Ana Carvajal Sánchez y José Luis Muñoz Casado

Demostraciones visuales en matemáticas

VER PARA PENSAR

CATARATA

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

DISEÑO DE CUBIERTA: ESTUDIO SÁNCHEZ/LACASTA

LAS FIGURAS CUYA FUENTE NO SE ESPECIFICA AL PIE HAN SIDO ELABORADAS POR LOS AUTORES CON EL PROGRAMA GEOGEBRA

DEMOSTRACIONES VISUALES EN MATEMÁTICAS
VER PARA PENSAR

ISBN: 978-84-9097-714-9
DEPÓSITO LEGAL: M-20.024-2019
IBIC: PDZ

A Antonio Carvajal, mi padre.
Por regalarme su manera de ver las matemáticas.

A Maribel y Myriam, mi madre y hermana.
Porque ellas me ven.

A Edu, Diego y Olivia.
Por hacerme ver lo que de verdad importa.
A. C.

A Gema.
Por tantas horas desinteresadas hablando de matemáticas.
J. L. M.

ÍNDICE

Introducción

Las imágenes siempre han sido un poderoso recurso para transmitir información o para representar la realidad. Dibujar es una actividad intrínseca al ser humano, que ha desarrollado desde la Prehistoria hasta nuestros días.

Los “dibujos” son parte fundamental del proceso matemático, a través de ellos es posible mostrar o ejemplificar complejas ideas matemáticas de forma sencilla. Y esto es precisamente este libro: un libro de dibujos que pretende transmitir ideas matemáticas.

Nuestra experiencia con los y las alumnas en el aula y nuestra práctica en la elaboración de textos didácticos nos ha permitido comprobar, una y otra vez, que tan importante es demostrar de manera formal una certeza matemática como generar actividades intelectuales que sugieran una idea o pensamiento. Entre ellas se encuentran para nosotros los “dibujos” o, hablando formalmente, las demostraciones visuales.

Las demostraciones visuales no son estrictamente demostraciones formales, pero son imágenes bellísimas relacionadas con propiedades o teoremas que generan ideas. También son un recurso fantástico para el trabajo intelectual matemático.

Sea como fuere, ¿no es bueno recurrir a aquello que nos ayuda a ver las cosas mejor, con más claridad y que nos facilita la generación de ideas? Las demostraciones visuales, los diagramas, las imágenes, etc., aun con todos sus inconvenientes, son una herramienta fundamental para la resolución de problemas y la clave para comprender diversos razonamientos inductivos. Todo aquello que ayude al entendimiento es bueno.

Por otro lado, las demostraciones visuales no son demostraciones que se utilicen exclusivamente en contextos geométricos. Son útiles en diferentes áreas de la matemática como el álgebra, la aritmética, la combinatoria y probabilidad, etc.

En este libro presentaremos algunas de las demostraciones más elementales de diferentes áreas, acompañando a las mismas con su contexto histórico o didáctico.

Por tanto, se consideren o no demostraciones, te invitamos a disfrutar de las imágenes que se presentan en estas páginas.

¡Anímate! Solamente tienes que ver… para pensar.

Capítulo 1

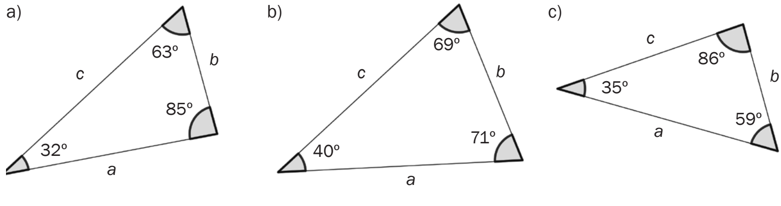
Demostraciones visuales

> *[…] in many cases a dull proof can be supplemented by a geometric analogue so simple and beautiful that the truth of a theorem is almost seen at a single glance.*
>
> [(…) en muchos casos una demostración pesada o aburrida puede complementarse con otra análoga geométrica tan simple y bella que la verdad de un teorema se vea casi de un solo vistazo.]
>
> Martin Gardner

Una de las primeras enseñanzas que la lógica matemática nos ofrece es que no se puede generalizar una afirmación solamente porque conozcamos varios ejemplos que la cumplan. Es decir: si un día una persona coge un taxi y quien conduce es una mujer, al día siguiente coge otro taxi y quien conduce es otra mujer y al día siguiente coge otro taxi distinto y resulta que también es una mujer quien conduce… ¿se podría afirmar que todas las personas que conducen un taxi son mujeres? La respuesta, evidentemente, es *no*.

