Manuel de León y Ágata A. Timón

La engañosa sencillez de los triángulos

DE LA FÓRMULA DE HERÓN A LA CRIPTOGRAFÍA

CATARATA

colección
MIRADAS MATEMÁTICAS

SERVICIO DE PUBLICACIONES
AVDA. DE LA MANCHA S/N
02006 ALBACETE
WWW.FESPM.ES

NICOLÁS CABRERA, Nº 13-15
CAMPUS DE CANTOBLANCO, UAM
28049 MADRID
WWW.ICMAT.ES

FUENCARRAL, 70
28004 MADRID
TEL. 91 532 20 77
FAX. 91 532 43 34
WWW.CATARATA.ORG

LA ENGAÑOSA SENCILLEZ DE LOS TRIÁNGULOS.
DE LA FÓRMULA DE HERÓN A LA CRIPTOGRAFÍA

ISBN: 978-84-9097-344-8
DEPÓSITO LEGAL: M-20.152-2017
IBIC: PDZ/YQM

Los triángulos

Tres triángulos de pájaros cruzaron
sobre el enorme océano extendido
en el invierno como una bestia verde.
Todo yace, el silencio,
el desarrollo gris, la luz pesada
del espacio, la tierra intermitente.
Por encima de todo fue pasando
un vuelo
y otro vuelo
de aves oscuras, cuerpos invernales,
triángulos temblorosos
cuyas alas
agitándose apenas
llevan de un sitio a otro
de las costas de Chile
el frío gris, los desolados días.

Yo estoy aquí mientras de cielo en cielo
el temblor de las aves migratorias
me deja hundido en mí y en mi materia
como en un pozo de perpetuidad
cavado por una espiral inmóvil.

Ya desaparecieron:
plumas negras del mar,
pájaros férreos
de acantilados y de roqueríos,
ahora, a mediodía
frente al vacío estoy: es el espacio
del invierno extendido
y el mar se ha puesto
sobre el rostro azul
una máscara amarga.

Jardín de invierno, Pablo Neruda

ÍNDICE

Introducción

"¿Un libro entero dedicado a los triángulos? ¿Y qué vais a contar?". Cuando planteamos este libro, lo cierto es que ni siquiera nosotros podíamos imaginar todos los secretos que esconde esta sencilla figura plana. Tres segmentos, que definen un espacio cerrado en el plano; tres ángulos y tres vértices. Con solo estos elementos los triángulos aparecen en el desarrollo de las matemáticas desde los tiempos de los griegos hasta la actualidad. Esta figura geométrica nos permite ilustrar el desarrollo de la investigación matemática: desde los conceptos más básicos y las preguntas más inocentes hasta las cuestiones más intrincadas que siguen desafiando las mentes más brillantes de la sociedad, como la teoría de números y los fractales. Su simplicidad hace que sean una herramienta básica para descomponer figuras más complejas, para hacer mediciones, para desarrollar tecnologías como el GPS… Sus áreas se computan con la fórmula de Herón, cuyo estudio conduce a las curvas elípticas y a la criptografía, y enlazan también con el teorema de Fermat. También se aplican de forma estructural en la arquitectura y como ornamento en el arte, por lo que podemos observarlo en nuestro día a día.

Los triángulos aparecen en nuestra representación básica de la naturaleza. En las palabras de Galileo Galilei en *Il Saggiatori:*

“*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ qua li è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un a ggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*”[1].

Los triángulos son caracteres del universo, y con ellos aprendemos a comprender el cosmos. Sirven para medir la curvatura y así desvelar la geometría oculta del mundo en el que vivimos; un triángulo geodésico sobre una esfera desvela un exceso de curvatura, y sobre una hiperbólica señalará la curvatura negativa. Los triángulos sobre los poliedros y las superficies llevaron a Leonhard Euler a su fórmula, que proporciona invariantes que permiten clasificar los espacios.

A lo largo de la historia se le ha otorgado un poder místico no solo a su forma geométrica, sino a construcciones derivadas, como los números triangulares que generan cábalas misteriosas y las relaciones pitagóricas que van desde las tablillas babilónicas hasta los márgenes de los libros de Pierre de Fermat.

