PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

TÍTULO: El operador desplazamiento en espacios de Hardy: Subespacios invariantes.

ANTECEDENTES: Uno de los problemas más importantes en Teoría de Operadores es caracterizar los subespacios invariantes de un operador. La motivación básica para estudiar los subespacios invariantes viene del interés de conocer la estructura de los operadores a través de los mismos. El teorema de descomposición de Jordan, para operadores en espacios de dimensión finita, se puede contemplar como la expresión de un operador mediante la suma directa de sus restricciones a ciertos subespacios invariantes. Por ejemplo, el hecho de que toda matriz de dimensión finita es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior se sigue inmediatamente de la existencia de subespacios invariantes para operadores sobre espacios de dimensión finita. Con mayor generalidad, si T es un operador sobre un espacio de Hilbert H y M es un subespacio invariante bajo T, entonces T tiene representación matricial triangular superior (por cajas) respectos de la descomposición de H en suma directa de M con su ortogonal.

En muchos casos, para hallar los subespacios invariantes de un operador dado, no sólo es necesario un conocimiento de la Teoría de Operadores sino también de otras áreas del Análisis, como son el Análisis de Fourier o la Teoría de Funciones. Por ejemplo, denotemos por ℓ^2 el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos de módulo al cuadrado sumable y consideramos el operador desplazamiento sobre una base ortonormal; la caracterización de los subespacios invariantes de este operador requiere la teoría de Beurling de descomposición de las funciones del espacio de Hardy en funciones interiores y funciones exteriores y que data de los años cuarenta. De este modo, hay quien piensa que es necesario un mayor desarrollo de las técnicas analíticas para resolver el problema del subespacio invariante. Este problema está considerado por los expertos como el problema abierto más importante en Teoría de Operadores en espacios de Hilbert. En el contexto de los espacios de Banach este problema fue resuelto por Enflo a mediados de los setenta y publicado 1987 (véase [En]).

Por otra parte, cabe señalar que los operadores de desplazamiento actuando en espacios de funciones analíticas juegan un papel fundamental en el estudio de los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert, puesto que, a menudo, sirven como modelos de los mismos. Por ejemplo, trabajos de Rota [Ro], de Branges y Rovnyak [BR] y Foias [Fo] muestran que la restricción de una suma directa del operador desplazamiento hacia atrás (denominado “backward-shift”) a un subespacio invariante es un modelo para clases de operadores acotados en un espacio de Hilbert. En particular, para la clase de las contracciones estrictas en un espacio de Hilbert.

OBJETIVOS:

Fundamentalmente son dos las líneas básicas de introducción a la investigación que planteamos: por un lado los operadores cíclicos que se encuadran dentro de la Teoría General de operadores y los operadores de desplazamiento, cuyo marco cae dentro de lo que viene a llamarse Teoría Concreta de Operadores. Esta línea está íntimamente relacionada con la Teoría de Funciones Analíticas. Obviamente ambas líneas de investigación confluyen en algunas cuestiones, por ejemplo, se puede estudiar cuándo un operador de desplazamiento es cíclico.

Los operadores de desplazamiento han inspirado un programa continuo de investigación, tratándose de conectar el estudio con otros operadores a los cuales modelizan. Este programa incluye el estudio del espectro, compacidad, semigrupos y operadores subnormales. Cada trabajo en este tema ilustra el abundante potencial de la materia para conectar la Teoría de Operadores con la Teoría de Funciones y el Análisis de Fourier (véase [Shi]).

Nuestro interés fundamental se va a centrar en el estudio de la ciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás o "backward-shift", que en lo sucesivo denotaremos por B, actuando en los espacios de Hardy H^p , con $0<p<\infty$. Cuando $1<p<\infty$, los subespacios invariantes de B fueron caracterizados por Douglas, Shapiro y Shields [DSS] en términos del concepto de *pseudocontinuación analítica*. Para $0<p\leq 1$, Alexandrov [A] determinó los subespacios invariantes de B en H^p en un notable trabajo publicado en ruso, y que no había sido traducido al inglés hasta el libro de Cima de Ross [CR].

Bibliografía:

[A] A. B. Alesandrov, *Invariant subspaces of shift operators. An axiomatic approach,* Investigations on linear operators and the theory of functions, XI, Zap. Nauchn. Sem. Lenigrand Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 113, (1981), 7-26.

[BR] L. de Branges, J. Rovnyak, *Canonical models in quantum scattering theory.* 1966 *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics (Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1965)* pp. 295--392 *Wiley, New York.*

[CR] J. Cima., W. Ross, *The backward shift on the Hardy space.* Mathematical Surveys and Monographs, 79. *American Mathematical Society, Providence, RI,* 2000.

[DSS] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **20** 1970 fasc. 1, 37--76.

[En] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces,* Acta Math. {\bf 158} (1987), 213-313.

[Fo] C. Foias, *A remark on the universal model for contractions of G. C. Rota.,* Com. Acad. R. P. Romîne **13** 1963 349--352.

[Ro] G. C. Rota, *On models for linear operators.* Comm. Pure Appl. Math. **13** 1960 469--472.

[Shi] A. L. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory,* Topics in Operator Theory, Math. Surveys Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 13 (1974), 49-128

PALABRAS CLAVE: Subespacios Invariantes, vectores cíclicos, espacio de Hardy, Operador Shift, Operador Backward-Shift.

METODOLOGÍA:

En general, la metodología será la propia de las matemáticas. Se estudiarán los resultados obtenidos por otros autores, así como herramientas matemáticas que puedan ser necesarias para dar solución a problemas planteados siguiendo el método lógico deductivo.

Asimismo, son de primordial interés las siguientes cuestiones:

- Buscar información en bibliotecas especializadas.
- Intensificar las relaciones con otros de los muchos investigadores que trabajan en temas próximos con el consiguiente enriquecimiento de ideas nuevas.

GALLARDO
GUTIERREZ
EVA ANTONIA -
DNI 28493265Z

Firmado digitalmente por GALLARDO GUTIERREZ EVA ANTONIA - DNI 28493265Z
Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, o=UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, ou=CERTIFICADO ELECTRONICO DE EMPLEADO PUBLICO, serialNumber=IDCES-28493265Z, sn=GALLARDO GUTIERREZ, givenName=EVA ANTONIA, cn=GALLARDO GUTIERREZ EVA ANTONIA - DNI 28493265Z
Fecha: 2021.03.01 16:24:36 +01'00'

Fdo. Eva A. Gallardo Gutiérrez