Lo mismo ocurre con las afirmaciones matemáticas. Si, por ejemplo, observamos la medida de los ángulos de estos triángulos, ¿qué observamos?

Figura 1



Entre otras cosas, observamos que la suma de la medida de los ángulos de cada triángulo es de 180º. Esto nos puede llevar a pensar que ese dato se cumple para cualquier triángulo, pero ¿podemos afirmarlo sin necesidad de comprobarlo en todos los casos? No, debemos dar con un razonamiento que pueda aplicarse de forma general a cualquier triángulo, independientemente de sus características concretas.

Antiguamente, los griegos ya rechazaban la verdad en matemáticas si solo se basaba en la observación de ejemplos concretos. Euclides planteó una geometría basada en un pequeño número de axiomas (principios fundamentales tan evidentes que no requieren demostración alguna) a partir de los cuales y solo aplicando argumentos lógicos se demostraban proposiciones, postulados y teoremas. Esta mirada de Euclides es la base del método axiomático actual, en el que, a partir de ciertas afirmaciones sobre conceptos matemáticos universales que se consideran verdades y utilizando solamente argumentos de la lógica, se demuestran otras proposiciones o teoremas.

Conjetura

Juicio que se forma de algo por indicios u observaciones.

Proposición

Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar.

Axioma

Proposición tan clara y evidente que se admite sin demostración. Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría.

Postulado

Proposición cuya verdad se admite sin pruebas para servir de base en ulteriores razonamientos.

Teorema

Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas, postulados o de otras proposiciones ya demostradas.

La *demostración* es la comprobación de que la hipótesis se cumple de forma general. Así, se llega a una verdad o certeza matemática que sabemos que es cierta en todos los casos.

CONJETURA
↓
axiomas
↓
argumentos lógicos
↓
CERTEZA

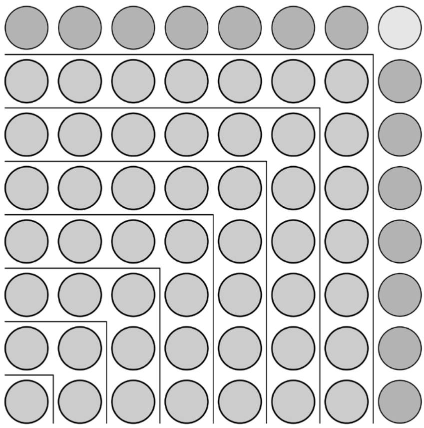
Hay distintos tipos de demostraciones lógicas, cada una de ellas adecuada para diferentes situaciones: demostración directa, demostración por inducción, demostración por reducción al absurdo, etc.

¿Y qué ocurre con las llamadas *demostraciones visuales*? ¿Son o no son demostraciones matemáticas? Las demostraciones visuales representan, de forma gráfica, una idea o contenido matemático que ejemplifica una proposición o teorema. Provocan dos tipos de reacciones en el mundo matemático:

1. Hay quienes consideran que no son realmente demostraciones formales, que además pueden llevar a confusión y, por ende, las evitan en su quehacer matemático.
2. Hay quienes afirman que efectivamente son una forma de visualizar y comprender resultados.

De manera general, aquellos que rechazan estas imágenes como recurso vinculado a la demostración matemática justifican su postura fundamentalmente porque consideran que la imagen siempre representa un caso particular. Por ejemplo, consideremos esta figura —que se apoya en la demostración de Nicómaco de Gerasa—, que pretende demostrar que *la suma de los n primeros números impares es* n^2.

Figura 2



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Indudablemente, la figura sugiere que *la suma de los n primeros números impares es n^2*. Pero ¿podría suceder que se cumpla para los ocho primeros números impares, tal y como muestra la figura, y no para los siguientes? Siempre puede quedar la duda, y es totalmente comprensible.

Gracias a la tecnología, una imagen estática puede convertirse en dinámica y, así, pasar de mostrar varios casos particulares (en la anterior figura, la suma de hasta los ocho primeros números impares) a mostrar un número infinito de casos utilizando el movimiento para convencernos de que efectivamente la demostración está contenida en dicha secuencia de imágenes. En este sentido, actualmente existen programas de *software* libre, como GeoGebra, que proporcionan un entorno ideal para observar y manipular los datos y así sacar conclusiones.

Aun así, incluso utilizando demostraciones visuales dinámicas como facilitadoras de la comprensión de una certeza matemática, es inevitable sentir la necesidad de demostrar de manera formal el resultado que la imagen evoca.

Ejercicio 1. Utiliza este código QR para comprobar de manera dinámica que la suma de los n primeros números impares es n^2.

