Julio Rodríguez Taboada y Pilar García Agra

Las matemáticas del arte

MÁS ALLÁ DEL NÚMERO DE ORO

CATARATA

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

LAS MATEMÁTICAS DEL ARTE.
MÁS ALLÁ DEL NÚMERO DE ORO

ISBN: 978-84-9097-479-7
DEPÓSITO LEGAL: M-29.536-2018
IBIC: PDZ

Índice

Introducción

A lo largo de nuestra trayectoria profesional, que suma unos 60 años en las aulas entre ambos, los autores del libro hemos coincidido en una premisa fundamental a la hora de afrontar nuestro trabajo: la importancia de hacer visibles las matemáticas que tenemos a nuestro alrededor. Haciendo nuestra la idea de que "el primer material a utilizar es el propio entorno: aulas, pasillos, edificios, calles, pueblos…" (extraída del documento de conclusiones del Seminario Federal sobre Recursos en la Enseñanza de las Matemáticas, organizado por la FESPM en 1990), iniciamos una intensa labor de humanización de las matemáticas, de acercamiento de las mismas al alumnado, de búsqueda de elementos y propiedades matemáticas en todo tipo de actividades y objetos. Poco a poco los parques, el mobiliario urbano, numerosos objetos cotidianos, la prensa, el patrimonio artístico, la fotografía se iban colando en nuestras clases y se convertían en un recurso más para ayudarnos a alcanzar nuestro objetivo fundamental: contribuir, a través de las matemáticas, a la educación de las personas.

Esta línea de trabajo es la que nos llevó a colaborar en el diseño y realización de "paseos matemáticos" por varias localidades gallegas, analizando especialmente la relación entre su patrimonio artístico y las matemáticas, así como su utilidad como recurso didáctico. Estos paseos supusieron un complemento ideal a las actividades sobre arte y matemáticas que realizábamos en las aulas, y este conjunto nos sirvió de base y de punto de partida para la escritura de este libro.

En el mismo instante en que comenzamos a trabajar en este proyecto, fuimos conscientes de una realidad bastante común para cualquier docente no universitario: el temario era inabarcable. Cualquier persona interesada en el tema sabe que la relación entre el arte y las matemáticas es tan variada y tan estrecha que daría para una colección completa. Por ello, nuestra primera tarea consistía en acotar el tema del libro. La labor de selección de los temas no fue fácil, así como tampoco lo fue decidir la profundidad con la que se abordaría cada uno. Finalmente, llevados por nuestro espíritu docente, optamos por un objetivo sencillo a primera vista, algo que llevamos intentado cada día: despertar la curiosidad de los demás.

Así pues, el propósito de este libro no es el de tratar en profundidad cada uno de los capítulos, sino el de abrir ventanas a las que asomarse para mirar el arte con ojos matemáticos. Desde cada una de esas ventanas podrá descubrir el lector interesantes mundos que explorar y caminos que recorrer, en los que a cada paso aprenderá un poco sobre el arte y sobre las matemáticas. Este libro nace, pues, con la firme intención de ser el inicio y no el final del viaje.

A pesar de que el profesorado y el alumnado de matemáticas no son los destinatarios exclusivos de esta obra, hemos intentado que el libro pueda servir como recurso a docentes de todas las etapas educativas para plantear actividades y encontrar recursos con los que enriquecer sus clases. En este sentido, estamos encantados de poder compartir nuestro trabajo con compañeros y compañeras con intereses e inquietudes comunes.

Por último, los autores queremos mostrar nuestro agradecimiento a las personas e instituciones que han contribuido a que este libro sea una realidad:

A la FESPM por su confianza y por habernos permitido llevar a cabo este proyecto, especialmente a Agustín, que siempre nos animó y creyó en nosotros.

A Carmen por toda su comprensión y colaboración en el proceso de edición y revisión.

A Manuel y a Ágata por sus aportaciones, siempre acertadas.

A nuestros compañeros y compañeras de AGAPEMA por apoyarnos siempre.

A nuestras familias, por su paciencia y su cariño, especialmente valiosos en los momentos más difíciles.

Y, finalmente, a nuestro alumnado de Rois y Ordes, pues sin ellos todo nuestro trabajo carecería de sentido.

Capítulo 1
La proporción áurea

> Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que exista entre ellas un vínculo que las una. No hay mejor vínculo que el que hace de sí mismo y de las cosas que une un todo único e idéntico. Ahora bien, tal es la naturaleza de la proporción…
>
> PLATÓN, *Timeo*

Una de las muchas cosas que la humanidad debe a la civilización griega es haber sido la primera en estudiar las matemáticas tal y como las conocemos hoy en día, intentando analizar y deducir las propiedades de figuras y números, las relaciones, buscar patrones... todo ello más allá de la utilidad inmediata, elevando la matemática a la categoría de ciencia. La rama preferida de los matemáticos griegos fue la geometría, la cual en sus manos se fue alejando de su significado etimológico: pasó de ser la "medida de la Tierra" a trabajar con objetos que estaban en el mundo de las ideas, siguiendo el modelo platónico de ciencia.

