Comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales para tiempos grandes.
(Large time behavior of solutions of Differential Equations)

Tutor: José M. Arrieta

Muchos de los procesos de la vida real vienen descritos por Ecuaciones Diferenciales de evolución ya sean Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) o Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs). Entender el comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones cuando el tiempo se hace grande (es decir, el comportamiento asintótico de las soluciones) brinda información muy relevante sobre la evolución del sistema en el futuro.

En este trabajo nos adentraremos en el estudio de este importante aspecto, ya sea para EDOs o EDPs dependiendo del interés y preparación del estudiante. Los temas concretos que se podrían abordar son:

Comportamiento cerca de una solución estacionaria. La clase más sencilla de soluciones de estas ecuaciones la constituye la clase de soluciones estacionarias, es decir soluciones que no se mueven con el tiempo. Identificar estas soluciones y describir el comportamiento de las soluciones cerca de estas es de capital importancia para entender la dinámica global del sistema en cuestión. Estudiaremos en este tema:

- **Estabilidad de las soluciones estacionarias.** Caracterizaremos la estabilidad mediante el signo del primer autovalor del problema linealizado en la solución estacionaria.

- **Soluciones cerca del estado estacionario.** Estudiaremos la existencia de soluciones que convergen al estado estacionario cuando $t \to +\infty$ o que emergen del estado estacionario. Cada una de esta clase de soluciones se constituye en una variedad diferenciable, que se denominan Variedad Estable y Variedad Inestable.

- **Equivalencia topológica con un sistema lineal**. Veremos que genericamente, el comportamiento del sistema cerca de una solución estacionaria es topologicamente equivalente al comportamiento del sistema linealizado en la solución estacionaria. Esto se conoce como el Teorema de Hartman-Grobman.

Comportamiento global del sistema para tiempos grandes. En general, no es suficiente con conocer el comportamiento del sistema cerca de cada solución estacionaria para entender el comportamiento "global" del sistema. Para tener información global del sistema se necesita utilizar herramientas que permitan analizarlo globalmente. En esta dirección se puede estudiar:

- **Existencia del atractor.** En varias situaciones importantes se tiene que existe un conjunto acotado $\mathcal{A}$ que atrae a toda solución del sistema. Es decir, para cualquier estado inicial a medida que el tiempo se hace grande, la solución que parte de esta condición inicial se aproxima a este conjunto $\mathcal{A}$, que se denomina el **Atractor global** del sistema. Estableceremos condiciones que garantizan la existencia de esta atractor.

- **Estructura del atractor.** Estudiaremos propiedades importantes del atractor, ya sean propiedades topológicas como que es un conjunto compacto y conexo, como propiedades dinámicas, como que es un conjunto invariante. Es más, en algunos casos importantes y relevantes como es es el caso de los "sistemas gradiente", veremos que podemos caracterizar completamente este atractor como el conjunto formado por la unión de todos las soluciones estacionarias y todas las variedades inestables globales de estos.

Incluimos a continuación un listado de referencias para adentrarse en el estudio de estos temas.

Referencias

[1] C. Fernández Perez, J.M. Vegas Montaner, *Ecuaciones Diferenciales II. Ecuaciones no lineales.* Pirámide. (1996)

[2] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society (1988)

[3] J. K. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Text in Applied Mathematics. Springer-Verlag (1991)

[4] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer Verlag (1982)