

Propuesta de temas de Andrei Jaikin Zapirain (UAM-ICMAT)

April 7, 2024

Es una lista de posibles temas (aunque no exhaustiva). La elección del tema se realizará teniendo en cuenta los intereses y el nivel de preparación del estudiante.

Álgebras y Grupos de Golod-Shafarevich.

Los álgebras y grupos de Golod-Shafarevich fueron introducidos en el año 1964 por los matemáticos Evgenii Golod e Igor Shafarevich y han servido como una herramienta esencial para construir ejemplos en la teoría de anillos y la teoría de grupos. Usando su construcción Golod y Shafarevich resolvieron varios problemas famosos.

El primer problema es atribuido a Kurosh y Levitzky y pregunta si existe un álgebra finitamente generado de dimensión infinita con todos los elementos nilpotentes. La construcción de Golod-Shafarevich proporciona un álgebra con estas propiedades. El segundo problema es un análogo del problema anterior para grupos. El problema está atribuido a Burnside y pregunta si existen grupos infinitos, finitamente generados con todos los elementos de orden finito. La existencia de un grupo con estas propiedades se sigue también del trabajo de Golod y Shafarevich. El tercer problema es un problema de teoría de números que pregunta si cualquier cuerpo de números tiene una extensión finita cuyo anillo de enteros es un dominio de ideales principales. La solución del problema se obtiene construyendo una extensión infinita con un pro- p grupo de Galois que satisface condiciones de Golod-Shafarevich.

El trabajo pretende ser una introducción a los álgebras, grupos y pro- p grupos de Golod-Shafarevich y a algunas de aplicaciones mencionadas anteriormente.

Bibliografía:

- [1] J. D. Dixon, M. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, Analytic pro- p groups.
- [2] M. Ershov, Golod-Shafarevich groups: a survey. *Internat. J. Algebra Comput.* 22 (2012), 68 pp.

Grupos finitos cuyo orden es divisible por 2 primos

Sean p y q dos primos, En un curso básico de teoría de grupos se ve que los grupos de orden pq , p^2q , p^3q or p^2q^2 son resolubles. Estos resultados son casos particulares del teorema de Burnside que dice que un grupo finito cuyo orden es divisible por sólo dos primos es resoluble.

El trabajo pretende desarrollar la demostración de este teorema usando las técnicas de teoría de representaciones de grupos.

Bibliografía:

M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Dover Books on Mathematics.

Subgrupos finitamente generados de grupos libres

Estudiaremos métodos analíticos y algebraicos desarrollados recientemente por nuestro equipo de investigación que han llevado a la solución de varios problemas sobre subgrupos de grupos libres que permanecían sin resolver durante muchos años. Como aplicación de estos métodos, se planteará al estudiante obtener una nueva solución de la conjetura de Scott (resuelta originalmente por Bestvina y Handel) sobre el rango del subgrupo de puntos fijos de un automorfismo de un grupo libre.

Bibliografía:

- [1] Antolín, Yago and Jaikin-Zapirain, Andrei, The Hanna Neumann conjecture for surface groups. *Compos. Math.*158 (2022), 1850–1877.
- [2] Bestvina, Mladen and Handel, Michael, Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math.* 135 (1992), 1–51.
- [3] Dyer, Joan L. and Scott, G. Peter, Periodic automorphisms of free groups. *Comm. Algebra* (1975), 195–201.

[4] Jaikin-Zapirain, Andrei , Free groups are L^2 -subgroup rigid, preprint.

El grupo absoluto de Galois de un cuerpo p -ádico

Se sabe que para cada número natural n existe un número finito de extensión de $\mathbb{Q}_p$ de grado n . Veremos, por un lado, como se puede obtener este resultado con los métodos de la teoría de cuerpos y, por el otro, a partir del estudio del grupo absoluto de Galois de $\mathbb{Q}_p$. Veremos como las propiedades estructurales de grupos absolutos de Galois de cuerpos p -ádicos se reflejan en resultados sobre extensiones de cuerpos p -ádicos.

Bibliografía:

Jarden, Moshe; Shusterman, Mark, The absolute Galois group of a p -adic field. Math. Ann. 386 (2023), 1595–1603.