Los pitagóricos, miembros de la escuela de filósofos fundada por Pitágoras de Samos, sostenían que todo en la naturaleza se podía explicar mediante relaciones numéricas, de ahí que dedicasen una gran parte de sus estudios a las razones o proporciones. De estas ideas nació la primera escala musical conocida, la escala pitagórica, demostrando que los intervalos entre las notas pueden ser representados por fracciones de número naturales. Paradójicamente, este estudio tan exhaustivo fue el que los condujo al descubrimiento de los números inconmensurables o irracionales, los números que contradecían su hipótesis principal.

Este intento de explicar todo mediante relaciones numéricas llegó también al arte: la escultura, la arquitectura o la pintura se convirtieron en campos en los que la belleza era buscada y medida en términos numéricos, mediante proporciones entre medidas.

A pesar de que en Grecia se crearon diferentes modelos o cánones de belleza, la llamada proporción áurea marcó las pautas de lo que los artistas clásicos considerarían como ideal, y que posteriormente serían seguidas por numerosas corrientes y movimientos culturales a lo largo de la historia.

David, Miguel Ángel (1501-1504), Galería de la Academia, Florencia. Thinkstock.

El número de formas distintas de dividir una figura es, naturalmente, infinito, pero la sección áurea produce una impresión de armonía lineal, de equilibrio en la desigualdad, más satisfactoria que la de cualquier otra combinación, según los cánones de belleza de la Grecia clásica, que posteriormente fueron seguidos por Leonardo da Vinci y la mayor parte de artistas del Renacimiento

Tras este periodo, el estudio de la sección áurea cayó después en el olvido durante más de dos siglos, pese a que numerosos autores emplearon esta proporción en sus obras, hasta que el alemán Adolf Zeysing, en el año 1854, volvió a destacar sus propiedades estéticas y proclamó: "Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que entre la mayor y el todo".

Zeysing nombró esta formulación como "ley de las proporciones", afirmando que se cumple en las medidas ideales del cuerpo humano, de las especies animales que se distinguen por la elegancia de sus formas, en ciertos templos griegos (particularmente el Partenón), en botánica y hasta en la música.

Un ejemplo de la presencia de esta medida para el estudioso alemán sería el hecho de que en las estatuas antiguas y en las personas perfectamente proporcionadas, el ombligo divide la altura total mediante la proporción áurea. El propio Zeysing realizó mediciones sobre miles de cuerpos humanos y se encontró con que este canon ideal parece ser la expresión de una ley estadística media para los cuerpos sanamente desarrollados. Esta proporción, que está de acuerdo con los cánones de Durero y de Leonardo, fue comprobada nuevamente en las estatuas griegas de la época de Fidias.

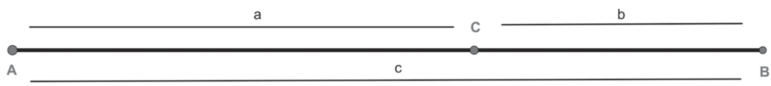
Al operar sobre estas series de observaciones, Zeysing observó y constató que las proporciones del cuerpo masculino oscilan en torno a la razón media $\frac{h}{n}=\frac{13}{8}=1{,}625$, obteniendo un resultado ligeramente inferior a la sección áurea para las mismas proporciones del cuerpo femenino, en el cual se verifica que el valor de la razón media es: $\frac{h}{n}=\frac{8}{5}=1{,}6$. En cualquier caso, a partir de este estudio empírico, tanto sobre cuerpos reales como sobre obras escultóricas clásicas, se llega a la consideración de la proporción áurea como símbolo de la perfección estética.

A lo largo de la historia fueron muchos los artistas y científicos que reconocieron en la sección áurea una suerte de belleza especial, casi mística, que llegó a ser bautizada por Luca Pacioli como "la divina proporción", nombre con el que fue conocida en el Renacimiento. Posteriormente, será Kepler quien, además de ser el primero en mencionar su interés para la botánica, afirme que la proporción áurea es "una joya preciosa: uno de los tesoros de la Geometría".

División de un segmento en dos partes

Ejemplo 1

Explorar las diferentes posibilidades que se presentan a la hora de dividir un segmento en dos partes, para llegar a aquella que lleva hasta el número de oro. Consideramos la división de un segmento AB por un tercer punto C, y designamos por *a, b* y *c* las longitudes de los segmentos AC, CB y AB respectivamente, tal y como se representa en la siguiente figura. Esta división da lugar a seis razones posibles:



$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$$

Es decir, las tres razones $\frac{a}{b} | \frac{b}{c} | \frac{c}{a}$ y sus inversas $\frac{b}{a} | \frac{c}{b} | \frac{a}{c}$

Las proporciones entre el segmento *c* y las partes que lo componen se obtienen igualando dos razones cualesquiera de estas seis, de donde resultan quince combinaciones, algunas de las cuales deben descartarse por motivos evidentes (una razón no podría ser igual a su inversa, salvo en el caso de que ambas partes sean iguales) y las restantes (suprimiendo las combinaciones idénticas donde figuran las razones inversas) se pueden clasificar del siguiente modo:

1ª

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{b}{c} \\ \frac{a}{b} &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\}$$

Dos combinaciones que conducen al mismo resultado *a* = *b*, es decir, AC = CB.

En estos dos casos se tendría que C equidista de A y B, lo que nos lleva a la partición simétrica (un segmento en dos partes iguales) que no es interesante desde el punto de vista estético.