FIGURA 3

Quizá la segunda reacción que mencionábamos anteriormente, favorable al recurso de las demostraciones visuales, sea la clave para comprender cuál es realmente la función de estas imágenes: facilitar la comprensión de una idea que, solamente con su demostración formal, se antoja complicada. Ver para comprender, ver para pensar.

Un paseo por la historia del pensamiento visual

Utilizar una imagen para representar una idea o una situación es algo que se ha hecho a lo largo de la historia del ser humano. Si acotamos nuestro rango de imágenes, y tenemos en cuenta solamente las vinculadas a ideas matemáticas o imágenes con contenido matemático, podemos afirmar que estas existen desde hace más de dos mil años.

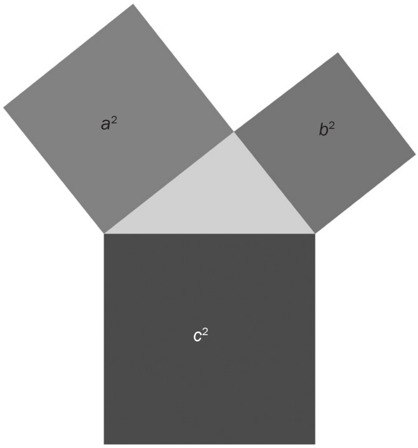
Uno de los documentos matemáticos chinos más antiguos que se conocen es el tratado *Chou Pei Suan Ching*, escrito probablemente entre el año 500 y el 300 a. C. El texto del libro es un diálogo entre un príncipe y su ministro, y cuenta diferentes aspectos de la matemática como ciertas propiedades del triángulo rectángulo y algunas indicaciones sobre el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

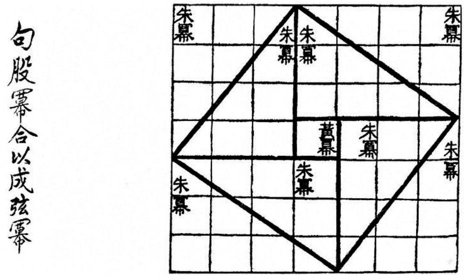
FIGURA 4



Aunque en el libro este teorema se presenta fundamentalmente de manera algebraica, también incluye una demostración gráfica, que ofrecemos a continuación, aplicada a un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 unidades (tomando como unidad el lado del cuadrado de la cuadrícula sobre la que está realizado el dibujo) (figura 5).

Figura 5

Teorema de Pitágoras (Chou Pei Ching, 500-300 a. C.).

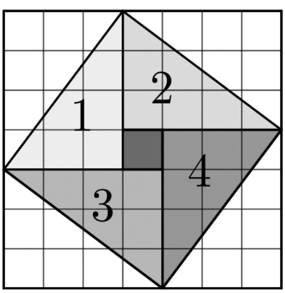


Fuente: Wikimedia Commons.

Para comprender el ejercicio de pensamiento visual en esta figura sobre el teorema de Pitágoras, basta con observar que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma del área de los cuadrados de los lados 3 y 4, respectivamente.

Observamos el triángulo 1 de la figura 6. Es un triángulo cuyos catetos miden 3 y 4 unidades. Es fácil ver que el cuadrado de la hipotenusa del triángulo 1 es la figura formada por los triángulos 1, 2, 3 y 4, y el cuadradito interior que es la base de la construcción de la cuadrícula.

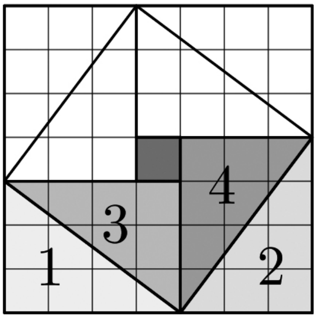
Figura 6



A continuación, movemos los triángulos 1 y 2 a la base inferior de la cuadrícula tal y como se muestra en la figura 7.

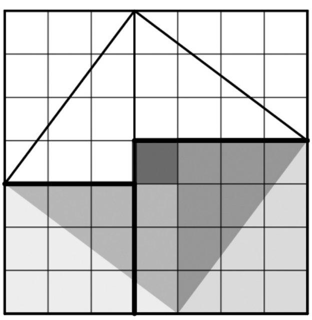
Como hemos movido algunas figuras de sitio pero no han sido modificadas, es evidente que el área de esta nueva figura es igual al área del cuadrado definido en la figura 6. Ambas están formadas por los triángulos 1, 2, 3 y 4, y el cuadrado base de la cuadrícula.

