Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 31 de enero, 7 y 14 de febrero de 2025
Aritmética
Grupos: Marte y Neptuno (Soluciones)

Tenéis que hacer los ejercicios de esta hoja **en orden hasta el Problema 13, leyendo las explicaciones teóricas y el ejemplo resuelto con cuidado**. Los problemas más difíciles están al final de la hoja.

Divisibilidad

Definición. Si n es un número entero positivo, decimos que es **primo** si tiene exactamente dos divisores. Si tiene más de dos divisores, decimos que es **compuesto**.

5 es primo porque tiene exactamente dos divisores, 1 y 5. 6 es compuesto porque tiene exactamente cuatro divisores: 1, 2, 3 y 6. Sin embargo 1 **no es primo ni compuesto** porque sólo tiene un divisor, él mismo.

Problema 1. ¿Cuántos divisores tienen estos números?

a) $17 \cdot 19$.

b) 17^3.

c) $17 \cdot 19 \cdot 23$.

d) $17 \cdot 19^2 \cdot 23^3$.

e) $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, donde $k \geq 1$, $p_1, \ldots, p_k$ son números primos, y $n_1, \ldots, n_k \geq 1$.

Solución. a) $4 : 1, 17, 19, 17 \cdot 19$

b) $4 : 1, 17, 17^2, 17^3$

c) $8 : 1, 17, 19, 23, 17 \cdot 19, 17 \cdot 23, 19 \cdot 23, 17 \cdot 19 \cdot 23$

d) Los divisores son de la forma $17^a \cdot 19^b \cdot 23^c$, donde a puede tomar valores entre 0 y 1, b entre 0 y 2, y c entre 0 y 3. Por tanto, la respuesta es $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

e) Con el mismo razonamiento del apartado anterior, obtenemos que la respuesta es $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$.

□

Problema 2. Demuestra que los siguientes números son compuestos y busca al menos 3 factores (distintos de 1). *Pista: Recuerda que* $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

1. $117^{96} - 1$
2. 99999996

Solución. 1. $117^{96} - 1 = (117^{48} - 1)(117^{48} + 1) = (117^{24} - 1)(117^{24} + 1)(117^{48} + 1) = ...$

2. $99999996 = 10^8 - 2^2 = (10^4 - 2)(10^4 + 2) = 2 \cdot (5 \cdot 10^3 - 1) \cdot (10^4 + 2) = 2 \cdot 4999 \cdot 10002$.

□

¿Qué significa que un número N sea múltiplo de 3? Matemáticamente hablando, significa que N **se puede representar como producto de 3 por un número entero**, es decir

$$N = 3k, \quad \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

Por ejemplo, -12 es múltiplo de 3 porque $-12 = 3 \cdot (-4)$, donde -4 es entero, sin embargo, 7 no es múltiplo de 3 porque $7 = 3 \cdot \frac{7}{3}$, y $\frac{7}{3}$ no es entero.

Parece mentira, pero esta notación nos permite demostrar hechos sobre números que ni siquiera sabemos cuáles son:

Para cualquier número natural n, las siguientes afirmaciones son ciertas:

- La suma de dos múltiplos de n es también múltiplo de n.
- La resta de dos múltiplos de n es también múltiplo de n.

En efecto, dos múltiplos cualesquiera de n se pueden escribir como $n \cdot a$ y $n \cdot b$, donde a, b son números naturales. Por tanto, su suma será $n \cdot a + n \cdot b = n \cdot (a + b)$, y su resta será $n \cdot a - n \cdot b = n \cdot (a - b)$, ambas múltiplos de n.

Problema 3. Demuestra que la suma de cinco números consecutivos siempre es múltiplo de 5. *Pista: Llama a los cinco números consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ y $n+4$.*

Solución. $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5 \cdot (n+2)$. □

Problema 4. Determina si son ciertas las siguientes afirmaciones, demostrándolas si son ciertas y dando un contraejemplo si no lo son:

a) Si un número es divisible por 4 y por 6, ¿es necesariamente divisible por 24?

b) Si un número es divisible por 6 y por 7, ¿es necesariamente divisible por 42?

c) Si n es un número natural y $15n$ es divisible por 7, entonces n es divisible por 7.

d) Si n es un número natural y $15n$ es divisible por 10, entonces n es divisible por 10.

Solución. a) No es cierta, 12 es divisible por 4 y por 6 pero no por 24.

b) Es cierta porque el máximo común divisor de 6 y 7 es 1, es decir, los números no tienen factores primos en común.

c) Es cierta porque el máximo común divisor de 7 y 15 es 1, es decir, 7 y 15 no tienen factores primos en común. Si 7 aparece en la descomposición de primos de $15n = 3 \cdot 5 \cdot n$, tendrá que aparecer como factor de n.

d) No es cierta, falla para $n = 2$, por ejemplo.

□

Problema 5. Un número está compuesto por dos grupos iguales de cuatro cifras (como 16781678 o 33533353). Demuestra que es múltiplo de 73 y de 137.

Solución. Cualquier número que tenga el aspecto de *abcdabcd* se puede representar como *abcd* $\times 10001$. A su turno, $10001 = 73 \cdot 137$, por lo que *abcdabcd* = *abcd* $\cdot 73 \cdot 137$ también será su múltiplo. □

Problema 6. ¿Es verdad que el producto de cuatro números enteros consecutivos siempre es múltiplo de 24? Justifica tu respuesta.