2º

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

Por ser *c* = *a* + *b*, la igualdad anterior equivale a: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$

Y como $\frac{a+b}{a}$ es obviamente superior a 1, lo mismo sucederá con $\frac{a}{b}$; por lo tanto, *a* es mayor que *b*, de lo que se deduce que el punto C está más cerca de B que de A.

La ecuación $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$ o $\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{AC}$ puede traducirse de la siguiente manera:

"La longitud AB se divide en dos partes desiguales de tal manera que la mayor sea a la menor como la suma de las dos (el segmento inicial AB) es a la mayor".

3º

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ que equivale a $\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b}$

Por ser *b* mayor que *a*, el punto C está más cerca de A que de B, pero las proporciones son en realidad las mismas que el segundo caso y el enunciado entrecomillado seguiría siendo válido. Bastaría con intercambiar la *a* y la *b* en una de las dos para obtener la otra.

Se puede reducir el estudio a un único caso, analizando las proporciones (igualdad entre las razones) que se pueden establecer, siendo *a* > *b*, que corresponden a la igualdad:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$$

Se obtiene así la partición asimétrica más directa, más general y más en armonía con la transposición lógica del principio del mínimo esfuerzo. Existe un único punto C entre A y B tal que las longitudes AC, CB y AB satisfagan la condición impuesta y, por lo tanto, solo existe un valor numérico correspondiente a la razón $\frac{a}{b}$.

La igualdad $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$ puede escribirse también $a^2=b(a+b)$, resolviendo con ello el problema enunciado por Euclides, conocido como "división de una recta en media y extrema razón".

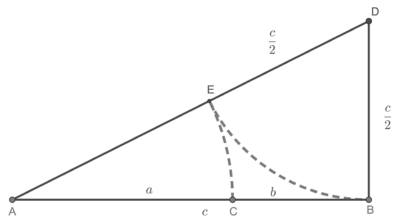
Construcción geométrica de la proporción áurea

Ejemplo 2

Emulando a los geómetras de la antigua Grecia, es decir, empleando sus mismas herramientas, la regla y el compás, aunque "modernizadas" y adaptadas a entornos digitales (pues todas estas construcciones pueden ser fácilmente realizadas con GeoGebra o programas similares) vamos a ver cómo obtener la descomposición de un segmento en dos partes de manera que se cumpla que la razón entre ellas sea igual a la razón entre el segmento completo y la mayor de las dos. Las construcciones geométricas correspondientes son muy sencillas:

1. Partiendo de la longitud total AB calculamos el punto C, o lo que es lo mismo, partiendo de la suma encontramos el segmento mayor y el menor

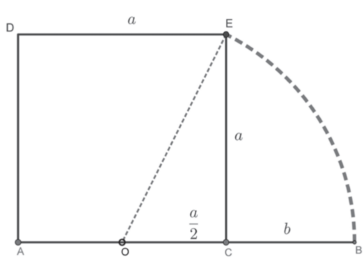
- Si el segmento dado es AB = *c*, se construyen *a* y *b*.



- Sobre B se dibuja un segmento perpendicular a AB de longitud *c*/2, obteniendo el punto D. Uniendo los tres puntos A, B y D se obtiene un triángulo rectángulo en B.
- Con centro en D, trazamos un arco de circunferencia de radio *c*/2, obteniendo así el punto E.
- Trazamos a continuación con centro en A y radio AE un arco que nos corta al segmento inicial AB en un punto que se denota por C y que verifica $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Se obtiene así la sección áurea del segmento.

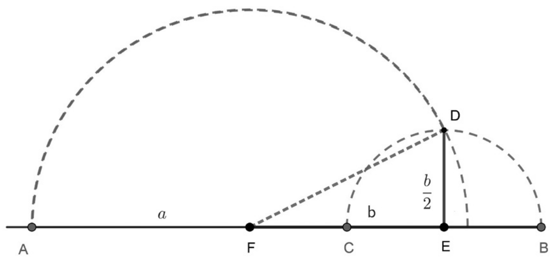
2. Partiendo de la longitud AC calculamos CB y, por lo tanto, AB; es decir, partiendo del segmento mayor encontramos el segmento menor y, por lo tanto, la suma.

- Si el segmento dado es AC = *a*, se construyen *b* y *c*.



- Sobre AC se dibuja el cuadrado ACDE.
- Situamos el punto medio de AC, que denotamos por O y trazamos el segmento que une este punto con el vértice superior derecho del cuadrado, que hemos llamado E.
- Con O como centro, describimos el arco de radio OE y que cortará a la prolongación del segmento AC en un punto que llamaremos B.
- La longitud buscada b es el segmento CB.

3. Partiendo de la longitud total CB calculamos el punto A, es decir, partiendo del segmento menor encontramos el segmento mayor y por lo tanto total.



- Si el segmento dado es FE = *b*, se construye *a* y *c*.
- Dibujamos una prolongación del segmento FE, sobre E se dibuja un segmento perpendicular a FE de longitud *b*/2, obteniendo el punto D.
- Uniendo los tres puntos F, E y D obtenemos un triángulo rectángulo en E.
- Trazamos una semicircunferencia centrada en E y de radio ED, obteniendo así sobre la prolongación los puntos C y B; a continuación, construimos el arco centrado en el punto F y radio FD, obteniendo el punto de corte A. De esta forma, AB queda dividido por C según la divina proporción; lo que supone que, siendo FE = CB la parte menor de la sección áurea, AC será la mayor y AB el segmento total.