En este libro se presentan diferentes aspectos de los triángulos, en su contexto histórico y en relación con otras disciplinas. Se abordan, de forma divulgativa, los temas anteriores, como el cálculo de áreas, la fórmula de Herón, los sólidos, los números triangulares, la medida del meridiano terrestre, la geolocalización, la fractalidad… Además, cada capítulo se acompaña de ejercicios que se pueden proponer en el aula de

1. “La filosofía está escrita en este gran libro, que está continuamente abierto a nuestra mirada (me refiero al universo), pero no se puede entender a menos que uno primero aprenda a comprender el idioma y conocer a los personajes, en el que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender humanamente la palabra; sin estos es un deambular vagamente por un oscuro laberinto”.

secundaria o bachillerato, o tratar de resolver personalmente como pequeños retos matemáticos que harán la lectura más participativa.

Colección 'Miradas Matemáticas'

En la escuela, la matemática es vista, habitualmente, como una ciencia sin usos prácticos; como una colección de reglas que parecen surgir por arte de magia de un sombrero; como un cuerpo de conocimiento estanco, sin evolución en el tiempo, que se inventó hace siglos y que, desde entonces, poco ha cambiado. No es sencillo, por los recursos y los tiempos disponibles, transmitir a los alumnos que esta disciplina está todavía viva y que existe una intensa actividad investigadora conectada íntimamente con los problemas más relevantes del mundo actual.

El ICMAT y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas lanzan esta colección de libros dentro de la editorial Los Libros de la Catarata, que combina la divulgación con la didáctica de las matemáticas. Aunque son libros que pueden ser disfrutados por cualquier persona con interés hacia esta disciplina, están dirigidos especialmente a los profesores de matemáticas en niveles de secundaria a bachillerato con el objetivo de dotarles de nuevas ideas que les permitan desarrollar materiales que acerquen las matemáticas de una forma interesante y atractiva a sus alumnos, llevando los últimos resultados matemáticos al aula, con una perspectiva histórica, conectándolos con otras ciencias y los desarrollos tecnológicos. Se propondrá el uso del programa GeoGebra, un *software* de matemáticas, fácil de usar y enfocado para todos los niveles educativos, que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo. Es un *software* de código abierto disponible gratuitamente para usos no comerciales, que cada vez más profesores incorporan en sus clases para añadir un carácter dinámico y visual a sus explicaciones.

Agradecemos a Agustín Carrillo de Albornoz Torres su apoyo en la elaboración de las figuras con GeoGebra.

Capítulo 1

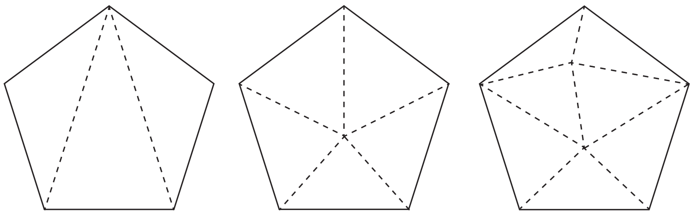
La engañosa sencillez de los triángulos

El triángulo es la figura plana más sencilla. Abarca, con solo tres lados, tres ángulos y tres vértices, un trozo definido del plano. Su construcción es instintiva, y ya los babilónicos estudiaban sus propiedades. Desde que la Escuela pitagórica diera con su famosa fórmula para el triángulo rectángulo, muchos han sido los matemáticos dedicados a estudiar las características de esta figura elemental. Hoy en día, los triángulos se utilizan en los problemas de triangulación que sirven para señalar posiciones con el GPS, también en la arquitectura (y no solo desde el punto de vista ornamental) y en las señales de tráfico omnipresentes en nuestras carreteras.

Dentro de las matemáticas, su enorme importancia radica en que es el ladrillo básico de la geometría. En el plano todos los demás polígonos se pueden descomponer en triángulos. Para ello, basta con elegir un punto cualquiera de un polígono convexo —es decir, en el que todos los ángulos interiores miden menos de 180º y todas sus diagonales son interiores; "sin entrantes"— y trazar desde allí segmentos de rectas a los vértices del polígono, con lo que se trocea el polígono en triángulos.

