ICMAT

Boletín trimestral
Instituto de Ciencias Matemáticas
CSIC-UAM-UC3M-UCM

Segundo trimestre 2013

Editorial

Matemáticas del Planeta Tierra

Christianne Rousseau, Universidad de Montreal. Han transcurrido ya cuatro años desde que propuse la idea del programa Matemáticas del Planeta Tierra 2013 (MPE2013) y los institutos de matemáticas estadounidenses tomaron la decisión de celebrar un año dedicado a actividades científicas alrededor de este tema. Desde entonces la iniciativa ha podido contar con el patrocinio de la Unesco y ha alcanzado la envergadura de un año internacional con 140 socios de todas partes del planeta, todos comprometidos con la organización de actividades científicas y de divulgación sobre la misma materia.

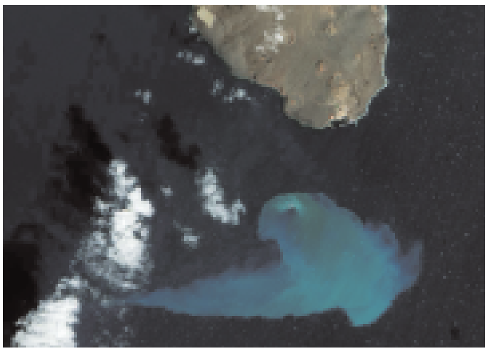
El período 2009-2011 se centró sobre todo en la planificación de importantes programas científicos y *workshops*, mientras que en 2012 se prestó mucha atención también a la planificación de actividades de divulgación, incluyendo los preparativos para la exposición de MPE. Últimamente hemos sido testigos de los muchos esfuerzos dedicados a generar material curricular que permite el enriquecimiento de la enseñanza de las matemáticas con aplicaciones relacionadas al planeta Tierra. La iniciativa MPE2013 se lanzó de forma oficial el día 7 de diciembre de 2012, al mismo tiempo que se lanzaba en Canadá. Desde entonces vienen celebrándose lanzamientos sucesivos en diversos países. La inauguración oficial europea tuvo lugar el día 5 de marzo de 2013 en la sede de la Unesco en París durante la celebración de una jornada de la MPE que fue organizada conjuntamente por la Unesco y la International Mathematical Union (IMU). *(Sigue en p. 2)*

Contenidos

Explorar la Tierra con fórmulas

La iniciativa internacional Matemáticas en el Planeta Tierra pretende reclamar la atención de los investigadores sobre los grandes retos que afronta nuestro mundo y mostrar al público la potencia de la herramienta matemática para tratar este tipo de problemas, que abarcan desde el cambio climático hasta el estudio de enfermedades infecciosas. Pese a que este campo interdisciplinar apenas está desarrollado y requiere un gran impulso, varias experiencias –como los estudios del terremoto de Lorca o de la erupción del Hierro– revelan la capacidad de esta disciplina para analizar y ayudar a gestionar los fenómenos terrestres.

Ágata Timón (ICMAT). La actividad humana parece que influyó en la catástrofe que asoló la localidad murciana de Lorca el 11 de mayo de 2011. Según el análisis de los datos registrados antes y durante el temblor por un equipo internacional, la explotación de los acuíferos de la vega lorquina alteró el estado de fuerzas bajo la superficie terrestre, controlando las características del terremoto, como pudo comprobarse con modelos matemáticos.

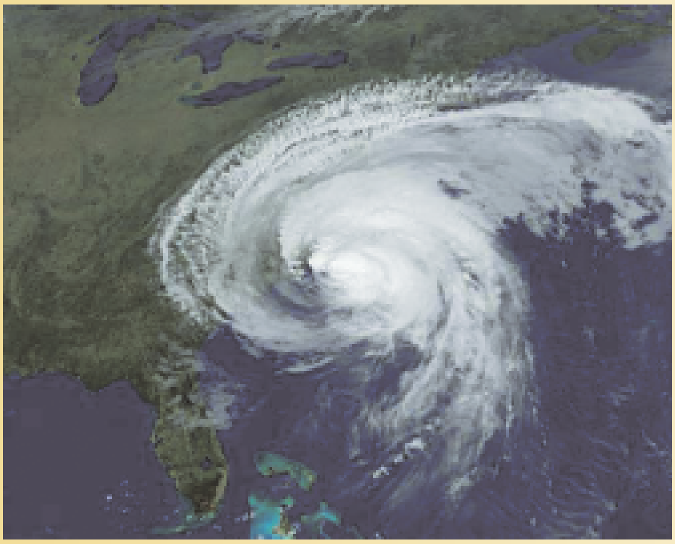


NASA

Imagen la de erupción submarina de El Hierro premiada como foto del año de la NASA.

Esta es solo una muestra de las aplicaciones que la geomatemática tiene en el estudio de múltiples aspectos de las ciencias de la Tierra. Por ello, el número de investigadores con capacidad de realizar esta investigación multidisciplinar aumenta de manera lenta, pero constante, según describen los expertos. *(Sigue en p. 3)*

Matemáticas del Planeta Tierra



Las matemáticas son una herramienta fundamental para la modelización del clima terrestre.

(Viene de p. 1) También se inauguró la Exposición de Código Abierto de MPE (Open Source MPE Exhibition) en la Unesco el día 5 de marzo de 2013 (www.mpe2013.org/exhibition). Esta exposición se basa en la plataforma de Código Abierto Imaginary que desarrolló el Instituto de Matemáticas Oberwolfach. Museos científicos y escuelas tienen la posibilidad de descargar los módulos para su uso posterior o para adaptarlos. Hasta la fecha, los módulos disponibles en la página web consisten en vídeos cortos y aplicaciones interactivas que provienen de módulos presentados al concurso internacional de MPE. El ganador del primer premio fue el español Daniel Ramos por su módulo, Sphere of the Earth, en el que se muestra que los mapas de la superficie esférica de la Tierra en un plano tienen que tener distorsiones necesariamente. El módulo es una aplicación interactiva mediante la cual el usuario selecciona una región (de disco) para ver cómo queda distorsionada en varios mapas.

Aunque inicialmente MPE2013 fue concebido como un año científico, sus actividades escolares y de divulgación van cobrando cada vez más importancia a través de las conferencias públicas que se organizan en todas partes del mundo, los festivales MPE y las semanas especiales para escuelas, además de varias exposiciones que actualmente se encuentran en fase de planificación. MPE no dispone de ningún presupuesto propio; funciona conjuntamente con socios que se comprometen a organizar actividades científicas y de divulgación utilizando fondos de sus respectivos presupuestos. Es un sistema que funciona bien, y MPE2013 continúa extendiéndose alrededor del mundo. Su éxito se debe al hecho de ser una iniciativa tan oportuna. La comunidad científica es cada vez más consciente de la importancia de los desafíos planetarios: el efecto invernadero con todas sus consecuencias, todavía desconocidas (eventos climatológicos cada vez más extremos, incidencia sobre el crecimiento de la vegetación, subida del nivel del mar, etc.), y la necesidad de orientar la economía hacia la sostenibilidad, dado el crecimiento de la población mundial. Al mismo tiempo, a los matemáticos les gusta solucionar problemas de su disciplina. MPE2013 nos permite descubrir los bellos problemas matemáticos que se encuentran detrás de los problemas planetarios, con la esperanza de atraer a una nueva generación de investigadores dotados para que aborden estas cuestiones. Los problemas del planeta son esencialmente de tipo interdisciplinar y MPE2013 brinda la ocasión de construir nuevas colaboraciones con otras disciplinas científicas. En cuanto a la divulgación, MPE2013 proporciona muchos ejemplos que explican al público la importancia de las ciencias matemáticas dentro de la organización social y tecnológica de nuestra sociedad, además de la importancia de la investigación científica para entender mejor los retos planetarios y la búsqueda de soluciones para resolverlos.

> “Las actividades de divulgación van cobrando cada vez más importancia”

> “Los científicos son cada vez más conscientes de la importancia de los desafíos planetarios”

Pero Matemáticas del Planeta Tierra 2013 no trata solamente de los desafíos del planeta, sino que se refiere a todo tipo de aspectos de la Tierra para los que las matemáticas son muy útiles. Por ejemplo, las matemáticas proporcionan las herramientas que nos permiten descubrir nuestro planeta. La detección remota nos permite explorar tanto la superficie de la Tierra como su interior. La teoría de los sistemas dinámicos constituye una herramienta para describir los movimientos de los planetas y el comportamiento caótico de la Tierra. La biología matemática trata de explicar la biodiversidad, el funcionamiento de los ecosistemas y la evolución. También nos permite modelar con éxito la extensión de enfermedades epidémicas, además de ayudar a controlarlas. Algunos de estos temas pueden explicarse en las escuelas y ayudar a encontrar respuestas a la pregunta "¿para qué sirven las matemáticas?". El material de enriquecimiento curricular ya empieza a producirse en muchos países y se pone a disposición en la red para que se pueda compartir con el planeta entero.

MPE2013 ha iniciado una colaboración sin precedentes alrededor del mundo con el fin de avanzar en la investigación acerca del planeta y de potenciar la labor de divulgación sobre los temas tratados en esta iniciativa. Ya se están planificando actividades para este año y para años venideros. El espíritu de Matemáticas del Planeta Tierra persistirá más allá del 2013.