Valor numérico de ϕ

Leonardo da Vinci fue el primero en utilizar el nombre de "sección áurea", del que se deriva el de "número de oro", para el valor numérico de la razón que antes se halló por métodos geométricos. Seguidamente se procederá a mostrar cómo se puede hallar este valor de forma sencilla, así como algunas propiedades aritméticas del mismo.

Para realizar estos cálculos se parte de la propiedad sintetizada en la fórmula

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

la cual también puede ser expresada de la siguiente manera, que puede resultar más comprensible:

$$\frac{\text{segmento mayor}}{\text{segmento menor}} = \frac{\text{segmento total}}{\text{segmento mayor}}$$

Partiendo de la igualdad inicial $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ y dividiendo por b los dos términos del segundo miembro, se obtiene

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{a}{b}}$$

Si ahora se considera $\frac{a}{b} = x$, para emplear la notación habitual aprendida en la escuela, se obtiene $x = \frac{x+1}{x}$, es decir, $x^2=x+1$, o lo que es lo mismo: $x^2-x-1=0$, ecuación de segundo grado en x, que tiene como soluciones: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Dado que se está calculando una relación entre longitudes de segmentos, no se tiene en cuenta la solución negativa (que representaría una situación en la que el punto C se hallaría fuera del segmento AB), por lo que se toma como valor de la razón buscada

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398875...$$

Este es un número algebraico inconmensurable o irracional que se denomina número de oro.

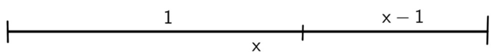
Este número suele denotarse por la letra griega φ (*phi*), lo cual se debe, según algunas hipótesis, a que esta letra es la inicial del nombre del escultor griego Fidias: $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398875...$

Números algebraicos

Se llaman números algebraicos a los números reales que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números no algebraicos son llamados trascendentes y, entre ellos, los más famosos son π y e.

Puede llegar a calcularse este valor de otra forma, probablemente más sencilla, partiendo de un caso particular en lugar de abordarlo sobre un segmento AB cualquiera.

Se toma un segmento de longitud x y se hace en él una división tal y como se indica en la figura siguiente:



Aplicando la proporción áurea $\frac{\text{segmento mayor}}{\text{segmento menor}} = \frac{\text{segmento total}}{\text{segmento mayor}}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1 = x^2 - x,$$

que es la misma a la que se llegó en el caso general.

Fibonacci y el número de oro

Algunos conceptos matemáticos atraen porque sus propiedades escapan al entendimiento y consiguen fascinar con su aureola casi mágica. Este es el caso del número de oro, el cual, además de estar muy presente en la naturaleza y el arte, aparece en los lugares y en las relaciones más insospechadas.

Un ejemplo de estas curiosidades numéricas surge al analizar la relación entre el número ϕ y la sucesión de Fibonacci.

Fibonacci (aprox. 1170-1245)

Leonardo de Pisa, también llamado Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o simplemente Fibonacci, se inició en las matemáticas para ayudar y llevar la contabilidad de su padre que comerciaba por todo el Mediterráneo. Pronto descubrió, gracias a sus viajes, que las matemáticas servían para algo más que los aspectos mercantiles. Su contacto con el mundo árabe le dio la oportunidad de aprender de sus maestros. Conoció así el sistema de numeración indoarábigo, que luego trasladó a Europa.

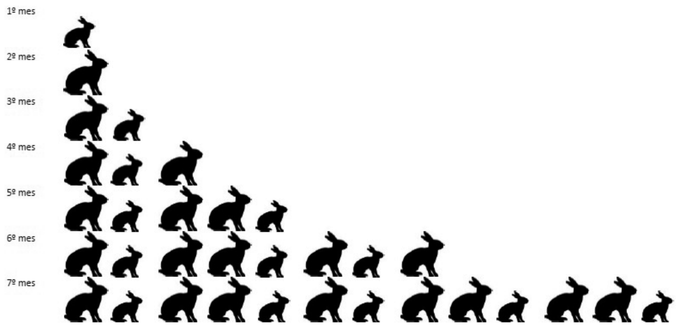
Resulta sorprendente cómo dos conceptos matemáticos definidos de formas tan diferentes y a partir de situaciones tan lejanas se encuentran tan íntimamente relacionados. Pero ¿qué es la sucesión de Fibonacci?

Esta sucesión se define de manera que los dos primeros términos valen 1 y, a partir del tercero, cada término es igual a la suma de los dos anteriores:

$1, 1, 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 2 = 5; 5 + 3 = 8; 8 + 5 = 13; 13 + 8 = 21; 21 + 13 = 34; 34 + 21 = 55...$

El siguiente problema, contenido en el capítulo XII del *Liber abaci*, la principal obra de Fibonacci, explica la sucesión de esta manera: "Un hombre encerró a una pareja de conejos en un lugar rodeado por un muro por todas partes. ¿Cuántos pares de conejos pueden reproducirse a partir del par original durante un año, si consideramos que cada pareja procrea al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?".