Ejemplo 1

Cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Por ejemplo, dado un pentágono puede dividirse en triángulos como en la figura.



Ejercicio 1. Triangulación de polígonos en GeoGebra.

a) Prueba a triangular polígonos convexos de 6, 7 y 8 lados.
b) ¿Qué pasaría si el polígono fuese cóncavo?

Aunque la descomposición en triángulos se puede hacer de infinitas maneras, las llamadas *triangulaciones* de los polígonos convexos deben cumplir una serie de propiedades:

1. La unión de todos triángulos obtenidos debe dar el polígono original.
2. Los vértices de los triángulos corresponden justamente a los vértices de un polígono original.
3. Cualquier pareja de los triángulos obtenidos comparten un vértice o un lado.

Ejercicio 2. ¿Cuál es el menor número de triángulos que hacen falta para triangular un polígono convexo de *n* lados?

a) Usando GeoGebra, construye un pentágono (irregular o regular).
b) ¿Cuántos triángulos hacen falta, como mínimo, para triangular un pentágono?
c) ¿Y un hexágono? ¿Y un heptágono? ¿Y un octógono?
d) Con estas ideas, intenta generalizar la propiedad. ¿Cuál es el menor número de triángulos que hacen falta para triangular un polígono convexo de *n* lados?
e) ¿Cuál es el número máximo de triángulos en una triangulación de un polígono de *n* lados?

El número mínimo de triángulos necesarios para esta división es n - 2, donde n es el número de lados del polígono. La demostración es muy simple. Se elige un punto interior, y a partir del mismo se trazan segmentos a todos los vértices. De esta forma se obtiene una descomposición en *n* triángulos. Pero esa no es la estrategia de triangulación óptima. Se elige un vértice y desde él se trazan segmentos a los demás. Los triángulos que se forman cumplen las condiciones requeridas, pero puesto que hay dos vértices adyacentes al escogido al principio, desde esos no hay que lanzar segmentos de unión al vértice original, y solo se forman *n-2* triángulos para cubrir todo el polígono.

Esta posibilidad de *triangular* cualquier figura plana simplifica mucho el cálculo de propiedades, como las áreas, de cualquier tipo de polígonos.

Por estas razones los triángulos fueron objeto de un estudio intensivo en la obra *Los Elementos* del matemático griego Euclides, en concreto en el Libro I. En *Los Elementos,* Euclides resume todo el saber de la época e introduce la visión moderna de las matemáticas: partiendo de unos principios que toma como ciertos (axiomas o postulados), va deduciendo propiedades (proposiciones, teoremas, corolarios) usando el razonamiento lógico. Es probablemente una de las obras más celebradas de las matemáticas por su claridad y porque sienta las bases de la matemática moderna. Según dicen, Albert Einstein los leyó de niño y quedó fascinado.

El libro *Los Elementos* consta de 13 libros, organizados de la siguiente manera:

- Libros I a VI: Geometría plana.
- Libros VII a IX: Teoría de números.
- Libro X: Números irracionales.
- Libros XI a XIII: Geometría del espacio.

Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar por los elementos que los definen: los lados y los ángulos de sus vértices.

Atendiendo a los lados, los triángulos se dividen en equiláteros, isósceles y escalenos. La Definición 20 del Libro I de *Los Elementos* explica con claridad la diferencia entre cada uno de ellos:

> "De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales; isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y escaleno el que tiene los tres lados desiguales".

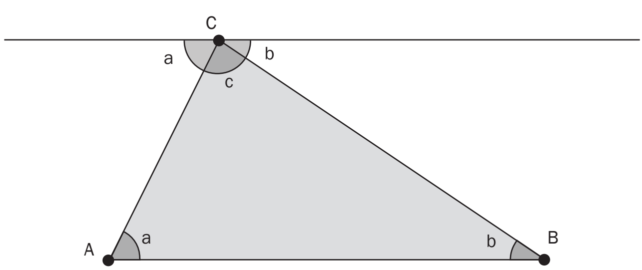
Atendiendo a sus ángulos, se clasifican en rectángulos, obtusángulos y acutángulos, y esta es la Definición 21 del citado libro:

> "De los triángulos, triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos".