Christianne Rousseau es promotora y directora de MPE2013 y vicepresidenta de la Unión Matemática Internacional (IMU) .

Explorar la Tierra con fórmulas

(Viene de p. 1) Sin embargo, en España este tipo de perfil todavía es muy escaso. "En el ámbito de las matemáticas españolas el porcentaje de equipos que se dedica a temas interdisciplinares y, en particular, orientados a las ciencias de la Tierra, es aún muy reducido", asegura Carlos Parés, catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga y coordinador del área de Matemáticas en la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (ANEP).

> “La matemática española tiene un cierto déficit en líneas interdisciplinarias”

Según Parés, "aunque este porcentaje va en aumento y en algunas áreas es claramente mayor, es aún muy inferior al de los países de nuestro entorno". Joaquim Bruna, director del Centre de Recerca Matemática (CRM), coincide: "La matemática española está en muy buena forma pero tiene un cierto déficit en líneas que sean realmente interdisciplinarias y en las que haya una colaboración real entre matemáticos y experimentalistas".

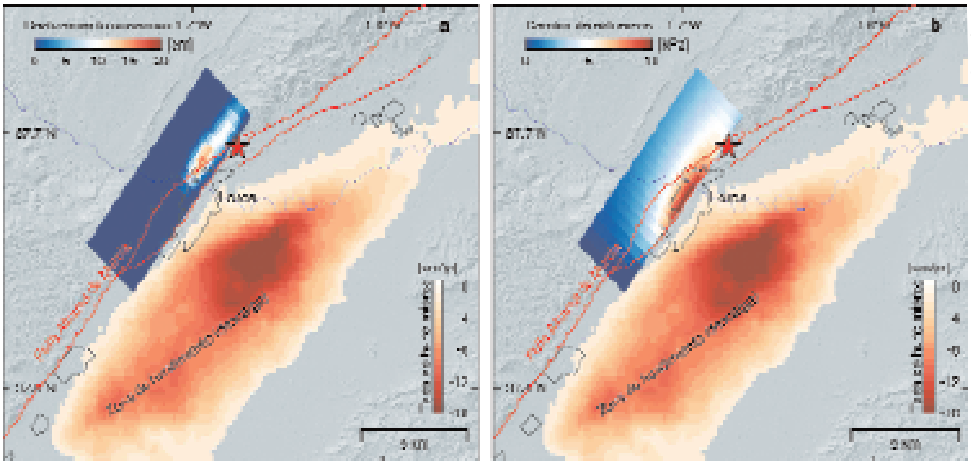
La matemática parece, en muchos casos, muy lejana de los problemas reales y presentes de los ciudadanos. No se espera que un desarrollo de investigación matemática cure el cáncer o permita avanzar en la obtención de energías renovables, y sin embargo, tal y como muestran diversas experiencias de éxito, así es. "La capacidad de los matemáticos de contribuir a las soluciones globales se va haciendo realidad poco a poco, pero el tiempo apremia para el planeta", asegura Christiane Rousseau, vicepresidenta de la Unión Matemática Internacional (IMU, por sus siglas en inglés) y directora de la iniciativa internacional Matemáticas del Planeta Tierra (MPE2013), que se celebra este año. En concreto, algunos de los grandes retos que se plantean en España en las próximas décadas (como la desertificación o los movimientos tectónicos), ya han sido abordados con éxito desde las matemáticas.

Herramientas útiles

"Las matemáticas están muy cercanas a acontecimientos que aparecen cada día en los periódicos y pueden ayudar a dar respuestas más exactas y a conocer mejor cuál es la realidad de lo que está sucediendo. Tienen mucho que decir y esperamos que en el futuro puedan decir todavía mucho más", asegura Rafael Orive, vicedirector del ICMAT y organizador del congreso "Matemáticas y Geociencias: perspectivas globales y locales", que tendrá lugar en este centro del 4 al 8 de noviembre de 2013, dentro de las conmemoraciones del MPE2013 en España.

Uno de estos casos que se trasladó de las noticias a los artículos científicos y viceversa fue el del terremoto de Lorca. Los investigadores, entre los que se encontraba José Fernández, del Instituto de Geociencias (CSIC-UCM), llegaron a las conclusiones ya citadas mediante la construcción de un modelo de deslocalización elástica que les permitió estudiar la deformación de la Tierra a partir de la información obtenida mediante sistemas de medición por satélite (mediante la técnica de interferometría radar de apertura sintética) y datos GPS. La geometría de la falla se estimó usando técnicas de inversión global no lineal.

Sobre esta simulación analizaron el fenómeno con precisión, mostrando que el foco del movimiento sísmico tuvo lugar a poca profundidad de la superficie terrestre (2-4 km), a lo largo de la falla de Alhama de Murcia. El deslizamiento se extendió hacia la superficie a través de segmentos del terreno con propiedades de fricción que cambiaron de estables a inestables. Los análisis indican que el área de ruptura de la falla está relacionada con las variaciones de esfuerzos provocados por la extracción de agua en un acuífero cercano. "Nuestros resultados muestran que las actividades antropogénicas pueden influir en cómo se desarrolla un terremoto", afirmaban en el artículo publicado en *Nature Geosciences* que recoge la investigación.



NATURE/P.J. GONZÁLEZ

a. Modelo de falla/dislocación del terremoto estimado a partir de datos de satélite y GPS, y surelación con la zona de hundimientos detectada. b Modelo mecánico de descarga de la corteza terrestre producido por la extracción de agua subterránea en la zona de hundimientos detectada.

Problemas inversos para explorar el interior de la Tierra

Las matemáticas fueron fundamentales para llevar a cabo este estudio. "Las matemáticas aparecen en el tratamiento de los datos de observación y en el desarrollo de modelos matemáticos directos que, a través del uso de métodos de solución del problema inverso permitan la interpretación de los datos observados", asegura José Fernández, autor del artículo.

Fernández participa en otro trabajo internacional sobre la erupción volcánica que sucedió en la Isla del Hierro (Islas Canarias, España) en octubre de 2011. "Ambos son procesos cuyo origen está bajo la superficie terrestre y por tanto no pueden observarse de forma directa. Sin embargo, el uso de observaciones geodésicas y geofísicas, tanto terrestres como desde satélites artificiales, ha permitido a través de las matemáticas determinar las características de las fuentes que los han originado". La "herramienta matemática" es, además de fundametal, tremendamente heterogénea: hacen falta matemáticas de campos muy distintos para abordar la gran variedad de problemas que presenta el planeta. "Solo por nombrar algunos, se implican campos como los modelos de flujo de sedimentación y diagénesis, de cambio global, de propagación de ondas, clasificación de la superficie terrestre, análisis de mapas de riesgo, análisis de sensibilidad de parámetros en problemas inversos, modelos estocásticos para el procesamiento de datos terrestres y espaciales, modelos deterministas, teoría del caos aplicada a las ciencias de la Tierra, geoestadística, problemas de información deficiente, incompleta o truncada, análisis de series temporales, tratamiento y representación de la información, interfaces para informes en campos específicos, manejo de información lingüística, procesos no lineales en ciencias de la Tierra y un larguísimo etcétera", enumera José Fernández.

Un año para impulsar las matemáticas de la Tierra

Pero pese a estas experiencias, como indicaba Carlos Parés al inicio del texto, la situación en España dista mucho de ser idónea. Por ello, iniciativas como MPE2013 son importantes. Por un lado, para crear espacios de encuentro donde abordar estos temas prioritarios para el planeta. Por otro, trasladando estas discusiones a la sociedad. "La difusión pública de los resultados de la investigación, de forma entendible, didáctica e impactante es muy importante para impulsar la geomatemática", señala José Fernández. El proyecto MPE2013 es una potente plataforma para alcanzar este objetivo.

"La celebración es muy oportuna, y especialmente en

U. de Edimburgo

Las herramientas matemáticas son fundamentales para extraer el máximo de información de los datos observados.

España, donde la matemática aplicada e interdisciplinar tiene mucho camino por recorrer", afirma Joaquim Bruna, director del CRM. Por ello, desde varias instituciones españolas se ha querido hacer un lanzamiento conjunto de las actividades que tendrán lugar en el marco del MPE2013, y que van desde *workshops* científicos hasta actividades de divulgación para estudiantes.

El programa de actividades puede consultarse en la web http://www.icmat.es/mathearth.

Multidisciplinar solo en los papeles

“Mathematics and Geosciences: Global and Local Perspectives” (MATHGEO) tendrá lugar en Madrid del 4 al 8 de noviembre.

Hay varios motivos por los que la investigación interdisciplinar, pese a la buena fama de que goza, ve frenado su desarrollo en España: el carácter tradicionalmente teórico que ha tenido la investigación en el país y "una cierta tendencia a valorar más la matemática pura", reflexiona Carlos Parés.

