

Equivalencia de soluciones en EDPs elípticas no lineales. Caso clásico y caso fraccionario.

El objetivo de este proyecto será estudiar diferentes nociones de solución (y la relación entre ellas) para ecuaciones en derivadas parciales cuyo operador principal es de tipo p -Laplaciano. Este es un operador diferencial de segundo orden cuyo comportamiento varía fuertemente en función del valor de un parámetro p que aparece en su definición. Si $p=2$ se recupera el caso del Laplaciano habitual. Sin embargo, si p es distinto de dos la naturaleza del operador cambia completamente: se convierte en uno de los principales ejemplos de operadores no lineales. Aún más, dependiendo de si p es menor o mayor que 1 este puede llegar a ser un operador singular o no degenerado, respectivamente, en ciertas regiones.

Dada su complejidad, encontrar una solución fuerte (aquella donde la función es derivable tantas veces como necesitamos) de una ecuación relacionada es una opción poco factible y necesitaremos por tanto relajar esta noción lo suficiente para poder probar existencia. Surge así el concepto de solución débil (o de energía), donde la ecuación se reinterpreta en un sentido integral. Sin embargo, la naturaleza de algunos problemas hace necesaria una noción más puntual de solución, como es el caso de las llamadas soluciones viscosas. Estas están fuertemente relacionadas con propiedades de estabilidad y son esenciales para probar aspectos cualitativos o convergencia de métodos numéricos.

Una pregunta natural es la relación entre ambos conceptos de solución. A lo largo del trabajo analizaremos bajo qué condiciones podemos asegurar que las soluciones débiles y las soluciones viscosas de una ecuación dada coinciden. Es decir, cuándo las dos nociones son equivalentes.

Una vez entendido este problema, plantaremos la misma cuestión para la versión no local del operador, conocido como p -Laplaciano fraccionario. Para ello, estudiaremos en detalle el nuevo contexto no local y en qué se traducen los dos tipos de soluciones, analizando en profundidad las dificultades y diferencias de este nuevo marco funcional. Veremos finalmente en qué casos podemos probar equivalencia de soluciones en dicho ámbito fraccionario.