Independientemente del tipo de ángulos que tenga un triángulo, estos siempre sumarán 180º o, dicho de otro modo, dos rectos. Esta proposición, enseñada en la escuela primaria, fue probada por Euclides.

La demostración es muy sencilla. Dado un triángulo, si se traza una paralela por el vértice superior a la base opuesta, como en la figura 1, por semejanzas de ángulos, los ángulos denotados por a son iguales y los ángulos b son iguales, y $a + b + c$ suman dos rectos o 180°.

Figura 1



Ejercicio 3. Reproduce la demostración anterior en GeoGebra.

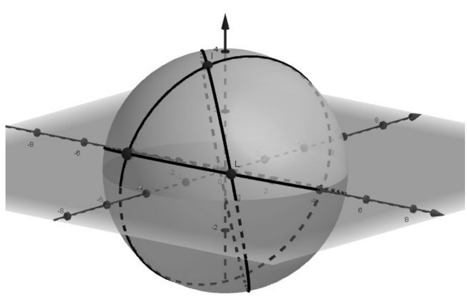
Podríamos preguntarnos si, al salir de los dominios de Euclides (esto es, la geometría del plano), esta propiedad básica sigue siendo verdad. La noción de triángulo se puede extender a cualquier superficie, y en dimensiones arbitrarias a espacios más generales, las llamadas variedades diferenciables. En este caso, nos encontramos con lo que llamamos un triángulo geodésico, cuyos lados son segmentos de rectas geodésicas.

Una recta geodésica en una superficie es la curva que minimiza la distancia entre dos puntos, de la misma manera que las rectas lo hacen en el plano. Por ejemplo, las geodésicas en la superficie de una esfera son los círculos máximos (aquellos que pasan por dos puntos antipodales).

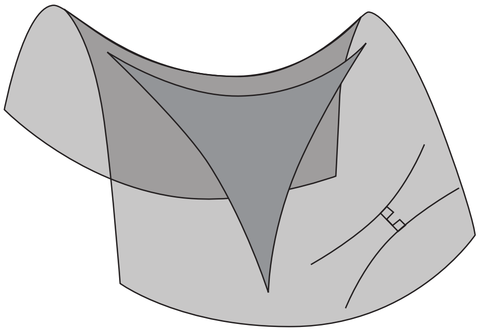
En este universo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es de 180º. La diferencia mide el exceso o defecto debido a la curvatura. Por ejemplo, los ángulos de los triángulos esféricos suman más de 180º (la curvatura de la esfera es positiva) y los ángulos de los triángulos en el plano hiperbólico o de Lobachevski suman menos de 180º (la curvatura es negativa).

Ejemplo 2

Si se traza un triángulo sobre la superficie de una esfera, las propiedades de este polígono no son las mismas que en el plano. La suma de sus ángulos es mayor de 180º debido a que su curvatura es positiva.



En una superficie con curvatura negativa, la suma de los ángulos de los triángulos es menor de 180º.



Las geometrías no euclidianas

Las llamadas *geometrías no euclidianas* surgieron también a la estela de Euclides, aunque precisamente suponen una negación del modelo propuesto por el sabio griego. Euclides construía toda su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que llamó *postulados*. Sus famosos cinco postulados son:

I. Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.
II. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.
III. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
V. Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

El quinto postulado se puede escribir de una forma más familiar como: "Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela".

Así como los cuatro primeros axiomas parecen incuestionables, el quinto no es tan evidente. Muchos creían que no era necesario establecer este axioma en el sistema, ya que se deduciría de los cuatro anteriores, por lo que trataron de probar su dependencia, obteniendo una larga lista de pruebas falsas. Se dedicaron a ello matemáticos como Girolamo Saccheri, que supuso que el axioma era falso y quiso llegar a una contradicción, pero no lo consiguió; Johann Heinrich Lambert, que obtuvo una fórmula para el defecto de ángulo en un triángulo hiperbólico; el francés Adrien-Marie Legendre, quien trabajó 40 años sobre el tema y probó que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es de 180º, etc. Nadie consiguió ni demostrar que era independiente ni dependiente del resto de axiomas. Estos repetidos fracasos llevaron al filósofo y matemático ilustrado Jean le Rond D'Alembert a calificar este problema en 1767 como el escándalo de la geometría elemental.

