Investigador: Pablo Candela
Título: La conjetura de Marton en combinatoria aditiva

Resumen:

La combinatoria aditiva es una rama muy activa de las matemáticas que estudia varios tipos de estructuras en subconjuntos de grupos abelianos. Especialmente desde los años 1990, ha sido fuente de importantes desarrollos e interacciones profundas con otras áreas, como la teoría de números, la teoría ergódica, la teoría de grafos y el análisis armónico. En este contexto, una de las líneas más relevantes de investigación ha sido la caracterización estructural de conjuntos con crecimiento aditivo "controlado".

Una conjetura central en este ámbito, formulada a finales de los años 1990, es la *conjetura de Marton* (también conocida como *conjetura polinomial de Freiman-Ruzsa*). Esta conjetura busca describir la estructura de los subconjuntos finitos A de un grupo abeliano cuando el conjunto suma $A+A=\{a+a' \mid a,a' \in A\}$ es "pequeño", es decir, su cardinalidad es acotada por $K|A|$ para alguna constante $K>1$. La conjetura predice que en tal caso, el conjunto A debe ser altamente estructurado. La formulación precisa más simple de la conjetura se da en el entorno de los espacios vectoriales sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_2$, y dice lo siguiente: si $A \subset \mathbb{F}_2^n$ es tal que $|A+A| \leq K|A|$, entonces existe un subespacio vectorial $V \leq \mathbb{F}_2^n$ con $|V| \leq |A|$ tal que A está incluido en la unión de a lo sumo CK^C clases laterales de V, donde C es una constante absoluta.

Este caso de la conjetura ha sido demostrado recientemente por Gowers, Green, Manners y Tao, mediante técnicas sofisticadas que combinan métodos de varias áreas y generan nuevos desarrollos, en particular en el uso de la entropía. El caso más clásico de la conjetura, para conjuntos $A \subset \mathbb{Z}$, sigue abierto.

Objetivos del proyecto:

1. Introducción a la combinatoria aditiva, con énfasis en las herramientas y problemas estructurales relacionados con conjuntos de suma pequeña.
2. Estudiar en profundidad la conjetura de Marton y su papel en el área.
3. Comprender la estrategia de la prueba de Gowers, Green, Manners y Tao en el caso de $\mathbb{F}_2^n$, ampliando luego el estudio a los grupos abelianos de torsión acotada, si posible.
4. Explorar los casos aún abiertos de la conjetura, en particular su formulación para subconjuntos finitos de los enteros y algunos trabajos recientes sobre este caso.

Referencias:

W. T. Gowers, B. Green, F. Manners, T. Tao, *On a conjecture of Marton*, preprint `https://arxiv.org/abs/2311.05762`

W. T. Gowers, B. Green, F. Manners, T. Tao, *Marton's Conjecture in abelian groups with bounded torsion*, preprint `https://arxiv.org/abs/2404.02244`

R. Raghavan, *Improved Bounds for the Freiman-Ruzsa Theorem*, preprint `https://arxiv.org/abs/2512.11217`

T. Tao, V. Vu, *Additive combinatorics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.