FIGURA 7



Por último, redefinimos la figura anterior para obtener la figura 8. En ella, se observa cómo los triángulos 1, 2, 3 y 4, y el cuadrado interior se pueden ver como dos cuadrados de lados 3 y 4 respectivamente, que eran lo que medían los catetos del triángulo 1.

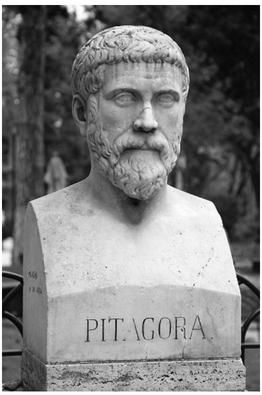
FIGURA 8



Por tanto, como las dos figuras son la misma, queda demostrado que el cuadrado de la hipotenusa del triángulo 1 es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

En el capítulo 5, dedicado expresamente a este famoso teorema, se explicará con más detalle el razonamiento que hay detrás de sus diferentes demostraciones visuales, como las atribuidas al mismo Pitágoras (ca. 580-500 a. C.).

Figura 9
Pitágoras de Samos



Fuente: Getty Images.

La siguiente contribución importante al mundo de las imágenes con contenido matemático la realizó Euclides de Alejandría (siglo III a. C.) en una de las obras más importantes de la historia de las matemáticas: *Los Elementos*. En este tratado, Euclides cubre toda la matemática elemental de la época: aritmética, geometría de puntos, rectas, planos, círculos y esferas, además del álgebra geométrica.

Figura 10

Euclides de Alejandría

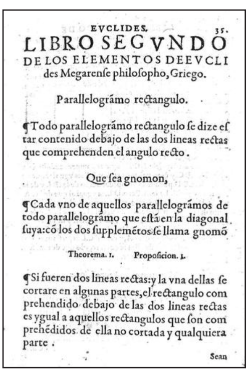
Fuente: Wikimedia Commons.

Los Elementos está dividido en 13 capítulos o libros: los seis primeros dedicados a la geometría elemental plana, los tres siguientes a la teoría de números, el décimo a los números inconmensurables y los tres últimos a la geometría de los sólidos.

En el libro II, Euclides suple la carencia de la existencia del lenguaje algebraico tal y como se utiliza hoy en día con el manejo magistral del *álgebra geométrica*, que no es otra cosa que mostrar expresiones algebraicas a través de imágenes o diagramas que expresen la misma información.

Figura 11

Los Elementos, de Euclides



EVCLIDES. 35.

LIBRO SEGVNDO DE LOS ELEMENTOS DE EVCLIdes Megarense philosopho, Griego.

Parallelográmo rectangulo.

¶Todo parallelográmo rectangulo se dize estar contenido debajo de las dos lineas rectas que comprehenden el angulo recto.

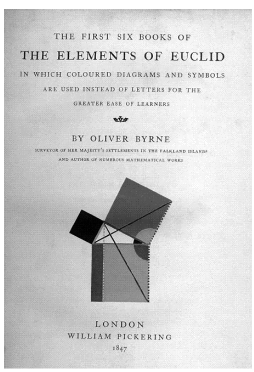
Que sea gnomon,

¶Cada vno de aquellos parallelográmos de todo parallelográmo que está en la diagonal suya: cō los dos supplemētos se llama gnomō

Theorema. 1. Proposicion. 1.

¶Si fueren dos lineas rectas: y la vna dellas se cortare en algunas partes, el rectangulo comprehendido debajo de las dos lineas rectas es ygual a aquellos rectangulos que son comprehēdidos de ella no cortada y qualquiera parte.

Sean



THE FIRST SIX BOOKS OF

THE ELEMENTS OF EUCLID

IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE

SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON

WILLIAM PICKERING

1847

Fuente: Wikimedia Commons.

Otros ejemplos históricos del pensamiento visual los encontramos en figuras como Pappus de Alejandría (ca. 300), Bhaskara (ca. 1114-1185), Leonardo Da Vinci (1452-1519), entre otros. Todos ellos utilizaban la imagen para mostrar verdades matemáticas en sus estudios.