Esta sucesión, así definida, parece excesivamente artificial, fruto del capricho de un matemático, pero extrañamente aparece en situaciones tan dispares como para explicar la disposición de las semillas en algunas flores o en las piñas o para calcular el número de formas diferentes de subir una escalera.



Imaginemos que una persona intenta subir una escalera. El número máximo de escalones que puede subir de una sola vez es dos; es decir, puede subir o bien uno o bien dos escalones cada vez. Si en total hay *n* escalones, ¿de cuántas formas (C_n) podría subir las escaleras?

- Si solo hay un escalón (n = 1), existe una única forma de subirlo, $C_1 = 1$.
- Si hay dos escalones, $C_2 = 2$: 1 + 1, puede subir los dos a la vez, o subirlos de uno en uno.
- Si hay tres escalones, $C_3 = 3$: 1 + 1 + 1; 1 + 2; 2 + 1.
- Si hay cuatro escalones, $C_4 = 5$: 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 2 + 1; 1 + 1 + 2; 2 + 1 + 1; 2 + 2.
- Para cinco escalones, $C_5 = 8$: 1 + 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 2 + 1; 1 + 2 + 1 + 1; 2 + 1 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; 2 + 1 + 2; 1 + 2 + 2.

Siguiendo este proceso se puede comprobar que las soluciones se corresponden con los términos de la sucesión de Fibonacci.

Pues bien, si se calcula la sucesión formada por los cocientes de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, se obtendrían los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
1 : 1 &= 1\\
2 : 1 &= 2\\
3 : 2 &= 1{,}5\\
5 : 3 &= 1{,}66\\
8 : 5 &= 1{,}6\\
13 : 8 &= 1{,}625\\
21 : 13 &= 1{,}6153846\ldots\\
34 : 21 &= 1{,}6190476\ldots\\
55 : 34 &= 1{,}6176471\ldots\\
89 : 55 &= 1{,}6181818\ldots
\end{aligned}
$$

Si se siguen obteniendo más cocientes y se analizan sus resultados, se observará que estos se van aproximando cada vez más al número de oro; de hecho, se tiene que el límite de los cocientes entre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci es exactamente el número de oro.

Pero no es esta la única curiosidad numérica que depara su estudio. Por ejemplo, ¿no resulta desconcertante que tanto el cuadrado de ϕ como su inverso tengan las mismas cifras decimales que el mismo ϕ?

$$\phi = 1{,}618033\ldots; \quad \frac{1}{\phi} = 0{,}618033\ldots; \quad \phi^2 = 2{,}618033\ldots$$

Usando estos resultados, puede encontrarse también una relación especial entre sus potencias, en la que de nuevo está presente la sucesión de Fibonacci:

$$
\begin{aligned}
\phi^0 &= 0 + 1 = 1 + 0\\
\phi^1 &= 0 + \phi = 1 + \frac{1}{\phi}\\
\phi^2 &= 1 + \phi = 2 + \frac{1}{\phi}\\
\phi^3 &= 1 + 2\phi = 3 + \frac{2}{\phi}\\
\phi^4 &= 2 + 3\phi = 5 + \frac{3}{\phi}\\
\phi^5 &= 3 + 5\phi = 8 + \frac{5}{\phi}\\
\phi^6 &= 5 + 8\phi = 13 + \frac{8}{\phi}\\
\phi^7 &= 8 + 13\phi = 21 + \frac{13}{\phi}\\
\phi^8 &= 13 + 21\phi = 34 + \frac{21}{\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi^1 - 1\phi &= 0\\
\phi^2 - 1\phi &= 1\\
\phi^3 - 2\phi &= 1\\
\phi^4 - 3\phi &= 2\\
\phi^5 - 5\phi &= 3\\
\phi^6 - 8\phi &= 5\\
\phi^7 - 13\phi &= 8\\
\phi^8 - 21\phi &= 13
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi^2 &= 1\phi + 1\\
\phi^3 &= 2\phi + 1\\
\phi^4 &= 3\phi + 2\\
\phi^5 &= 5\phi + 3\\
\phi^6 &= 8\phi + 5\\
\phi^7 &= 13\phi + 8\\
\phi^8 &= 21\phi + 13
\end{aligned}
$$

El rectángulo áureo

Se denomina rectángulo áureo, o rectángulo de oro, a aquel que cumple que la razón entre sus dos dimensiones (entre su base y su altura) es igual al número de oro.

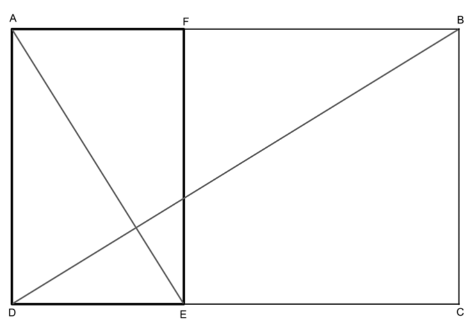
Tal y como se verá en próximos capítulos, existen numerosos ejemplos de rectángulos de este tipo en el entorno más próximo, y se mostrará cómo podemos identificarlos de un modo sencillo.