Karl Gauss, el príncipe de las matemáticas, fue el primero en entender realmente la cuestión. Comenzó a trabajar en él con 15 años, en 1782. En 1817 llegó al convencimiento de que el quinto axioma era independiente de los otros cuatro. Llegó a idear una geometría en la cual se podía trazar más de una paralela a una recta dada por un punto externo, pero nunca publicó su trabajo y lo mantuvo en secreto.

Sí lo discutió con su amigo, el matemático Farkas Bolyai, quien había sido autor de varias pruebas falsas. Su hijo, el matemático János Bolyai, a pesar de que su padre le advirtió que no malgastara su tiempo en esto, también trabajó en el problema. En 1823, Bolyai escribió a su padre: "He descubierto cosas tan maravillosas que estoy asombrado [...] de la nada he creado un nuevo mundo" (la carta original puede consultarse en la dirección web http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Extras/Bolyai_letter.html).

Dos años después escribió sus resultados como un apéndice en el libro de su padre. Gauss quedó impresionado, aunque Bolyai no había construido la nueva geometría, solo había probado que era posible. Demostró que podían existir geometrías bien formuladas (es decir, sin contradicciones internas) en las que no se cumpliera el quinto postulado, pero sí los otros cuatro. El resto de axiomas no permiten este cambio: si se niegan y se mantiene el resto, antes o después aparecen problemas.

Ni Bolyai ni Gauss conocían el trabajo del matemático ruso Nikolái Lobachevski. En 1829 había publicado en una revista local (*Kazan Messenger*) un artículo en ruso en el que no solo probaba que era posible una geometría coherente en la que no se cumplía el quinto axioma de Euclides, sino que además la construía. Matemáticos de la comunidad rusa, como Ostrogradski, rechazaron el trabajo y en el extranjero no se difundió. En 1840 publicó su obra magna*: Geometrical investigations on the theory of parallels* (61 páginas). Esta obra sí tuvo difusión gracias a un resumen en francés en el *Journal de Crelle*. Sin embargo, los matemáticos no aceptaron sus ideas revolucionarias.

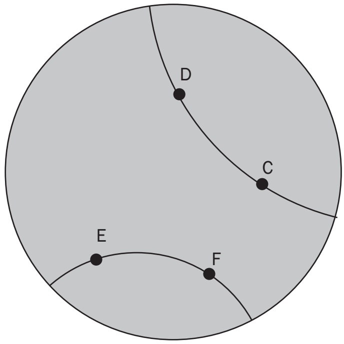
En concreto, Lobachevski reemplazó el quinto postulado de Euclides por este:

> "Existen dos rectas paralelas a una dada por un punto externo a la recta".

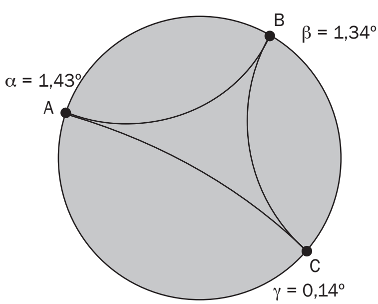
El universo en el que esto se cumple es un universo hiperbólico, abierto, con una curvatura negativa.

Ejemplo 3

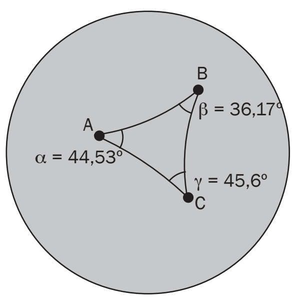
En el disco de Poincaré se cumple el quinto postulado de Lobachevski (dada una recta y un punto exterior a la misma, existen infinitas rectas paralelas a la primera pasando por este punto).