Aquí mostramos algunas de esas figuras:

Figura 12

Teorema de Pappus, Pappus de Alejandría (ca. 300)

"Si en un par de rectas se escogen tres puntos al azar en cada una y se unen dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta"

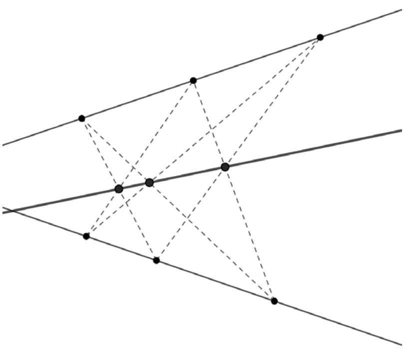
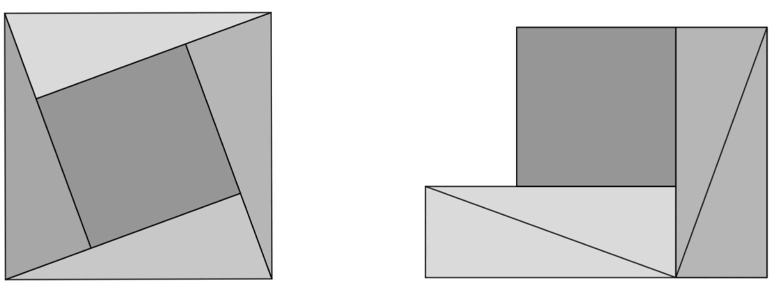


Figura 13*

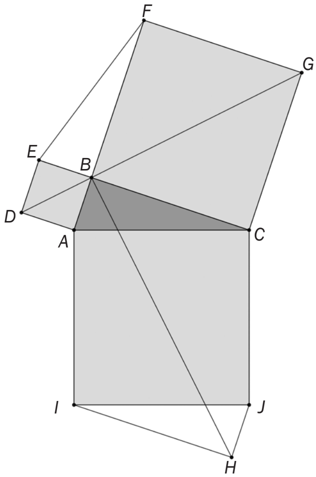
Teorema de Pitágoras, Bhaskara (ca. 1114-1185)



* La justificación de esta demostración de Bhaskara se muestra en el capítulo 5.

Figura 14*

Teorema de Pitágoras, Leonardo da Vinci (1452-1519)

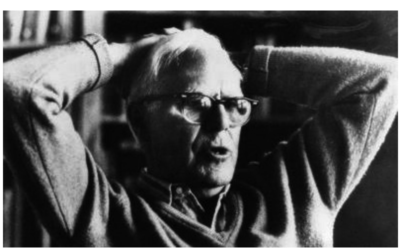


* La justificacion de esta demostración de Leonardo da Vinci se muestra en el capítulo 5.

Pero, como hemos visto al comienzo, no está claro que mostrar una verdad matemática a través de una imagen sea sinónimo de demostrarla. ¿Cuándo se comenzaron a relacionar las imágenes con el concepto de *demostración*?

Martin Gardner (1914-2010)

Gran divulgador científico estadounidense, filósofo y mago ilusionista, cuya fama está ligada a sus libros de matemática recreativa.



Fuente: Wikimedia Commons.

Martin Gardner fue uno de los pioneros en hablar abiertamente de esta relación. En 1973, publicó "'Look-see' diagrams that offer visual proof of complex algebraic formulas" ['Mirar-ver' diagramas que ofrecen una prueba visual de fórmulas algebraicas complejas] en la sección "Mathematical Games" [Juegos Matemáticos] de la revista *Scientific American*[1].

Figura 15

Cubierta de la revista *Scientific American*, octubre de 1973

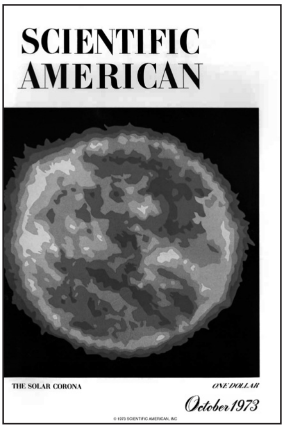
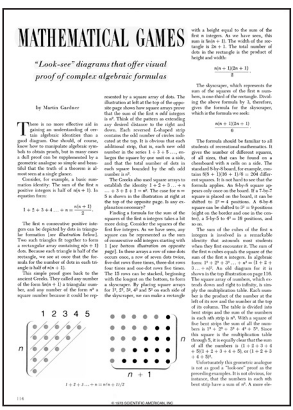


Figura 16

Artículo "Mathematical games"



MATHEMATICAL GAMES

"Look-see" diagrams that offer visual proof of complex algebraic formulas

by Martin Gardner

There is no more effective aid in gaining an understanding of certain algebraic identities than a good diagram. One should, of course, know how to manipulate algebraic symbols to obtain proofs, but in many cases a dull proof can be supplemented by a geometric analogue so simple and beautiful that the truth of a theorem is almost seen at a single glance.