Esta proporción se encuentra en el Partenón, en las tarjetas de crédito, en la catedral de Notre-Dame de París, en el edificio de la ONU en Nueva York o como instrumento de inspiración para muchos artistas desde la antigüedad hasta nuestros días, como Leonardo, Durero, Newman, Dalí y muchos otros. Está también presente en la música: Stradivari la empleó para construir sus famosos violines, Mozart para componer las sonatas, y también Bartók y Debussy en algunas de sus composiciones.

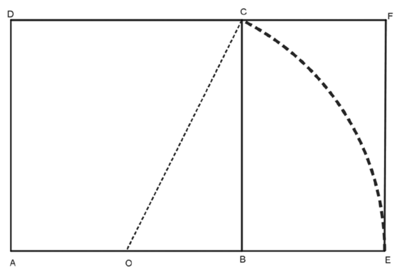
Pero este número no es solamente un instrumento humano para sustentar la idea de armonía, sino que también está muy presente en la naturaleza: en la distribución de las semillas de las plantas, en las espirales logarítmicas, en los cuernos de los carneros salvajes, en los caracoles, en el crecimiento de la población de algunos roedores y en la distribución de las filas de las piñas.

EJEMPLO 3

Cómo construir un rectángulo áureo a partir de un método general para construir rectángulos semejantes a uno dado.



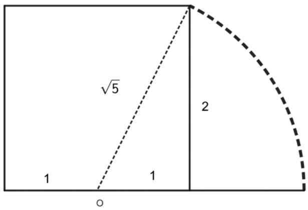
Sea ABCD un rectángulo cualquiera y DB una de sus diagonales. Si desde A se traza el segmento AE perpendicular a DB, entonces el rectángulo ADEF es semejante al ABCD. Esto es así porque, si se consideran los triángulos rectángulos ABD y AED, comprobamos que son semejantes pues, por ser sus lados perpendiculares, tienen los ángulos ABD y DAE de la misma amplitud. Entonces, si los triángulos son semejantes, los rectángulos también lo son.
El cuadrilátero ADEF recibe el nombre de rectángulo recíproco interno del rectángulo inicial.
Tomando como base la propiedad anterior, se construye un rectángulo de oro de la siguiente manera:

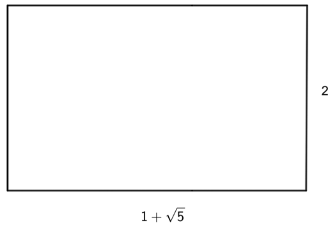


Se parte de un cuadrado ABCD y se procede tal y como sigue:

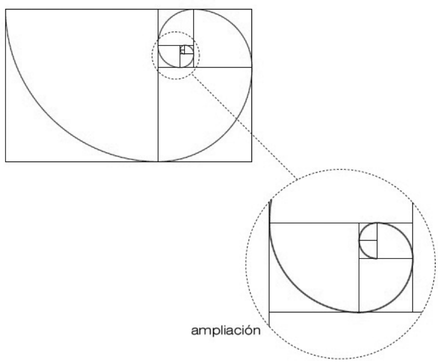
- Se prolongan los lados AB y DC.
- Con centro en O (punto medio del lado AB) y radio OC, se traza un arco de circunferencia que corta a la prolongación en el punto E.
- Desde este punto, se traza una perpendicular hasta la prolongación de DC.

El rectángulo AEFD es áureo pues, teniendo en cuenta la propiedad general expuesta al inicio de este apartado, es semejante a su recíproco interno BEFC. Además, este rectángulo sería igualmente áureo.
Una construcción muy sencilla del rectángulo de oro, y a partir del mismo obtener el valor de ϕ, sería considerar el siguiente caso particular: se toma un cuadrado de lado 2 y seguir los mismos procesos que en el caso anterior. Así se obtendría un rectángulo con las proporciones que darían lugar a $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

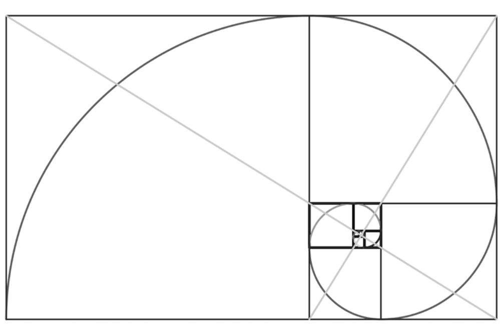




De la construcción anterior es fácil deducir la propiedad de que si a un rectángulo áureo se le extrae un cuadrado de lado igual al lado menor del mismo, el rectángulo obtenido también es áureo.
Se podría seguir este proceso de manera indefinida, lo que llevaría a la siguiente secuencia:



Trazando arcos de circunferencia en cada uno de los cuadrados, se construiría la espiral logarítmica.



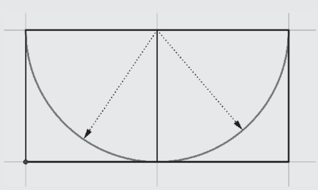
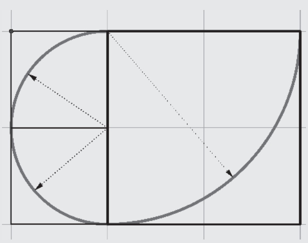
Si en un rectángulo áureo se traza una diagonal, y en el rectángulo obtenido de extraerle un cuadrado se traza la diagonal perpendicular a la anterior, el punto de corte de ambas líneas será el conocido por los pintores del Renacimiento con el nombre de “el ojo de Dios”.
Según su interpretación, cerca de ese punto debería encontrarse la figura principal de un cuadro, o bien cualquier otro elemento de importancia en la obra pictórica, para llamar la atención del espectador sobre el mismo.