El disco de Poincaré es uno de los modelos más populares para visualizar la geometría hiperbólica. Las rectas, en este caso, están representadas por los diámetros y los arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde, tal y como se muestra en la figura de arriba. En este modelo, la suma de los ángulos de los triángulos geodésicos (véase el capítulo 3) es menor de 180º y no tiene un valor constante, como puede verse en las siguientes figuras.



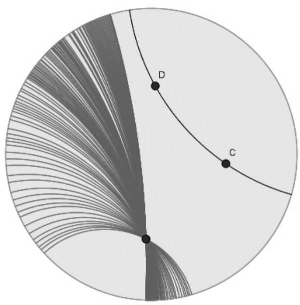
$\alpha + \beta + \gamma = 1{,}43^{o} + 1{,}34^{o} + 0{,}14^{o} = 2{,}9^{o}$



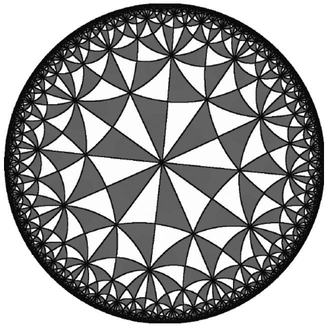
$\alpha + \beta + \gamma = 44{,}53^{o} + 36{,}17^{o} + 45{,}6^{o} = 126{,}3^{o}$

La métrica que se usa en el disco de Poincaré y respecto a la cual se obtienen las rectas geodésicas es la llamada métrica de Cayley-Klein. En su famoso libro *Ciencia e hipótesis*, Poincaré considera un universo que tiene precisamente esta estructura, con una temperatura de 100º Farenheit en su centro que decrece linealmente al cero absoluto en su frontera, la circunferencia. Las longitudes de los objetos, y también de los seres vivos, son proporcionales a la temperatura. Y Poincaré se pregunta cómo estas criaturas descubrirían la forma del universo en el que viven. En la expedición que organizan a la frontera sus piernas se hacen más pequeñas, sus pasos más cortos y concluyen que el universo en el que viven es infinito. Una bella descripción del mundo hiperbólico.

En esta otra figura se puede ver cómo por un punto exterior se pueden trazar infinitas paralelas.



El famoso dibujante M. C. Escher exploró los conceptos de la geometría hiperbólica y colaboró con el matemático H. S. M. Coxeter, en 1956, en la construcción de teselaciones hiperbólicas. Esta imagen es fruto de esa colaboración:



El matemático alemán Bernhard Riemann también ideó un universo no euclídeo, pero negó el quinto axioma de manera diferente a Lobachevski. Trabajó en una geometría en la que, dada una recta y un punto exterior a esta, no había ninguna paralela a la recta que pasara por ese punto. Construyó un modelo en el que las paralelas no son posibles: la geometría esférica.

Riemann, cuya tesis había dirigido Gauss, presentó su trabajo el 10 de junio de 1854 impartiendo la lección sobre el tema y presentando el texto *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre las hipótesis en la que se basa la geometría"), en el que reformuló el concepto de geometría. Con esta conferencia, Riemann accedió a la cátedra en la Universidad de Gotinga. Para él, la geometría era el espacio más una estructura (la métrica) que permitía medir sobre el mismo. Este trabajo se publicó en 1868, dos años después de que muriera.

Ejemplo 4

En la superficie de una esfera se cumple el quinto postulado de Riemann (dada una recta y un punto exterior a la misma, no existe ninguna recta paralela a la primera pasando por este punto).