Además, trabajar en estos campos implica una gran inversión de tiempo en lograr un lenguaje común con científicos de otras áreas, comprender suficientemente los fenómenos a estudiar, implementar y validar los modelos, etc. "La evaluación, tanto individual como en las convocatorias de proyectos, se basa fundamentalmente en el número de artículos en revistas de alto factor de impacto, por lo que esta inversión no se percibe como 'rentable' por los equipos", afirma Parés.

En este sentido, el congreso “Mathematics and Geosciences: Global and Local Perspectives”, organizado en el ICMAT, pretende poner en contacto a científicos de distintas áreas, tanto del ámbito de las matemáticas como el de las geociencias, con el fin de extender su campo de trabajo y facilitar futuras investigaciones conjuntas.

"Se trata de que acudan tanto matemáticos como investigadores de otros campos que hagan uso de esta disciplina en sus análisis. Hablamos de estadística, simulación, ecuaciones en derivadas parciales, modelos matemáticos... También buscamos que estén representados, por un lado, todo el espectro de españoles que trabaja en modelización de fenómenos naturales y, por otro, investigadores extranjeros que trabajen en áreas estratégicas e interesantes para impulsar la ciencia española en esas áreas", explica Rafael Orive, vicedirector del ICMAT y uno de los organizadores del encuentro.

Matemáticas del Planeta Tierra en España

2013 es el Año de las Matemáticas del Planeta Tierra (MPE2013, en sus siglas en inglés). En esta iniciativa participan más de un centenar de instituciones, también españolas: el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), el Centre de Recerca Matemàtica (CRM), la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) y la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RAC), entre otras, también se han querido unir a la iniciativa con diversas actividades.

Próximas actividades científicas

Mathematics and Geosciences: Global and Local Perspectives

Organiza: Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT). Colaboran: UCM, UPM.

Fecha: 4 al 8 de noviembre 2013.

Descripción: congreso dedicado a las matemáticas en las geociencias.

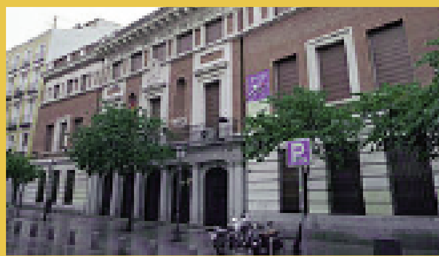
Lugar: Instituto de Ciencias Matemáticas. C/ Nicolás Cabrera, nº 13-15, Campus Cantoblanco UAM, 28049 (Madrid).

Sesión especial de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Fecha: 8 de mayo de 2013.

Descripción: actividad conjunta con la Academia de Ciencias de Portugal.

Lugar: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. C/ Valverde, 22 y 24 (Madrid).



Slow-Fast Dynamics: Theory, Numerics, Application to Life and Earth Sciences

Organiza: Centre de Recerca Matemàtica.

Fecha: 3 al 7 de junio de 2013 .

Descripción: encuentro científico de expertos en el campo de las dinámicas Slow-fast.

Lugar: Centre de Recerca Matemàtica. Campus de Bellaterra, Edifici C - 08193 Bellaterra (Barcelona).

Workshop on Emergence, Spread, and Control of Infectious diseases

Organiza: Centre de Recerca Matemàtica.

Fecha: 10 y 11 de junio de 2013.

Descripción: *workshop* científico sobre herramientas matemáticas para modelizar las enfermedades infecciosas.

Lugar: Centre de Recerca Matemàtica. Campus de Bellaterra, Edifici C - 08193 Bellaterra (Barcelona).

Sesión Especial en el Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA)

Organiza: Sociedad Española de Matemática Aplicada.

Fecha: 9 al 13 septiembre de 2013.

Descripción: sesión especial dentro del congreso anual de la SEMA.

Lugar: Universidad Jaime I de Castellón (Castellón).

“Es importante crear un entorno que favorezca la visión a largo plazo”

Roger Brockett es investigador de la Universidad de Harvard.

Ágata Timón/Lorena Cabeza. El punto de encuentro entre las matemáticas y la ingeniería tiene en Roger Brockett a una de sus principales referencias. Catedrático de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación en la Universidad de Harvard, es también fundador del Laboratorio de Robótica de esta institución. Pionero de la teoría de control de sistemas, ha realizado importantes contribuciones en las áreas de sistemas dinámicos, geometría diferencial y dinámica estocástica, así como en inteligencia artificial, visión por ordenador y robótica. Reconocido con numerosos premios y distinciones, es autor de más de 200 artículos científicos y ha supervisado unas 60 tesis doctorales, algunas de las cuales pertenecen a investigadores que han llegado a ser prestigiosos matemáticos e ingenieros de todo el mundo. Para Brockett, esta labor de guía en la enseñanza constituye uno de los logros más importantes de su carrera.

“El modelado es la parte más creativa de las matemáticas aplicadas”

Pregunta: ¿Cuál es en estos momentos el área de investigación que más le atrae?

Respuesta: Me interesa especialmente todo lo que tenga que ver con control automático, sobre todo con aquellos aspectos de la materia que son no lineales y tienen un toque "geométrico", como las matemáticas de la geometría diferencial. Trabajo normalmente con procesos estocásticos, geometría diferencial, álgebra lineal, procesos de Poisson…

P: Usted ha sido uno de los pioneros en la aplicación de las matemáticas a la ingeniería. ¿Qué aportan las matemáticas a este campo?

R: Las matemáticas tienen una capacidad de unificación que puede ser llevada a otras áreas. Cuando alguien plantea un nuevo problema, tienes el impulso de resolverlo de una manera más genérica. Las matemáticas son una bonita manera de ver las cosas en su forma más general.

P: ¿Cuáles cree que son los desafíos más relevantes para la ciencia en el futuro?

R: Creo que es importante crear un entorno en el que la gente esté dispuesta a correr riesgos y trabajar en cosas que quizá no se amorticen en una década. Tenemos que intentar que se entienda que hay problemas que no se pueden resolver de la noche a la mañana, y algunos de ellos son muy importantes. No tendríamos transistores ni microelectrónica si no se hubiera tenido una visión a largo plazo. Veo a bastante gente dispuesta a poner dinero para tener resultados mañana, pero a demasiada poca dispuesta a adoptar una visión a largo plazo.

P: ¿Y en el área entre las matemáticas y la ingeniería?

R: Una de las formas de convertir un problema en matemáticas es el arte del "modelado matemático". Creo que es la parte más creativa de las matemáticas aplicadas. Todo lo que viene después es importante, pero yo diría que requiere menos imaginación. Yo empecé utilizando geometría diferencial y teoría de control en 1969, y probablemente la época más apasionante fue cinco años después, cuando cada día podías encontrar nuevos elementos que "traducir" desde el mundo físico a una formulación bonita y matemática.

P: ¿Nos podría dar algún ejemplo de cómo su investigación ayudó a resolver algún problema en concreto?

R: Una vez vino gente de la NASA a decirme que, cuando sus pilotos volaban en un nuevo avión, querían pilotarlo tal y como estaban acostumbrados, sin aprender otras formas de pilotar. Así que me preguntaron: "¿Sería posible, a través de técnicas de control, llevar un nuevo avión como si fuera uno viejo?". Esos aviones normalmente volaban como sistemas lineales, así que la pregunta era: ¿se puede modificar su dinámica de tal manera que parezca un sistema lineal? Así que escribí un *paper* sobre linealización de la retroalimentación que utilizaba algo de geometría diferencial y otras técnicas de control, y fue un éxito considerable. Esto pasó a mediados de la década de los 70, así que ya tiene sus años, pero estas ideas se pueden aplicar tanto a robótica como a otras áreas.

P: ¿Cómo empezó a trabajar en robótica?

R: En parte se trata de una historia personal. Mi mujer y yo tenemos tres hijos, y cuando ellos tuvieron edad de ir a la universidad, me decían cosas como, "Papá, ¿por qué no haces algo que podamos entender? Los robots son muy interesantes, ¿y si haces algo relacionado con la robótica?". Empecé mi laboratorio de robótica en parte en respuesta a esto, pero también tenía la sensación de que el campo del control automático realmente tenía algo que decir sobre los problemas de robótica. Así que fue una combinación de serendipia y de la sensación de que era lo que el área necesitaba.

“Inteligencia es flexibilidad y habilidad para interactuar”

P: Cuéntenos un poco sobre sus investigaciones en esta área.

R: La robótica ha influido en mi programa de investigación de maneras muy distintas. Una de ellas es acerca de la dinámica de sus sistemas. La pregunta era: ¿es posible coger algo tan complicado como un robot de seis grados de libertad y hacer que su dinámica y su cinemática parezcan sencillas? Así que usamos algunas ideas de teoría de grupos para escribir las ecuaciones de una manera universal. Así, cuando encontrabas un nuevo robot —y se construyen nuevos robots continuamente— podías introducir los parámetros para ese nuevo diseño y usar el mismo programa para simular las ecuaciones de su dinámica. Eso solo se usó con un tipo específico de sistemas, pero resolvió algunos problemas concretos.

P: ¿Cuáles son los principales retos en esta área?

R: Diría que el principal reto es construir un robot que podamos programar fácilmente. Programar un robot para que realice actividades como pintar no es muy difícil, pero programarlo para que haga algo más inteligente, como ser asistente en el hogar, eso es muy difícil.

