LA CONJETURA DE RUBIN-STARK

DANIEL MACIAS CASTILLO

El objetivo principal de este trabajo es intentar entender el artículo [3] de Karl Rubin, en el que se formula la célebre Conjetura de Rubin-Stark. La referencia complementaria [4] servirá para poner en contexto, y dar perspectiva sobre la importancia de, esta conjetura.

Este objetivo servirá para orientar el estudio de la Teoría Algebraica de Números y el Álgebra Homológica necesarias a las que no se hayan visto expuestos previamente los estudiantes (a través de libros como [2, 1]).

Sea K/k una extensión finita abeliana de cuerpos de números (es decir, k y K son a su vez extensiones finitas de $\mathbb{Q}$). La Conjetura de Stark, en la reformulación dada por John Tate en [5], predice ciertas relaciones entre los términos dominantes en $s = 0$ de las funciones L de Dirichlet asociadas a los caracteres de $\mathrm{Gal}(K/k)$ (normalizadas por reguladores apropiados). Estas relaciones se pueden sintetizar en una propiedad de 'racionalidad equivariante': predecir que las derivadas superiores $\Theta^{(r)}(0)$ en $z = 0$ de una función L equivariante $\Theta(z)$, apropriadamente normalizadas, pertenecen al álgebra de grupo $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)]$.

El intento naive de formular una versión 'entera' de la Conjetura de Stark, remplazando $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)]$ directamente por $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/k)]$, resulta ser falso. Este problema lo soluciona usar en su lugar el llamado 'retículo de Rubin' en la formulación de la Conjetura de Rubin-Stark. El propio Rubin demuestra esta versión entera, por ejemplo, para extensiones cuadráticas K/k.

A día de hoy se estudian numerosas conexiones de (generalizaciones de) la Conjetura de Rubin-Stark con un gran elenco de conjeturas centrales a la teoría álgebraica de números. En particular, estas conexiones han permitido comprobar su veracidad en el caso particular en que K es una extensión abeliana de $\mathbb{Q}$, en el que se consiguió deducir a partir de la Conjetura Principal de Teoría de Iwasawa demostrada por Andrew Wiles.

References

[1] P. J. Hilton, U. Stammbach, A course in Homological Algebra, Springer-Verlag, 1970.

[2] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Springer, 1991.

[3] K. Rubin, A Stark Conjecture 'over $\mathbb{Z}$' for abelian L-functions with multiple zeros,, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 33-62.

[4] C. D. Popescu, Integral and p-adic refinements of the Abelian Stark conjecture, In: Arithmetic of L-functions, IAS/Park City Math. Series, vol. 18 (AMS, 2011), 45-101.

[5] J. Tate, Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$, Progress in Mathematics Vol. 47, Birkhauser, Boston, 1984.