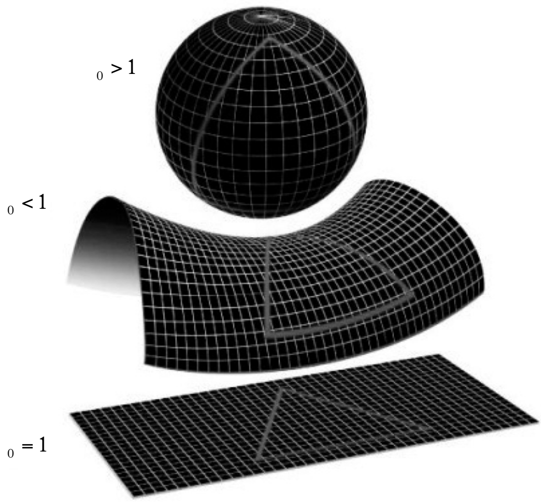
El primero en situar la geometría de Bolyai-Lobachevski al mismo nivel que la euclídea fue Eugeni Beltrami (1835-1900). En 1868 escribió *Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry,* en el que construía un modelo de geometría no euclídea de dimensión 2 en un espacio euclídeo de dimensión 3, la *pseudoesfera.* En este modelo, los cuatro primeros axiomas se cumplían, pero no el quinto.

El modelo lo completó Klein en 1871, quien dio además modelos de otras geometrías no euclídeas, como la de Riemann. Klein demostró que hay tres tipos de geometrías:

- Hiperbólica (Bolyai-Lobachevski).
- Esférica (Riemann).
- Euclideana.

Ejemplo 5

Modelos de Klein para los tres tipos de geometría (Ω es la curvatura).



Estas abstractas construcciones matemáticas son, curiosamente, las que aparecen al estudiar el universo (son sus posibles formas), y son las que permitieron a Albert Einstein desarrollar la teoría de la relatividad. Su complejidad se refleja de forma sencilla en las propiedades de los modestos triángulos.

Los puntos notables de un triángulo

Las propiedades más relevantes de los triángulos, además de las áreas y perímetros, vienen de la mano de sus puntos notables. Estos son:

- El baricentro o centroide. Es el punto de intersección de las medianas, los tres segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto. Es el centro de gravedad de la figura.

- El circuncentro. Es la intersección de las mediatrices de los lados, es decir, el punto de corte de las rectas perpendiculares a los lados que se trazan en su punto medio.
- El incentro. Es la intersección de las bisectrices de los ángulos, es decir, de las semirrectas que parten del vértice de sus ángulos y los dividen en dos partes iguales.
- El ortocentro. Es el punto de corte de las alturas (desde cada vértice, la recta perpendicular al lado opuesto).

Ejercicio 4. Construye en GeoGebra los puntos notables del triángulo.
a) Define un triángulo.
b) Calcula los diferentes puntos indicados en la lista anterior.

Estos puntos tienen propiedades interesantes: el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita que pasa por los tres vértices del triángulo; y el incentro es el centro de la circunferencia inscrita, que es tangente a los lados del triángulo. El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados (en un triángulo equilátero los tres puntos son el mismo); es decir, pertenecen a la misma recta, llamada recta de Euler. Se denomina así en honor al matemático suizo, Leonhard Euler, quien demostró la colinealidad de los mencionados puntos notables de un triángulo en 1765.

Ejercicio 5. Comprueba con GeoGebra que se cumplen las anteriores propiedades.

Otros puntos notables del triángulo

Más allá de estos puntos notables se pueden considerar otros, como el de Longchamps, nombrado así por el matemático francés Gaston Albert Gohierre de Longchamps, y que es el punto obtenido al reflejar el ortocentro del triángulo alrededor del circuncentro. Este punto resulta ser también el ortocentro del triángulo complementario construido trazando segmentos paralelos a cada lado por el vértice opuesto.

Otro es el punto de Schiffler, descubierto por el geómetra alemán Kurt Schiffler; este punto se define como el punto invariante bajo transformaciones euclidianas del triángulo. Y sigue la lista con los puntos de Exeter y de Gossard, con definiciones algo más complejas.

Lo curioso es que, milagrosamente, todos estos puntos mencionados se colocan alineados en la recta de Euler. Pero hay otros puntos relevantes que quedan fuera de esta recta, como el incentro, el punto en el que se cortan las tres bisectrices de sus ángulos internos. Equidista de los tres lados y, por lo tanto, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y tangente a sus tres lados. El incentro no está en la recta de Euler (excepto en los triángulos isósceles), y se convierte así en el punto disidente de esta familia.