Consider, for example, a basic summation identity: The sum of the first n positive integers is half of $n(n+1)$. In equation form:

$$1+2+3+4\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

The first n consecutive positive integers can be depicted by dots in triangular formation [*see illustration below*]. Two such triangles fit together to form a rectangular array containing $n(n+1)$ dots. Because each triangle is half of the rectangle, we see at once that the formula for the number of dots in each triangle is half of $n(n+1)$.

This simple proof goes back to the ancient Greeks. They called any number of the form $½n(n+1)$ a triangular number, and any number of the form n^2 a square number because it could be represented by a square array of dots. The illustration at left at the top of the opposite page shows how square arrays prove that the sum of the first n *odd* integers is n^2. Think of the pattern as extending any desired distance to the right and down. Each reversed *L*-shaped strip contains the odd number of circles indicated at the top. It is obvious that each additional strip, that is, each new odd number in the series $1+3+5\ldots$, enlarges the square by one unit on a side, and that the total number of dots in each square bounded by the nth odd number is n^2.

The Greeks also used square arrays to establish the identity $1+2+3\ldots+n\ldots+3+2+1=n^2$. The case for $n=5$ is shown in the illustration at right at the top of the opposite page. Is any explanation necessary?

Finding a formula for the sum of the squares of the first n integers takes a bit more doing. Consider the squares of the first five integers. As we have seen, any square can be represented as the sum of consecutive odd integers starting with 1 [*see bottom illustration on opposite page*]. In these arrays a row of nine dots occurs once, a row of seven dots twice, five-dot rows three times, three-dot rows four times and one-dot rows five times. The 15 rows can be stacked, beginning with the longest on the bottom, to form a skyscraper. By placing square arrays for 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 and 5^2 on each side of the skyscraper, we can make a rectangle with a height equal to the sum of the first n integers. As we have seen, this sum is $½n(n+1)$. The width of the rectangle is $2n+1$. The total number of dots in the rectangle is the product of height and width:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

The skyscraper, which represents the sum of the squares of the first n numbers, is one-third of the rectangle. Dividing the above formula by 3, therefore, gives the formula for the skyscraper, which is the formula we seek:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

The formula should be familiar to all students of recreational mathematics. It gives the number of different squares, of all sizes, that can be found on a chessboard with n cells on a side. The standard 8-by-8 board, for example, contains $8(8+1)(16+1)/6=204$ different squares. It is not hard to see that the formula applies. An 8-by-8 square appears only once on the board. If a 7-by-7 square is placed on the board, it can be shifted to $2^2=4$ positions. A 6-by-6 square can be shifted to $3^2=9$ positions (eight on the border and one in the center), a 5-by-5 to $4^2=16$ positions, and so on.

The sum of the cubes of the first n integers is involved in a remarkable identity that astounds most students when they first encounter it. The sum of the first n cubes equals the square of the sum of the first n integers. In algebraic form: $1^3+2^3+3^3\ldots+n^3=(1+2+3\ldots+n)^2$. An old diagram for it is shown in the top illustration on page 116. The square array of numbers, which extends down and right to infinity, is simply the multiplication table. Each number is the product of the number at the left of its row and the number at the top of its column. The table is divided into bent strips and the sum of the numbers in each nth strip is n^3. With a square of five bent strips the sum of all the numbers is $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$. Since this square is the multiplication table through 5, it is equally clear that the sum of all the numbers is $(1+2+3+4+5)(1+2+3+4+5)$, or $(1+2+3+4+5)^2$.

Unfortunately this geometric analogue is not as good a "look-see" proof as the preceding examples. It is not obvious, for instance, that the numbers in each nth bent strip have a sum of n^3. A more ele-

1 2 3 4 5

n

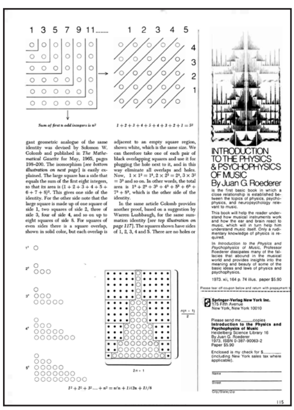
n

$n+1$

$1+2+3\ldots+n=n(n+1)/2$

114

© 1973 SCIENTIFIC AMERICAN, INC



1 3 5 7 9 11........