P: ¿Falta mucho para que podamos ver eso?

R: Pienso que tarde o temprano los robots serán un apoyo para la gente mayor y remplazarán a las mascotas como acompañantes, por ejemplo, diciéndole a una anciana quién ganó las elecciones o acudiendo cuando alguien le diga "ven aquí". Los problemas técnicos asociados a cosas como estas estarán pronto resueltos, pero hay cuestiones más difíciles a las que dar respuesta como la seguridad o qué hacer en situaciones donde ocurre algo excepcional. El mayor problema es que tenemos pocas matemáticas disponibles para afrontar estas preguntas. La geometría diferencial ha tenido mucho éxito en algunos asuntos, pero hasta ahora no ha sido capaz de ayudarnos a resolver este tipo de problemas.

P: Los robots que trabajan como asistentes deben ser inteligentes, pero, ¿cómo definiría usted la inteligencia?

R: Están estos test que definen qué es un ser inteligente como el llamado "Test de Turing ", pero si un zorro o cualquier otro animal lo realizase, lo suspendería por completo. Sin embargo, no creo que nadie niegue que los animales tienen inteligencia. Así que se puede preguntar: ¿cómo puedo conseguir un test que funcione en el mundo real? Y creo que lo que pasa por inteligencia en los seres humanos o en los animales es la habilidad para interactuar con el mundo físico. Esto y la flexibilidad son los elementos clave.

P: ¿Qué otras necesidades ve en la robótica?

R: Necesitamos matemáticas distintas que nos ayuden a comprender los sistemas que evolucionan de manera continua frente a aquellos sistemas con discontinuidades, como golpear una mesa. He hecho algunas tentativas de escribir sobre lo que llamamos "sistemas híbridos". Son combinaciones de dos materias bien conocidas y desarrolladas, a saber, la teoría de autómata, y la teoría de control de sistemas regulada por ecuaciones diferenciales. Cuando pones la una junto a la otra surgen muchos nuevos problemas.

P: Otra herramienta importante para la ciencia robótica es la visión por ordenador, y usted también ha estado trabajando en este campo…

R: Ya existen máquinas muy prácticas que llevan a cabo muy bien tareas estructuradas. Esto es estupendo, pero creo que tenemos que ver la visión por ordenador como un problema contextual, quizá incluso como un problema a tiempo real. De nuevo se trata de la interacción del mundo con el proceso, no puedes tratarlo como… aquí hay una imagen, haz lo que puedas. Lo que me interesa sobre la visión por ordenador es entender lo que la visión humana o animal es capaz de hacer. Un tercio de nuestro cerebro está dedicado a la visión. ¿Qué hace? ¿Está bien que la naturaleza lo haga así? Y, si es así, ¿por qué es tan difícil?

“Me interesa entender lo que la visión humana o animal puede hacer”

P: El título de su conferencia en ICMAT es "Optimal Cyclic Processes and Sub-Riemannian Geodesics". ¿Podría decirnos sobre qué va a hablar?

R: En el mundo físico hay muchas cosas que llevan a cabo procesos que crecen continuamente, pero lo hacen siguiendo ciclos. Nosotros inspiramos y espiramos, pero nuestro objetivo realmente es tomar oxígeno del aire e introducirlo en nuestro torrente sanguíneo. Lo mismo pasa con los motores de los coches. Solo queremos que el coche ande, pero los pistones van arriba y abajo en un proceso cíclico. ¿Qué tienen estos procesos en común? Hay algunos aspectos de la geometría diferencial conocidos hace bastante poco que subyacen a estos procesos y, cuando los optimizamos, pueden ser tratados de una manera distinta con bonitas matemáticas asociadas. Merece la pena saber más sobre ello de manera que se pueda conseguir una ventana abierta más al mundo que explica estos procesos cíclicos.

"Queremos dibujar el paisaje invisible del mar abierto"

Ágata Timón. Francesco d'Ovidio trabaja en la interfaz de la física y la biología en el Centro Nacional de Investigación Científica francés (CNRS). Su investigación se centra en la relación entre la turbulencia de las corrientes marinas y las estructuras de los ecosistemas en el océano abierto. Mediante herramientas matemáticas trata de identificar los mecanismos físicos (transporte caótico, mezcla, segregación, etc.) y las estructuras principales que forman el paisaje invisible al que se han de adaptar la vida y el comportamiento de los organismos marinos. Hablamos con él con motivo de su asistencia al 2nd International Workshop on Nonlinear Processes in Oceanic and Atmospheric Flows, organizado el pasado verano en el ICMAT.

Pregunta: ¿Cuáles son sus principales intereses como investigador?

Respuesta: En este momento estudio la relación entre el transporte y los ecosistemas en el océano abierto.

P: ¿Cómo llegó a estos temas?

R: Yo parto de una formación de físico. Me interesaban los sistemas complejos, por lo que había estudiado dinámica no lineal, teoría de sistemas dinámicos… Empecé a trabajar en modelización para la biología y después, con una estancia postdoctoral en el Instituto de Física Interdisciplinaria y Sistemas Complejos (IFISC) en Palma de Mallorca, comencé a interesarme por el transporte y mezcla caóticos en el océano. A partir de entonces esta ha sido la línea que ha tenido más importancia en mi carrera.


ICMAT

Matemáticas, física y biología se dan cita en el trabajo de Francesco d'Ovidio.

P: ¿En qué sentido habla de 'mezcla'?

R: El océano es un sistema turbulento, lo que se puede apreciar a distintas escalas espaciotemporales. Hay un sistema especialmente interesante en la escala de los 10 a los 100 kilómetros en el que en el campo de corriente se observan estructuras de flujo turbulento en rotación. Son los llamados 'vórtices de mesoescala', resultado de corrientes energéticas, que pueden tener un efecto de mezcla.

P: ¿Cómo afectan estas estructuras a la dinámica del océano?

R: Los mismos contrastes que encontramos en la atmósfera a escalas de miles de kilómetros aparecen también en el océano a escalas de cientos de kilómetros. Vemos estructuras del campo de velocidad similares a un vórtice que probablemente determinan, por ejemplo, la distribución de clorofila, pero que influyen también en muchos más elementos del ecosistema. Mi trabajo consiste en encontrar las relaciones entre las corrientes (por tanto, su velocidad) y la distribución de ciertos factores de interés ecológico que van desde la clorofila a un tipo específico de fitoplancton, o también las estrategias de caza de los predadores.

P: ¿Influyen también en el comportamiento de los habitantes del océano?

R: Se puede hacer una analogía con la ecología terrestre: las características físicas de un paisaje (una montaña, un río…) estructuran el entorno. Los seres vivos que lo ocupan deberán adaptar su comportamiento de caza a las características diversas de ese ambiente. En el océano pasa algo similar: las corrientes —sobre todo las de mesoescala— son el equivalente a las montañas y a los ríos. La idea es dibujar este paisaje invisible de la superficie del mar abierto. Normalmente se piensa que el océano es uniforme, pero en absoluto es así.

P: ¿Cómo es este paisaje oceánico?

R: En el océano abierto las estructuras son cambiantes. Cerca de las costas hay una topografía fija que impone una estructura física. Pero los animales que viven en el océano abierto están en un paisaje dinámico en el que las montañas se mueven con una velocidad que no es muy inferior a la suya. Si el animal se queda quieto, puede estar en un valle y unas semanas después encontrarse en un desierto. Vivir en un sistema turbulento es una situación muy particular.

P: ¿Qué conclusiones han obtenido de sus análisis?

R: Las grandes preguntas detrás de nuestra investigación están relacionadas con la ecología de la conservación. Queremos identificar las estructuras clave de la interacción entre animales y océano para hacer un seguimiento en torno al cambio climático y proteger las zonas que corren más peligro.

P: ¿Cómo se estudian estas estructuras?

R: Una posibilidad es utilizar la dinámica no lineal. Desde el punto de vista matemático, la idea inicial es la de considerar el campo de velocidad (la corriente del océano) como un sistema dinámico. En este sistema hay regiones hiperbólicas y elípticas, y se localizan estructuras de transporte, como barreras, o zonas de confluencia de masas de agua, que se pueden identificar como estructuras matemáticas. Por ejemplo, las variedades inestables de los puntos hiperbólicos en el campo de velocidad juegan el papel de barrera de transporte.

"En el océano los animales viven en un paisaje dinámico donde las montañas se mueven"

P: ¿Qué ventajas da este lenguaje?

R: Las matemáticas funcionan como gafas que permiten reconocer estructuras del campo de velocidad. Extraen cierta información interesante que muy difícilmente se puede ver sin ellas. Así puedes entender cómo ciertos movimientos o distribuciones de los organismos marinos pueden estar correlacionados con las estructuras de transporte y mezcla generadas por los campos de velocidad. Estas técnicas no las he inventado yo: existen en los sistemas dinámicos. Lo que nosotros intentamos desarrollar es la interfaz entre la comunidad de sistemas dinámicos y la oceanográfica.

P: ¿Actualmente trabaja con matemáticos?

R: Estoy intensificando el contacto con ellos para buscar cómo aplicar las herramientas matemáticas que nos ayuden a entender cómo cambian los vórtices en relación al agua que tienen alrededor.

