mismas y, por lo tanto, esta situación se representa con un grafo con autoenlaces y así estos elementos de la diagonal serían distintos de cero.

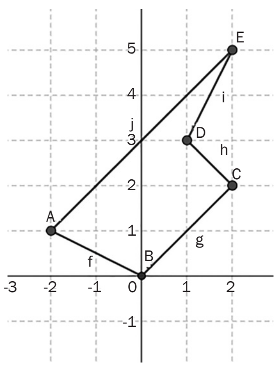
Rotación de imágenes con matrices

Se acaba este capítulo con un ejemplo de uso de las matrices y su producto en los giros de imágenes. En los ordenadores, para mover los distintos objetos, se representan los puntos que los definen en una matriz y después se usa el producto de matrices para conseguir las nuevas coordenadas después de aplicar el giro.

Ejemplo 4

Para visualizar este funcionamiento, se toma, por ejemplo, el siguiente dibujo poligonal y su matriz asociada:

Figura 15



$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si se quiere obtener el mismo objeto con una rotación de 90º, se debe multiplicar esta matriz por la de rotación, con θ =90º:

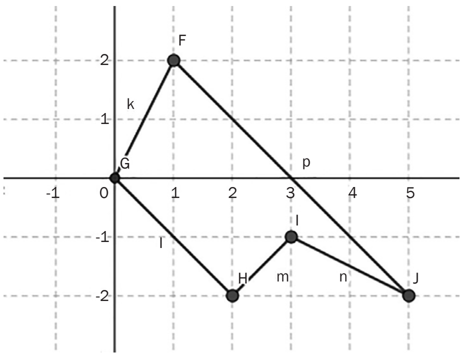
$$R = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz rota la figura un ángulo de 90º en el sentido de las agujas del reloj, tomando como centro de rotación el origen de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Y proporciona las coordenadas de la siguiente figura:

Figura 16



Para rotaciones respecto a ejes, en tres dimensiones y otros movimientos, harían falta las matrices correspondientes.