Sum of first n odd integers is n^2

1 2 3 4 5

4 3 2 1

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$

gant geometric analogue of the same identity was devised by Solomon W. Golomb and published in *The Mathematical Gazette* for May, 1965, pages 198–200. The isomorphism [*see bottom illustration on next page*] is easily explained. The large square has a side that equals the sum of the first eight integers, so that its area is $(1+2+3+4+5+6+7+8)^2$. This gives one side of the identity. For the other side note that the large square is made up of one square of side 1, two squares of side 2, three of side 3, four of side 4, and so on up to eight squares of side 8. For squares of even sides there is a square overlap, shown in solid color, but each overlap is adjacent to an empty square region, shown white, which is the same size. We can therefore take one of each pair of black overlapping squares and use it for plugging the hole next to it, and in this way eliminate all overlaps and holes. Now, $1\times1^2=1^3$, $2\times2^2=2^3$, $3\times3^2=3^3$ and so on. In other words, the total area is $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3$, which is the other side of the identity.

In the same article Golomb provides another proof, based on a suggestion by Warren Lushbaugh, for the same summation identity [*see top illustration on page 117*]. The squares shown have sides of 1, 2, 3, 4 and 5. There are no holes or

1^2

2^2

3^2

4^2

5^2

$\frac{n(n+1)}{2}$

$2n+1$

$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

INTRODUCTION TO THE PHYSICS & PSYCHOPHYSICS OF MUSIC

By Juan G. Roederer

is the first basic book in which a close relationship is established between the topics of physics, psychophysics, and neuropsychology relevant to music.

This book will help the reader understand how musical instruments work and how the ear and brain react to music, which will in turn help him understand music itself. Only a rudimentary knowledge of physics is required.

In *Introduction to the Physics and Psychophysics of Music*, Professor Roederer dissipates many of the fallacies that abound in the musical world and provides insights into the meaning and beauty of some of the basic ideas and laws of physics and psychophysics.

1973. xii, 164 p. 74 illus. paper $5.90

Please tear off coupon below and return with prepayment t

Springer-Verlag New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, New York 10010

Please send me______copies
Introduction to the Physics and Psychophysics of Music
Heidelberg Science Library 16
By Juan G. Roederer
1973. ISBN 0-387-90063-2
Paper $5.90

Enclosed is my check for $________ (including New York sales tax where applicable).

Name

Street

City/State/Zip

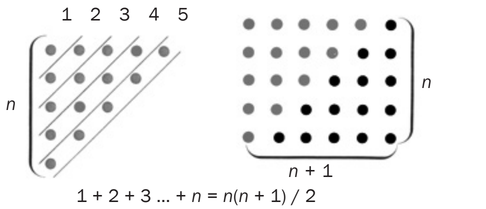
115

1. Véase www.scientificamerican.com

En este artículo, Martin Gardner relaciona directamente los diagramas con el concepto de demostración, afirmando que estos *ofrecen pruebas visuales de fórmulas algebraicas complejas*.

FIGURA 17

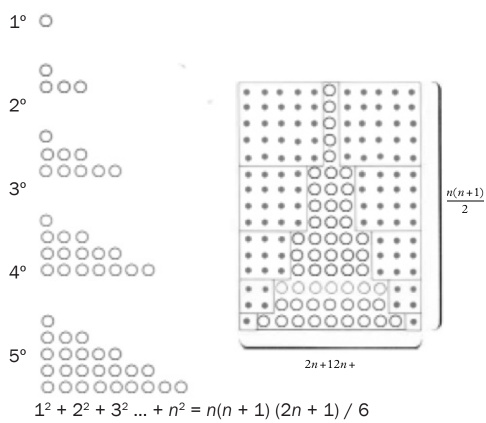
Suma de los *n* primeros números naturales



Fuente: *Scientific American*, octubre de 1973.

FIGURA 18

Suma de los *n* primeros números cuadrados



Fuente: *Scientific American*, octubre de 1973.

Dos años más tarde, en 1975, la Mathematical Association of America[2] incluyó en su revista *Mathematics Magazine* una sección llamada “Demostraciones sin palabras”. El primer artículo de la sección se publicó en 1975: “Two Mathematical

2. Véase www.maa.org

Papers Without Words" [Dos documentos matemáticos sin palabras], escrito por Rufus Issacs.

El artículo estaba dividido en dos partes, y cada una de ellas mostraba un contenido distinto. La primera parte presentaba un artilugio ilustrado, no se sabe si real o ficticio, que servía para trisecar el ángulo, es decir, dividir un ángulo en otros tres ángulos iguales entre sí. La segunda parte mostraba una imagen cuyo título era "Una prueba del teorema de Pitágoras". De nuevo, a una imagen se le daba la categoría de demostración.

Al año siguiente, J. Arthur Seebach y Lynn Arthur Steen se incorporaron a la plantilla de editores de la revista y, entre los cambios que realizaron, modificaron la sección "Notas y comentarios" por "Noticias y cartas" con el fin de publicar algunas de las que enviaban los lectores.