P: ¿En qué se puede aplicar esta investigación?

R: Es una cuestión muy importante en ecología. El fitoplancton es la base de la cadena trófica del océano y está disperso por todas partes. Sin embargo, hay zonas en las que está confinado, como en los vórtices, lo que parece determinar el comportamiento de los animales.

P: Por lo tanto, ¿las matemáticas ayudan también a entender el comportamiento de los animales?

R: Sí, en cierta manera. Las matemáticas son útiles para describir la conducta de los animales a través de las series temporales: cuándo están en fase de búsqueda, cuándo encuentran alimento, etc.

P: ¿Qué le ha parecido este *workshop*?

R: Muy interesante, porque sirve de interfaz entre la dinámica no lineal y la geofísica. Es un punto de encuentro en el que profundizar en las cuestiones sobre las que se está trabajando actualmente y donde analizar cuáles son las herramientas matemáticas que podrían ser más útiles.

Dinámica de fluidos para entender el océano austral

En su faceta más experimental, Francesco d'Ovidio recoge las observaciones de satélites de las corrientes oceánicas, o de los tipos de fitoplancton, pero también ha participado en campañas oceanográficas que le han llevado hasta el océano Antártico en busca de mediciones in situ. Una vez sobre el modelo, los instrumentos principales provienen de la dinámica no lineal y la teoría de sistemas dinámicos.

Recientemente D'Ovidio ha participado en una investigación, algunos de cuyos resultados fueron publicados en la revista *Nature* el año pasado, en la que un equipo de investigadores internacionales describía la respuestas de los ciclos biogeológicos y del ecosistema del océano austral a la fertilización natural con hierro. Con este sistema se pretende fomentar la floración de fitoplancton, que sirve para captar el CO_2 de la atmósfera y llevarlo al fondo oceánico. Aunque es una técnica que se utiliza habitualmente, sigue siendo muy debatida dentro de la comunidad científica y las escalas de tiempo de la captura del carbono no están del todo claras.

U. Pierre et Marie Curie

La campaña oceanográfica KEOPS2 tuvo lugar a bordo del buque francés de investigación Marion Dufresne.

Por ello estos investigadores han hecho un seguimiento de las partículas depositadas desde la superficie del océano hasta su lecho en la zona de la corriente antártica circumpolar. Según sus resultados, una parte sustancial de la floración de biomasa se hunde más allá de los 1.000 metros, donde se queda aislada de la atmósfera durante cientos o miles de años.

La campaña oceanográfica KEOPS2, en la que se realizó la investigación, se utilizó un nuevo sistema de muestreo basado en el reconocimiento en tiempo real de estructuras de transporte a través del análisis de datos de satélite y de boyas de superficie. Con esta investigación el equipo busca identificar nichos de la dinámica de fluidos que ofrezcan un entorno natural aislado para estudiar la evolución en el tiempo de procesos biofísicos, como son el crecimiento de plancton estimulado por el hierro o la exportación de CO_2 atmosférico a través del hundimiento del fitoplancton.

“Es posible encontrar matemáticas interesantes en los objetos más modestos”

ICMAT.

Nigel Hitchin nació en 1946. Cursó matemáticas en la Universidad de Oxford (Reino Unido) y obtuvo su doctorado bajo la supervisión de Brian Steer y Michael Atiyah. Actualmente es catedrático de Geometría en Oxford.

Pregunta: ¿Por qué escogió las matemáticas?

Respuesta: Fue un proceso de eliminación entre otras materias que me gustaban. Cuando iba a la escuela me atraía la ingeniería, pero poco a poco dejaba la mayoría de las otras asignaturas para dedicarme exclusivamente a las matemáticas y la física.

P: Aparte de las matemáticas, ¿cuáles son las otras actividades que más le gustan?

R: La lectura, el teatro y el cine.

P: ¿Recomendaría una película, un libro o una obra de teatro?

R: Siempre me han gustado las obras de Harold Pinter: son textos escuetos y cuidadosamente equilibrados en los que pasan cosas que no se comentan directamente.

P: ¿Cómo fue su primer encuentro con la investigación matemática?

R: Más bien negativo; de hecho, estuve a punto de dejarla durante mi primer curso de graduado. No daba con un tema que realmente me gustara o al que pudiera hacer una contribución sustancial. Además, encontraba difícil adaptarme a una nueva manera de pensar. Pero al final encontré un par de artículos que me interesaron y pasé mucho tiempo intentando averiguar qué decían en términos que podía comprender.

P: ¿Qué destacaría de sus primeras experiencias en ella?

R: En primer lugar, la sensación que se tiene al llegar a una prueba esmerada. En segundo lugar, el reconocimiento paulatino de que al intentar entender lo que está pasando realmente se está probando algo nuevo.

P: ¿Qué científico le ha impresionado más durante su trayectoria profesional?

R: Ha de ser Michael Atiyah, no solo porque era de facto mi director de tesis, sino también por su buen gusto y su manera de presentar las matemáticas en sus clases. Y claro, por el hecho de que sus teoremas han tenido una importancia enorme.

P: Si pudiera disponer de una hora de diálogo con un matemático del pasado, ¿a quién escogería y de qué hablaría con él?

R: Bernhard Riemann: ¿qué pretendía realmente al introducir una generalización de lo que se entendía en esa época por la geometría? Introdujo la métrica de Riemann como la manera más sencilla de medir la longitud pero, ¿también consideraba seriamente otras alternativas?

P: ¿Tiene algún teorema o fórmula que le guste especialmente?

Nigel Hitchin dirigirá uno de los laboratorios ICMAT fruto de acuerdos con matemáticos de renombre.

R: El Teorema del Índice de Atiyah-Singer. Lo encontré por primera vez al estudiar teoremas sobre anulación del operador de Dirac cuando hacía mi tesis, y luego lo utilicé en una nueva situación para calcular la dimensión del espacio de moduli de instantones. Desde entonces he utilizado el Teorema de Riemann-Roch, que es un caso especial, una y otra vez en mi trabajo.

P: ¿Cuál es su libro matemático preferido?

R: Las obras completas de Elie Cartan; no soy un experto en Cartan, pero en este libro hay un montón de información que sigue siendo muy relevante hoy en día. Cartan no disponía del lenguaje moderno de fibrados para describir lo que hacía, y realizar la interpretación puede resultar difícil. Sin embargo, la notación de Cartan es envidiablemente concisa.

P: ¿Cómo describiría en pocas palabras su trabajo?

R: Me interesan los problemas de la geometría diferencial que son estimulados por cuestiones de la física teórica. Los físicos se forman con un sentido de la intuición que es diferente al de los matemáticos. Cuando fijan su atención en un tema matemático tienden a identificar características que los matemáticos no vemos, además de hacer conjeturas que nosotros normalmente no hacemos. Mi trabajo trata de averiguar cómo funciona esto utilizando un lenguaje matemático.

P: ¿Qué resultados recientes destacaría de su campo?

R: Uno de los temas sobre los que he trabajado y que se sigue mucho en el ICMAT es el espacio de moduli de los fibrados de Higgs. Al principio lo vi como un ejemplo de un cociente hiperkähler teórico-gauge. En otras palabras, una construcción de la física aplicada a un espacio natural de conexiones. Cuando empecé a profundizar en los detalles, hace más de 25 años, descubrí que, sorprendentemente, tenía interconexiones con todo tipo de áreas: la topología, sistemas integrables, la geometría de Riemann… Durante los últimos años el tema ha adquirido un nuevo estatus en el programa geométrico de Langlands, tal y como se entiende por físicos como Edward Witten y gente de teoría de números como Ngo Bao Chau.

P: ¿Qué problema matemático cree que supone el mayor reto actual?

R: No me gustan los grandes retos como por ejemplo los llamados "problemas del milenio", dotados de un millón de dólares. Para mí la motivación de la investigación es llegar a saber cómo funcionan las cosas. Hace falta un poco de intuición para sospechar que existe algo que vale la pena descubrir, pero es posible encontrar matemáticas interesantes en los objetos más modestos.

P: ¿Qué temas matemáticos fuera de su campo le gustaría aprender?

R: Los de la Teoría de Números: a menudo las palabras, sobre todo las expresiones geométricas, me son familiares, pero soy consciente de que hay una gran diferencia en trabajar con números complejos.

P: ¿Qué interacción entre las distintas ramas de las matemáticas cree que será más fructífera en el futuro?

R: Recientemente la Teoría de Cuerdas ha sido el área de la física teórica en donde ha habido más interacción con las matemáticas, y hoy en día los teóricos de cuerdas están obteniendo puestos en departamentos de matemáticas en vez de en departamentos de física. Quizás ahora es el momento de que la parte matemática de otras ramas de la física, como por ejemplo la materia condensada, tenga una interacción más fuerte con las matemáticas pero, ¿quién dará el primer paso?

P: ¿Tiene algún mensaje o algún consejo a dar a los jóvenes matemáticos?

R: Si acabas de comenzar a hacer investigación, no lo dejes demasiado pronto. Hace falta tiempo para cambiar de actitud y adquirir la confianza que te permitirá hacer una contribución significativa al campo de trabajo.

