Transporte óptimo y óptica geométrica.

La ecuación de transporte óptimo de Monge-Kantorovich modeliza el siguiente problema: se intenta transportar (o reorganizar) la masa de un dominio a otro, de una manera óptima, por ejemplo, minimizando un coste (la distancia u otra métrica).

Más precisamente, sean Ω, Ω' dos dominios acotados de $\mathbb{R}^n$, y sean f, g dos distribuciones (positivas) en Ω y Ω', respectivamente, con la misma masa. Se considera una función de coste $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; el objetivo es encontrar un funcional de transporte admisible $T : \Omega \to \Omega'$ que minimiza el coste total dado por

$$\int_{\Omega} c(x - T(x))f(x)dx.$$

Se dice que un transporte es admisible si preserva medida.

Es bien conocido (Caffarelli, Gangbo-McCann,...) que la solución del problema de transporte existe a.e. para costes c convexos, y viene dada en términos de un potencial $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ que satisface una ecuación de Monge-Ampère

$$g(x - \nabla c^*(-\nabla u)) \det \big(I + D^2 c^*(-\nabla u) D^2 u\big) = f(x), \tag{1}$$

que es elíptica, pero completamente no-lineal.

Recientemente, el transporte óptimo se ha revelado como el marco natural para describir fenómenos de propagación de ondas en óptica geométrica. En particular, la propagación de un *haz* de luz monocromática es equivalente a un problema de transporte ṕtimo (Rubinstein-Wolansky) donde la masa a transportar es la intensidad de la luz. Adicionalmente, este enfoque permite caracterizar estructuras *cáusticas* como singularidades de una ecuación tipo Monge-Ampère.