La espiral y Jacob Bernouilli (1654-1705)

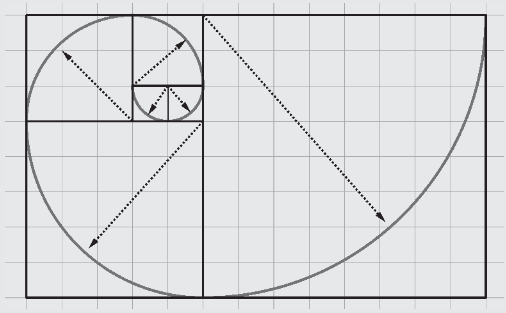
La curva espiral y sus propiedades llamaron la atención de grandes matemáticos. Uno de sus más fervientes admiradores fue Bernouilli, que pidió fuese grabada en su tumba con la inscripción “*Eadem mutato resurgo*”, que significa “aunque transformada, resurjo siempre igual”. La casualidad quiso que el grabador no conociese esa figura y sí la espiral de Arquímedes, que se caracteriza porque su la distancia de separación es constante.

Ejercicio 1. Dibuja una espiral logarítmica utilizando como base un papel cuadriculado.

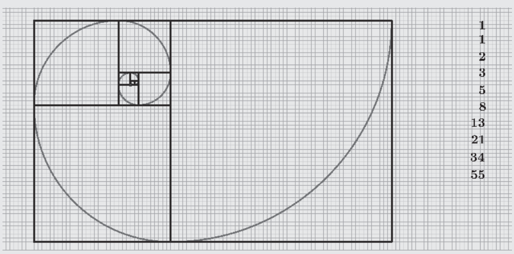
Empieza a dibujar aproximadamente en el centro de la hoja:
1. Dibuja un cuadrado de lado 1 y con centro en uno de sus vértices traza un arco de radio 1.
2. Para proseguir el arco, dibuja a su lado otro cuadrado de lado 1, y marca el arco.
3. El trazado del arco nos pide dibujar ahora un cuadrado de lado 2.

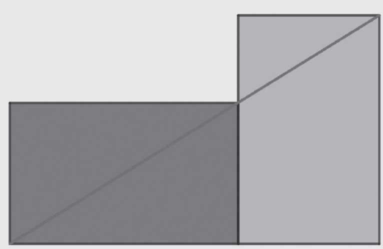
4. Continuando con el arco, dibuja un cuadrado de lado 3.
5. Sigue el proceso dibujando cuadrados de lado 5, 8...



La actividad se consideraría finalizada cuando el tamaño del papel no nos permita proseguir.
Este sería el resultado de continuar el proceso descrito hasta llegar a un cuadrado de lado 55.

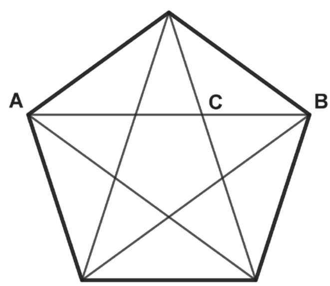


El rectángulo de oro es el único que verifica que poniendo uno apoyado sobre su lado mayor, y a su lado otro apoyado sobre el lado menor, entonces la diagonal del primer rectángulo, al prolongarla, acabará en el vértice superior derecho del segundo rectángulo, tal y como se ve en la imagen.



La estrella pentagonal y el número de oro

Según la tradición, la estrella pentagonal era el símbolo que identificaba a los miembros de la escuela pitagórica. Esta figura también fue conocida como pentagrama o pentalfa (cinco puntas en forma de alfa). Los pitagóricos defendían la teoría de que el mundo estaba configurado según un orden numérico, que todo se podía explicar por medio de relaciones (razones) numéricas, por lo que para ellos solo tenían sentido los números racionales. La casualidad (o quizás no) quiso que en su propio símbolo hallasen un número desconcertante, el irracional ϕ. La propiedad geométrica a la que estamos haciendo referencia es que, dentro de la estrella pentagonal, los segmentos AC, CB y AB están en proporción áurea.



