El funcional de Willmore, geometría, modelización y óptica.

Dada una superficie inmersa $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ orientable, sin borde, definimos el funcional de Willmore como

$$\mathcal{W}(f) = \int_\Sigma H^2 \, d\sigma - \int_\Sigma K \, d\sigma, \tag{1}$$

donde H denota la curvatura media de Σ y K su curvatura de Gauss. Una variante se escribe como

$$\mathcal{W}(f) = \frac{1}{4} \int_\Sigma (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \, d\sigma,$$

donde κ_1, κ_2 son las curvaturas principales de la superficie.

Este funcional da una medida cuantitativa de cuánto una superficie dada se desvía de una esfera, y es invariante por transformaciones conformes. A veces se le denomina "bending energy" porque aparece de manera natural en diversos problemas físicos y, en particular, en biología, ya que está íntimamente relacionado con el funcional de Helfrich que modeliza membranas celulares (y nos explica la forma de un glóbulo rojo).

Desde el punto de vista de las EDPs, la ecuación de Euler-Lagrange de (1) es de cuarto orden y necesita técnicas específicas que combinan análisis, geometría y topología.

Adicionalmente, este funcional es importante en óptica geométrica ya que aparece en el diseño de lentes progresivas, utilizadas para la corrección de la presbicia o vista cansada. Sin embargo, la geometría diferencial impone una restricción a la construcción de dicha lente: no es posible diseñar una superficie suave con curvatura media variable (=visión progresiva) sin inducir astigmatismo (=diferencia de curvaturas principales) que emborrone la imagen, y esta limitación matemática es la que establece el principal límite de calidad visual alcanzable con una lente progresiva.