El Laboratorio Hitchin en el ICMAT

Nigel Hitchin con Luís Álvarez-Cónsul y Marina Logares (ICMAT), dos de los organizadores de la Conferencia Indo-española de Geometría y Análisis.

Los laboratorios del ICMAT son acuerdos con matemáticos prestigiosos para la creación de destacados grupos de investigación en el Instituto de Ciencias Matemáticas. El Nigel Hitchin Laboratory es una iniciativa para fomentar la interacción y colaboración entre el profesor Hitchin, su equipo del Instituto Matemático de la Universidad de Oxford y el grupo de geometría del ICMAT dirigido por Oscar García-Prada. Esta colaboración se centrará en varias interfaces entre la geometría y la física, incluyendo fibrados de Higgs, geometría generalizada y la geometría de Poisson.

Hacemos algunas preguntas al profesor Hitchin acerca de este programa.

Pregunta: ¿Qué nos puede decir sobre el ICMAT-Laboratory?

Respuesta: Todavía no ha hecho más que comenzar, pero brinda una oportunidad apasionante de compartir ideas con investigadores afines.

P: ¿Qué opina del programa?

R: Quisiera que representase un abanico de ideas matemáticas, no solamente las que actualmente son fuertes en Madrid. Esto es importante para la selección de aspirantes a contratos postdoctorales.

P: ¿Podría decirnos algo sobre sus experiencias del "Nigel Hitchin LAB Retreat: Topology of moduli spaces of representations"?

R: Creo que ha funcionado muy bien y, además de una presentación de trabajos recientes, ha constituido una auténtica oportunidad de compartir ideas. Yo, personalmente, recogí algunos hilos nuevos y me sentí impulsado a retomar otros que tenía un poco olvidados.

Grandes Desviaciones del Problema Estocástico de Lotka-Volterra

Carlos Escudero Liébana, ICMAT & UAM.

Resumen

El sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra es un modelo clásico de la dinámica de poblaciones que describe la dinámica de dos poblaciones que interactúan: una presa y un depredador. Este problema admite una generalización natural en la que la interacción entre la presa y el depredador deviene aleatoria. Una versión estocástica tal del sistema Lotka-Volterra tiene características deseables, por ejemplo, permite la extinción de la especie, a la vez de plantear un cierto número de preguntas matemáticas. En este estudio nos centramos en una aproximación de grandes desviaciones al problema aleatorio. Aunque constituye una simplificación del problema probabilístico entero, todavía deja una pregunta abierta en la teoría de sistemas dinámicos.

El sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra [1, 2].

$$\frac{da}{dt} = -\mu a + \lambda ab \tag{1a}$$

$$\frac{db}{dt} = \sigma b - \lambda ab \tag{1b}$$

es un modelo clásico de la dinámica de poblaciones que describe la dinámica de dos poblaciones que interactúan: los depredadores, aquí indicados con a, y las presas, asimismo indicados con b; μ, λ y σ se refieren a parámetros positivos. El término proporcional a μ tiene en cuenta la pérdida de depredadores, el término proporcional a σ modela el aumento de presas, y el término proporcional a λ tiene en cuenta el crecimiento de la población de depredadores debido a la depredación y la pérdida correspondiente de presas.

El anílisis del sistema dinámico (1a) y (1b) empieza con el cálculo de todos los puntos fijos, que en este caso pueden reducirse a dos:

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0,$$

y

$$a_1 = \frac{\sigma}{\lambda}, \qquad b_1 = \frac{\mu}{\lambda}.$$

El primer punto fijo corresponde a un estado en el que las dos especies son extintas, mientras que el segundo corresponde a un estado en el que ambas especies son equilibradas. El análisis de la estabilidad lineal de un punto fijo (a_0, b_0) revela que es un punto de silla, con dos autovalores reales, uno positivo y el otro negativo. El punto fijo (a_1, b_1) no es hiperbólico, puesto que un análisis de la estabilidad lineal del mismo produce dos puntos fijos completamente imaginarios. La segunda parte del análisis de la estabilidad lineal es por lo tanto poco concluyente, mientras que la primera parte descubre que el punto fijo correspondiente a la extinción es inestable y por consiguiente inalcanzable para el sistema, a no ser que se dirija a ello desde el principio. Se puede completar el retrato del espacio de fases señalando la existencia de la cantidad conservada:

$$K = a^{\sigma} b^{\mu} e^{-\lambda(a+b)}.$$

La existencia de esta cantidad implica que el punto fijo (a_1, b_1) es un verdadero centro; es decir, es la región del espacio fásico donde $a > 0$ y $b > 0$ se llena de trayectorias alrededor de (a_1, b_1). Estas trayectorias corresponden a las soluciones periódicas $a(t)$ y $b(t)$; véase por ejemplo la figura 1, donde se muestra una integración numérica del sistema (1a) y (1b).

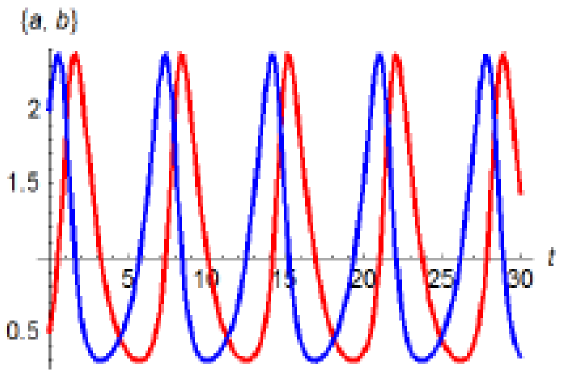


Figura 1: Un ejemplo de la solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales (1a) y (1b) para $\mu = \sigma = \lambda = 1$. La línea roja representa los depredadores y se inicia en $a(0) = 1/2$; la línea azul representa las presas y se inicia en $b(0) = 2$. Se muestra la evolución de $t = 0$ a $t = 30$.

Para trayectorias más largas (es decir, para $\mathcal{K} > 0$) más pequeñas), el sistema se aproxima el estado de extinción de manera aleatoria, pero como se decía antes no lo alcanza nunca. Esto sugiere que si se introduce algún ruido al sistema, finalmente se alcanza el estado de extinción. Para situar esta observación en un contexto más formal, en primer lugar es necesario que el ruido se introduzca de una manera más natural. Para ello, se consideran las relaciones estequiométricas.

$$A \xrightarrow{\mu} \emptyset, \quad B \xrightarrow{\sigma} 2B, \quad A + B \xrightarrow{\lambda} 2A, \tag{2}$$

donde A representa los depredadores y B representa las presas; estas relaciones representan exactamente las mismas interacciones descritas por las ecuaciones (1a) y (1b). Por cierto, si estas reacciones ocurren a coeficientes deterministas luego las ecuaciones de Lotka-Volterra constituyen la descripción exacta del conjunto de procesos (2) (dentro de un límite continuo adecuado). Por lo tanto, una versión estocástica natural del sistema de Lotka-Volterra se considera sencillamente el conjunto de reacciones (2) como un conjunto de procesos Poisson con los parámetros indicados. Aunque se puede escribir fácilmente la ecuación maestra que determina la evolución temporal del resultante proceso de Markov, encontrar su solución constituye un problema difícil y nos proporciona una cantidad de información demasiado grande. Por lo tanto, la introducción de un esquema de aproximación es claramente justificada. En este caso, nos centramos en una teoría de desviación grande que supone para la distribución de la probabilidad

$$\mathcal{P}(N_A, N_B; t) \approx e^{-S}, \tag{3}$$

donde N_A se refiere al número de individuos de la especie A (depredadores) y N_B se refiere al número de individuos de la especie B (presas), mientras que el signo aproximadamente igual $\approx$ se entiende en el sentido usual de desviaciones grandes [3]. S es un funcional de coste o de acción apropiado(según el lenguaje usual de la mecánica). La derivación de un funcional de acción adecuado es en este caso una cuestión técnica, y por eso no se reproduce aquí. El lector interesado puede consultar los detalles del procedimiento en [4].

Una vez que se ha derivado la acción funcional se procede a determinar las trayectorias que la minimizan. Estas trayectorias deterministas son los eventos más probables del sistema aleatorio. Como de costumbre, pueden hallarse tales trayectorias como soluciones de un sistema dinámico Hamiltoniano adecuado. Un sistema Hamiltoniano que puede ser conveniente para el caso que se estudia aquí es

$$H = -\mu(p_a - 1)q_a + \sigma p_b(p_b - 1)q_b - \lambda p_a(p_b - p_a)q_a q_b. \tag{4}$$

Evidentemente, este sistema Hamiltoniano corresponde a un sistema dinámico de cuatro dimensiones. Todas las cuatro coordinadas p_a, p_b, q_a y q_b corresponden a variables matemáticos auxiliares, sin significado físico directo. Sin embargo, las principales cantidades de interés, es decir, tanto el número de depredadores como el de las presas, se dan por $N_A(t) = p_a(t)q_a(t)$ y $N_B(t) = p_b(t)q_b(t)$, respectivamente. Para entender las consecuencias de nuestra teoría de grandes desviaciones sobre estas cantidades, es necesario analizar el sistema dinámico asociado.