Ejemplo 4

Veamos cómo se realiza la demostración de esta propiedad:

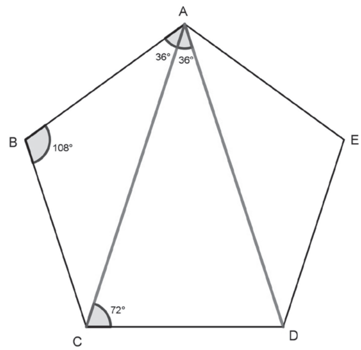
1. Se dibuja un pentágono ABCDE de lado 1, y se trazan los segmentos AC y AD, es decir, las diagonales desde el vértice A. Observemos las medidas de sus ángulos:

$$\widehat{ABC} = 108^{o}$$

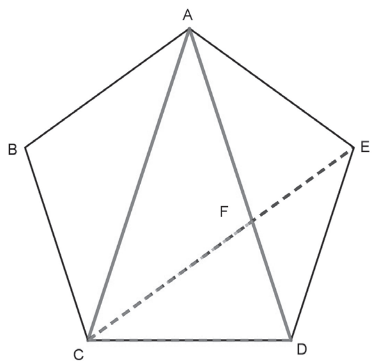
$$\widehat{BAC} = \frac{180^{o} - 108^{o}}{2} = 36^{o}$$

$$\widehat{CAD} = 108^{o} - 36^{o} \cdot 2 = 36^{o}$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \frac{180^{o} - 36^{o}}{2} = 72^{o}$$



Se traza la diagonal CE y se denomina F al punto de intersección de CE con AD. Los triángulos CFD y CAD son semejantes por que tienen los mismos ángulos 36º,72º y 72º.



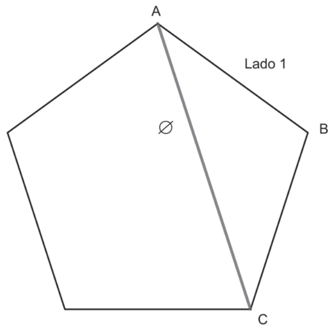
Pueden calcularse los lados escribiendo la proporcionalidad. Si el lado del pentágono vale 1 y AC = *x*:

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CD} = \mathrm{AF} = 1$$
$$\mathrm{FD} = x - 1$$
$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 - x = 1$$

Ecuación que ya se ha visto y tiene como solución el número de oro si se considera la raíz positiva

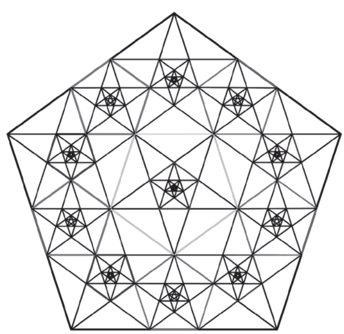
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Dicho de otra forma, si se considera un pentágono con lado la unidad, entonces cualquiera de sus diagonales tiene como medida el número de oro. Esta relación puede encontrarse en todos los pentágonos, pues $\phi = \frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$



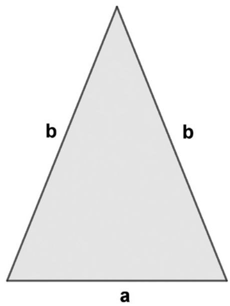
Casi con toda seguridad, para la escuela pitagórica la proporción entre la diagonal y el lado del pentágono regular fue su primer contacto con los números irracionales, concretamente $\sqrt{5}$, del cual tuvieron constancia antes que de $\sqrt{2}$ (relación entre diagonal y lado de un cuadrado), lo cual seguramente causó una profunda reflexión en el seno de la escuela pitagórica.

Tomando como base esta relación, es posible observar cómo se van autogenerando pentágonos dentro del inicial, procedimiento que podría continuarse hasta el infinito. Esta propiedad será tratada con detalle en el capítulo dedicado a los fractales.



De la misma manera que se define un rectángulo y un pentágono áureo, puede hablarse del triángulo áureo. La condición que debe cumplir un triángulo para ser considerado “de oro” es ser isósceles y que la razón entre el lado mayor y el menor sea el número ϕ. Este tipo de triángulo es el empleado por Penrose

para crear sus teselas de dardo y cometa, base a partir de la que construirá mosaicos no periódicos, tal y como veremos en un capítulo posterior.
Este triángulo no es más que el que hemos construido dentro del pentágono de la figura anterior, con dos de sus diagonales y un lado.



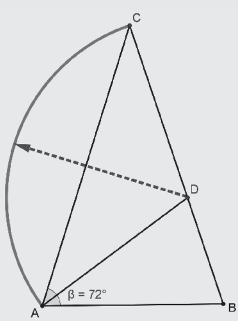
$$\frac{b}{a} = \varnothing$$

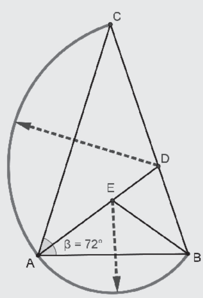
A partir del triángulo áureo también es posible construir la espiral áurea, tal y como se muestra a continuación.

Ejercicio 2. Dibuja una espiral áurea.

Esta actividad resulta apropiada para trabajar ángulos, bisectrices y elementos de un triángulo.

1. Dibuja un triángulo de oro, es decir, sus lados en razón de ϕ.
2. Traza la bisectriz desde el vértice A; obtendrás un punto de corte D con el lado opuesto del triángulo, y con ello un nuevo triángulo ABD, que también es áureo. Con centro en D y radio la distancia CD, traza el arco de circunferencia AC como se muestra en la imagen.
3. Repite el proceso en el nuevo triángulo ABD, y ahora desde B, vértice inferior izquierdo del nuevo triángulo, traza la bisectriz para obtener el punto E, con centro en E y radio AE traza el arco AB señalado en la figura. Obtendrás de nuevo un triángulo áureo.





4. Continuando con el proceso en este nuevo triángulo, obtendrías el tercer arco.