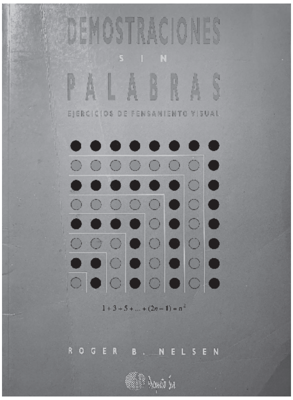
Las primeras cartas recibidas aludían todas al artículo "Two Mathematical Papers Without Words", de Rufus Issacs, por lo que los editores invitaron a los lectores a participar en la revista enviando nuevas demostraciones sin palabras (DSP).

Después de este anuncio, la revista comenzó a publicar las DSP enviadas por los lectores. Primero, más o menos dos por año y, a finales de los años ochenta, la revista publicaba una media de seis DSP anuales.

Uno de los colaboradores fue el profesor Roger B. Nelsen, quien a lo largo de los años recopiló diferentes DSP y ha publicado varios libros sobre las mismas. Uno de los más famosos es *Proofs without words. Exercises in visual thinking* [Demostraciones sin palabras. Ejercicios de pensamiento visual] (1993).

Figura 19

Cubierta del libro *Demostraciones sin palabras*, de Roger B. Nelsen



En la introducción de su libro, Nelsen apunta:

> […] Por lo tanto, si las demostraciones sin palabras no son demostraciones, ¿qué son? Como se deducirá de esta colección, la pregunta no tiene una sencilla y concisa respuesta. Sin embargo, generalmente, las DSP son dibujos o diagramas que ayudan a ver por qué una particular afirmación puede ser cierta y, también, ver como uno debe empezar a intentar probar su veracidad. […]

Nelsen señala un aspecto interesante de las DSP: pueden ser entendidos como "experimentos" que ponen a prueba una proposición matemática, y ayudan a encontrar un posible camino para su demostración formal.

Todas las personas que han trabajado o leído sobre las demostraciones sin palabras han realizado reflexiones sobre qué son exactamente, tal y como hizo Nelsen en su libro. A continuación, podemos leer algunas citas de estos autores, que reflexionan sobre sus bondades y ventajas.

Desde la simple idea de solamente “mirar para comprender” de Bhaskara:

Behold!

[¡Mirad!]

Bhaskara
(ca. 1114-1185)

Pasando por la necesidad de dibujar para facilitar la comprensión de un problema que nos sugiere Polya:

Así pues, incluso si el problema no es geométrico, usted puede tratar de dibujar una figura. Encontrar una representación geométrica clara a un problema no geométrico puede permitir un avance sensible hacia la solución.

George Polya
How to solve it [Cómo resolverlo](1956)

Disfrutando de la idea de Dunham de que no hay nada más elegante que una imagen que se explica por sí sola…

An ultimate elegance is achieved by what mathematicians call a “proof without words”, in which a brilliantly conceived diagram conveys a proof instantly, without need even for explanation. It is hard to get more elegant than that.

[Una elegancia definitiva se consigue mediante lo que los matemáticos llaman una “prueba sin palabras”, en la que un diagrama brillantemente concebido transmite una prueba al instante, sin necesidad de explicaciones. Es difícil ser más elegante que eso.]

William Dunham
The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems, and Personalities [El universo matemático: un viaje alfabético a través de las grandes pruebas, problemas y personalidades](1994)

Profundizando en las palabras de Miguel de Guzmán…

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.

Miguel de Guzmán
El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático (2006)

Y sin olvidar el objetivo fundamental de toda herramienta en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, que no es más que ayudar al lector a entender esta maravillosa disciplina. Así nos lo recuerdan Alsina y Nelsen…

Is it possible to create mathematical drawings that help students understand mathematical ideas, proofs and arguments? We are convinced that the answer is yes and our objective in this book is to show how some visualization techniques may be employed to produce pictures that have both mathematical and pedagogical interest.

[¿Es posible crear dibujos matemáticos que ayuden a los estudiantes a entender ideas, pruebas y argumentos matemáticos? Estamos convencidos de que la respuesta es afirmativa y nuestro objetivo en este libro es mostrar cómo se pueden emplear algunas técnicas de visualización para producir imágenes que tengan un interés tanto matemático como pedagógico.]

Claudi Alsina y Roger B. Nelsen
Math made visual. Creating images for understanding mathematics
[Matemáticas a la vista. Creación de imágenes para la comprensión de las matemáticas] (2006)