Las ecuaciones de movimiento que corresponden al Hamiltoniano (4) son:

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = -q_a[\mu + \lambda q_b(p_b - 2p_a)] \tag{5a}$$
$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \lambda p_a q_b(p_b - p_a) + \mu(p_a - 1) \tag{5b}$$
$$\frac{dq_b}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_b} = -q_b(\lambda q_a p_a + \sigma - 2\sigma p_b) \tag{5c}$$
$$\frac{dp_b}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_b} = \lambda q_a p_a(p_b - p_a) - \sigma(p_b - 1)p_b. \tag{5d}$$

Este es un sistema dinámico Hamiltoniano de cuatro dimensiones que es un polinomio y para el que por supuesto existe un integral de movimiento inicial que coincide con el sistema Hamiltoniano y que llamamos la energía E. Este sistema tiene exactamente 5 puntos fijos, tres de los cuales se encuentran en la variedad $E = 0$, uno dentro de alguna variedad con $E > 0$ y el último dentro de otra variedad con $E < 0$. Estos dos últimos puntos fijos son hiperbólicos (todos sus autovalores tiene una parte real diferente de cero) y no están conectados a ningún otro punto fijo. Por ello nos centramos en la dinámica sobre la variedad $E = 0$; estos tres puntos fijos son:

$$(q_a, p_a, q_b, p_b)_1 = (0, 1, 0, 0), \tag{6a}$$
$$(q_a, p_a, q_b, p_b)_2 = (0, 1, 0, 1), \tag{6b}$$
$$(q_a, p_a, q_b, p_b)_3 = (\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1). \tag{6c}$$

Los primeros dos de estos puntos fijos son hiperbólicos, mientras que el tercero tiene cuatro autovalores puramente imaginarios. Además, este sistema dinámico tiene dos planos invariantes

$$P_1 = \{p_a = 1, p_b = 1\}, \tag{7a}$$
$$P_2 = \{q_a = 0, q_b = 0\}. \tag{7b}$$

Se puede comprobar que la dinámica en P_1 es exactamente la del sistema clásico de Lotka-Volterra (1a) y (1b). Una consecuencia de esto es que se sabe que $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$ es un verdadero centro cuando está restringido a este plano. En P_2 la dinámica se reduce a

$$\frac{dp_a}{dt} = \mu(p_a - 1), \tag{8a}$$
$$\frac{dp_b}{dt} = -\sigma(p_b - 1)p_b, \tag{8b}$$

por consiguiente la dinámica es exactamente integrable en este plano. Así que si se utiliza lo que hemos aprendido de la dinámica en los dos planos invariantes, conocemos con exactitud tanto la variedad estable como la inestable de $(0, 1, 0, 1)$: estas son el eje $(q_a, 1, 0, 1)$, $(0, 1, q_b, 1)$, $(0, 1, 0, p_b)$, y $(0, p_a, 0, 1)$. De hecho, el punto fijo $(0, 1, 0, 1)$ está conectado a $(0, 1, 0, 0)$ a lo largo de la línea $(0, 1, 0, p_b)$. La dinámica a lo largo de esta línea fluye de $(0, 1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0, 1)$. También conocemos con exactitud y por completo la variedad inestable de $(0, 1, 0, 0)$, que se caracteriza por el eje $(0, 1, 0, p_b)$ y $(0, p_a, 0, 0)$. Así que sabemos que $(0, 1, 0, 1)$ está conectado únicamente con $(0, 1, 0, 0)$ y con el infinito. También sabemos que $(0, 1, 0, 0)$ está conectado con $(0, 1, 0, 1)$ y con el infinito a través de su variedad inestable. No se sabe nada de su variedad estable más allá del análisis de estabilidad lineal.

Ahora consideramos el punto fijo $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$. Sabemos que este punto fijo es un verdadero centro (y por lo tanto estable) cuando está restringido al plano P_1, pero todavía no sabemos si es realmente estable en todas las dimensiones. De hecho, en principio podría tener órbitas tanto estables como inestables fluyendo hacia él y alejándose de él. Además, sabemos que una órbita hipotética fluyendo hacia $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$ debería conectarlo con el infinito, ya que conocemos con exactitud la variedad inestable de $(0, 1, 0, 0)$. Por lo tanto solamente falta saber una cosa para completar el retrato del espacio de fases: ¿existe una conexión que fluye de $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$ a $(0, 1, 0, 0)$?

Conjetura: Los puntos fijos $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$ y $(0, 1, 0, 0)$ del sistema dinámico especificado por el Hamiltonian (4) no están conectados.

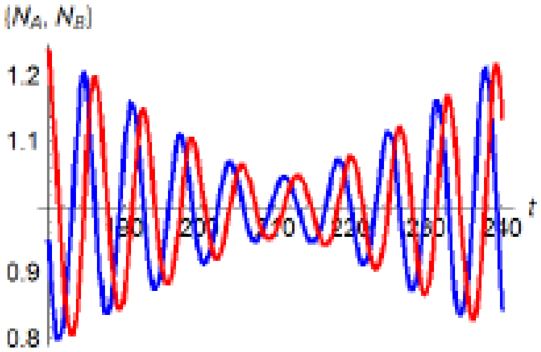


Figura 2: Un ejemplo de la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (5a), (5b), (5c) y (5d) para $\mu = \sigma = \lambda = 1$. La línea roja que representa los depredadores se inicia en $N_A(0) \approx 1/2$ ($q_a(0) = 1/2$ y $p_a(0) = 1{,}0001$); la línea azul que representa las presas se inicia en $N_B(0) \approx 2$ ($q_b(0) = 2$ y $p_b(0) = 1{,}0001$). La evolución se muestra de $t = 180$ a $t = 240$.

Las trayectorias que resuelven las ecuaciones diferenciales (5a), (5b), (5c) y (5d) presentan una dinámica oscilatoria. Se muestra un ejemplo en la figura 2, donde se representa una integración numérica de este sistema. En este caso, el comportamiento ondulatorio presenta una amplitud cambiante, y hemos detectado numéricamente que esta variación es a veces periódica.

La existencia de una trayectoria que conecta $(\sigma/\lambda, 1, \mu/\lambda, 1)$ con $(0, 1, 0, 0)$ significaría que existiría una manera óptima de conectar los estados con poblaciones $N_A = \sigma/\lambda, N_B = \mu/\lambda$ y $N_A = N_B = 0$. En otras palabras, supondría que existiese un recorrido óptimo hacia la extinción. Esto es importante para la teoría de desviaciones grandes, ya que al calcular la acción a lo largo de esta trayectoria hipotética y empleando la fórmula (3) conduciría a un tiempo exponencialmente largo hacia la extinción [5]. No obstante, los resultados numéricos en [6] indican que el tiempo hacia la extinción es mucho más corto, y es, en particular, algebraico en lugar de exponencial. Esto sugiere a su vez que la órbita susodicha no existe. Cabe fijarse que esto no implica que no existan trayectorias óptimas hacia la extinción. Efectivamente, estas trayectorias existen y se encuentran en variedades con $E \neq 0$ [7], y su existencia es completamente compatible con tiempos algebraicos de extinción. Sin embargo, ninguna de estas órbitas es una conexión heteroclínica.

Agradecimientos

El autor agradece a Daniel Peralta y Pedro Torres por sus sugerencias. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado a través de los proyectos MTM2010-18128, RYC-2011-09025 y SEV-2011-0087.

Referencias

[1] A. J. Lotka, *Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. **6**, 410-415 (1920).

[2] V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei Roma **2**, 31-113 (1926).

[3] J. Feng and T. G. Kurtz, *Large Deviations for Stochastic Processes*, American Mathematical Society, Providence RI, (2006).

[4] E. Bettelheim, O. Agam, and N. M. Shnerb, *"Quantum phase transitions" in classical nonequilibrium processes*, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **9**, 600-608 (2001).

[5] C. Escudero and A. Kamenev, *Switching rates of multistep reactions*, Phys. Rev. E **79**, 041149 (2009).

[6] M. Parker and A. Kamenev, *Extinction in the Lotka-Volterra model*, Phys. Rev. E **80**, 021129 (2009).

[7] C. Escudero, A. M. Rivera, and P. J. Torres, *Chemical oscillations out of chemical noise*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **10**, 960-986 (2011).

Perfil

Carlos Escudero Liébana es investigador Ramón y Cajal en la Universidad Autónoma de Madrid y miembro del Instituto de Ciencias Matemáticas. Su principales intereses se encuentran en las ecuaciones en derivadas parciales deterministas y estocásticas y sus aplicaciones en física, fundamentalmente en mecánica estadística y teoría de la materia condensada.

El Laboratorio Hitchin da sus primeros pasos

Nigel Hitchin es investigador de la Universidad de Oxford.

El futuro desarrollo la teoría de espacios de moduli de representaciones y fibrados de Higgs se pudo vislumbrar durante el encuentro científico del Laboratorio Nigel Hitchin celebrado en La Cristalera (Miraflores de la Sierra) del 11 al 15 de marzo. Se trata de la primera gran actividad del Laboratorio y en ella, y con el título "Topología de representaciones de espacios moduli", expertos internacionales señalaron los problemas abiertos que marcarán el devenir de la disciplina en sesiones dirigidas por Nigel Hitchin (Universidad de Oxford).

"La estructura de la actividad favoreció la discusión y permitió que surgieran muchos problemas importantes, que serán tema de investigación en los próximos años", afirma Óscar García Prada, investigador del ICMAT y organizador del Laboratorio.

"Fue un lujo escuchar a reconocidos investigadores planteando las cuestiones que ellos creen que inspirarán trabajos y líneas de investigación futuros: tuvimos la oportunidad y el privilegio de atisbar el futuro de la disciplina", relata David Fernández, estudiante de doctorado del ICMAT asistente al encuentro. Además, según dice Fernández, el número reducido de participantes, alrededor de 25, permitió un trato cercano y familiar durante la cita.

El Laboratorio Nigel Hitchin es una iniciativa del grupo de geometría del ICMAT liderado por Oscar García Prada. Su objetivo principal es fomentar la colaboración entre Hitchin y su grupo del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Oxford y el grupo de geometría del ICMAT, particularmente en campos como fibrados de Higgs, geometría generalizada y geometría de Poisson.

Alberto Enciso, al frente del programa de iniciación a la investigación del ICMAT

El investigador Ramón y Cajal del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) Alberto Enciso será el nuevo director de la Escuela JAE de Matemáticas, el curso de verano de iniciación a la investigación dentro del programa "Junta para la Ampliación de Estudios (JAE) del CSIC. La escuela está dirigida a estudiantes de licenciatura y grado interesados en la investigación matemática, a los que ofrece, durante un mes, el contacto con investigadores de alto nivel y la introducción en el trabajo científico.

Alberto Enciso fue distinguido en 2011 con el Premio José Luis Rubio de Francia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), que selecciona a los mejores matemáticos jóvenes de nuestro país. Enciso trabaja en diferentes áreas relacionadas con física matemática, ecuaciones en derivadas parciales y geometría diferencial.

Alberto Enciso, nuevo director de la Escuela JAE de Matemáticas del CSIC.

Agenda

Nuevas Tendencias en Análisis Armónico en el ICMAT

Madrid, de octubre 2012 a julio 2013
www.icmat.es/NTHA

Abril-junio 2013
Research Term on Real Harmonic Analysis and Applications to Partial Differential Equations.

27-31 de mayo 2013
Harmonic Analysis, PDEs and Geometry: A joint Workshop of the ANR-Harmonic Analysis at its boundaries and the ICMAT-Severo Ochoa.

Mayo-julio 2013
Research Term on Operator Algebra Methods in Harmonic Analysis and Quantum Information.

10-14 de junio 2013
Workshop on Operator Spaces, Harmonic Analysis and Quantum Probability.

John Allen Paulos conjuga matemáticas, literatura y periodismo en la Residencia de Estudiantes

En 1988 un libro de divulgación matemática, Innumeracy (El hombre anumérico, en la traducción española), se convirtió en un éxito mundial y su autor, John Allen Paulos, en uno de los más célebres divulgadores matemáticos de las últimas décadas. El pasado 13 de marzo Paulos impartió, dentro del ciclo "Matemáticas en la Residencia", la conferencia "Stories, Statistics, and the News", en un evento organizado por el ICMAT en colaboración con la Vicepresidenta Adjunta de Cultura Científica del CSIC y la Residencia de Estudiantes.

John Allen Paulos es uno de los divulgadores matemáticos más conocidos de los últimos tiempos.

Antonio Calvo Roy, presidente de la Asociación Española de Comunicación Científica, fue el encargado de presentar un encuentro en el que Paulos comparó la lógica matemática con la literaria y analizó los errores numéricos más frecuentes en los medios de comunicación. Con un estilo claro, directo y lleno de ironía, Paulos subrayó las falacias argumentales que a veces sirven para defender un determinado argumento en el papel, habló de la mala interpretación de las estadísticas y, en general, de la importancia del pensamiento matemático tanto en la transmisión de la noticias como en su interpretación. "Los datos no hablan por sí mismos sino que deben ser interpretados, y no siempre está claro cómo se hace", ha afirmado Paulos, profesor de Matemáticas en la Temple University de Filadelfia (EE. UU.), especializado en lógica y teoría de probabilidades.

“Los datos no hablan por sí mismos, sino que deben ser interpretados”

El ICMAT acerca su trabajo de investigación matemática a estudiantes de secundaria

Estudiantes e investigadores durante la visita al ICMAT.

Los días 19, 20, y 21 de marzo el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) abrió sus puertas a estudiantes de 4º de la ESO para que conocieran de primera mano cómo trabajan los investigadores matemáticos en un centro de excelencia.

Durante su estancia, 14 alumnos de dos centros educativos de Madrid pudieron visitar las instalaciones del ICMAT y entraron en contacto con sus investigadores. Además, los estudiantes participaron en un taller de matemáticas creativas y otro de bases de datos, una conferencia sobre ciencia interdisciplinar y una mesa redonda sobre posibles rutas para ser investigador. La iniciativa, que forma parte del programa "4ESO+empresa" de la Comunidad de Madrid, facilita a los jóvenes estancias educativas en empresas y centros de investigación.

El objetivo para el Instituto ha sido, según ha destacado Manuel de León, su director, "enseñar a estos chicos qué se hace en un centro de investigación como el ICMAT y contribuir a despertar vocaciones científicas". Los alumnos han podido "ver en vivo y en directo en qué consiste la investigación matemática", así como comprobar "que se trata de una ciencia viva, en continua efervescencia y donde se obtienen nuevos resultados cada día". Se trata de la primera vez que el Instituto participa en una iniciativa que se espera ampliar en años sucesivos.

El matemático belga Pierre Deligne gana el premio Abel 2013


DNVA/CLIFF MOORE

Piee Deligne es investigador en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

El pasado 20 de marzo la Academia Noruega de Ciencias y Letras hizo público el nombre del ganador del Premio Abel de este año. Se trataba de Pierre Deligne, matemático belga afincado en Estados Unidos que ya fue reconocido en 1978 con la medalla Fields. Entre sus aportaciones más sobresalientes está la construcción de puentes entre áreas de las matemáticas hasta entonces aisladas, como son la geometría algebraica y la teoría de números, y la resolución de la última de las conjeturas de Weil, donde trata de identificar las propiedades de un objeto geométrico de manera puramente algebraica.

El premio Abel está dotado con seis millones de coronas noruegas (unos 800.000 euros) y se ha convertido en el equivalente al premio Nobel de Matemáticas. Deligne, que actualmente es profesor del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (EE. UU.), ha sido reconocido "por sus contribuciones seminales a la geometría algebraica y por su impacto transformador en la teoría de números, la teoría de representaciones y otros campos relacionados".

Matemáticas para el cambio climático y riesgos asociados

Cambios abruptos en el clima, desarrollo sostenible, dinámica de fluidos, modelos climáticos o interacción océano-atmósfera son tan solo algunos de los temas que se tratarán en el "Workshop on Mathematics of climate change, related hazards and risks", que se celebrará del 29 de julio al 2 de agosto en Guanajuato (México).

El plazo para participar en esta actividad, que se organiza alrededor del Congreso Matemático de las Américas 2013 y que forma parte del programa global Matemáticas del Planeta Tierra, ya está abierto. El encuentro reunirá a 40 jóvenes científicos, principalmente de Sudamérica y el Caribe, y a nueve prestigiosos investigadores.

El programa, con una duración de cinco días, está patrocinado por el Consejo Internacional para la Ciencia (ICSU), la Unión Matemática Internacional (IMU), la Unión Internacional de Mecánica Teórica y Aplicada (IUTAM), la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (IUGG), el Consejo Internacional para la Mecánica Industrial y Aplicada (ICIAM), y el Centro de Investigación en Matemáticas de México.

ICMAT

Boletín trimestral

Instituto de Ciencias Matemáticas

Número 2. II Trimestre 2013

Edición:
ICMAT
C/ Nicolás Cabrera, nº 13-15
Campus de Cantoblanco, UAM
28049 Madrid SPAIN

Comité editorial:
Manuel de León
Ágata A. Timón
Carlos Vinuesa
Kurusch Ebrahimi Fard

Producción:
Divulga S. L.
C/ Diana 16 - 1º C
28022 Madrid

Coordinación:
Ignacio F. Bayo
Lorena Cabeza
Ágata Timón

Diseño:
Lorena Cabeza
Andrea Jiménez

Colabora:
Carlos Escudero

Fotografías:
ICMAT, *Nature*, U. de Edimburgo, Harvard, Pierre et Marie Curie, SINC/Olmo Calvo,
DNVA/Cliff More

ICMAT Creative Commons

ICMAT

Boletín del Instituto de Ciencias Matemáticas

Suscríbete en https://listas.csic.es/wws/subscribe/newsletter_icmat

ICMAT

Instituto de Ciencias Matemáticas

www.icmat.es

Campus Cantoblanco UAM
Madrid (España)

Síguenos en:

Instituto de Ciencias Matemáticas ICMAT

@_ICMAT

MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD

excelencia UAM CSIC

EXCELENCIA SEVERO OCHOA

CSIC