Solución. Sí. De cuatro números consecutivos al menos uno es múltiplo de 3, exactamente uno es múltiplo de 4 y hay otro que es múltiplo de 2 pero no de 4. Por tanto, el producto será divisible por $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ □

Criterios de divisibilidad

Seguramente te acuerdes de lo siguiente:

Criterios de divisibilidad por 3 y 9

Un número es múltiplo de 3 (o de 9) exactamente cuando la suma de sus cifras de un número es múltiplo de 3 (o de 9).

Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 13 más adelante (leyendo y entendiendo el ejemplo resuelto que va justo antes de él). Por el momento, vamos a empezar justificando el siguiente criterio más fácil, que también conoces.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es par (es decir, divisible por 2) exactamente cuando su última cifra es par (es decir, igual a $0, 2, 4, 6$ u 8).

Veamos por qué es cierto el criterio de divisibilidad por 2. La "culpa" la tiene nuestro sistema decimal: cualquier número entero no negativo n se puede representar así:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

donde k es el número de cifras de n, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son cifras entre 0 y 9, a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, etc. Por ejemplo,

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Cada potencia de 10 es **par**, por tanto, en la siguiente ecuación, n será par exactamente en los casos en los que su cifra de las unidades (a_0) lo sea:

$$n = \underline{a_k 10^k} + \underline{a_{k-1} 10^{k-1}} + ... + \underline{a_1 10} + a_0$$

Es decir, los números subrayados son pares, y como la suma de dos números pares es par, y la suma de par e impar es impar, obtenemos que n y a_0 tienen la misma paridad.

El **criterio de divisibilidad por 5** también proviene del sistema decimal.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 exactamente cuando su última cifra es divisible por 5 (es decir, igual a 0 o 5).

Problema 7. Justifica por qué es cierto el criterio de divisibilidad por 5 usando el mismo tipo de argumento usado para justificar el criterio de divisibilidad por 2.

Solución. Podemos escribir cualquier número entero no negativo n como

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

donde k es el número de cifras de n, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son cifras entre 0 y 9, a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, etc. Como 10 es múltiplo de 5, todas las potencias de 10 lo son. Para que nuestro número n sea múltiplo de 5 la cifra de las unidades también debe serlo, y viceversa, ya que la suma/resta de dos múltiplos de 5 es múltiplo de 5. □

Problema 8. Encuentra el número entero positivo más pequeño de entre los que son divisibles por 45 y sus cifras son todas ceros o unos.

Solución. La descomposición en primos de 45 es $45 = 3^2 \cdot 5$. Por el criterio de divisibilidad por 9, el número tiene que tener una cantidad de cifras igual a 1 que sea divisible por 9. Como tiene que tener algún 1, al menos tendrá nueve cifras igual a 1. Como tiene que ser divisible por 5 y ninguna de sus cifras es un 5, tendrá que acabar en 0, por lo que el número tiene que tener al menos 10 cifras (al menos nueve unos y un cero). El único número de 10 cifras cuyas cifras son todas ceros o unos y que es divisible por 45. □

Criterio de divisibilidad por 11

Sea n un número natural, sea a_0 su cifra de las unidades, a_1 su cifra de las decenas, a_2 su cifra de las centenas, etc. Entonces, n es divisible por 11 exactamente cuando la cantidad

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

es divisible por 11.

Por ejemplo 312345 es divisible por 11 porque $5 - 4 + 3 - 2 + 1 - 3 = 0$, que es divisible por 11. **Podrás saber por qué es cierto este criterio si haces el Problema 28** más adelante.

Problema 9. En la palabra PEQUEÑO cada letra representa una de las siguientes cifras: 0, 1, 2, 4, 6 y 8, y distintas letras corresponden a cifras distintas. El número correspondiente es múltiplo de 3. ¿Qué cifra representa la E?

Solución. En PQUEÑO hay 6 letras distintas, que deben corresponder a las 6 cifras distintas, de modo que la suma de las cifras que corresponden a las letras es $P+Q+U+E+\tilde{N}+O = 0+1+2+4+6+8 = 21$ (aunque quizás en otro orden). Ahora tenemos que sumarle una de estas cifras para obtener un múltiplo de 3, la única opción es sumarle 6 ($21 + 6 = 3 \cdot 9$). Como la E es la única letra que se repite su valor es 6. □

Problema 10. Hemos multiplicado todos los números impares del 1111 al 9999. ¿En qué cifra termina el resultado?

Solución. El tercer número del producto es 1115, que es múltiplo de 5, de modo que el producto final es múltiplo de 5 también, además es impar. La última cifra es el 5. □

Problema 11. Demuestra el siguiente criterio de divisibilidad:

Criterio de divisibilidad por 4

Un número n es divisible por 4 exactamente cuando $a_0 + 2a_1$ es divisible por 4, donde a_0 es la cifra de las unidades de n y a_1 es su cifra de las decenas.

Solución. cualquier número entero no negativo n se puede representar así:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

donde k es el número de cifras de n, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son cifras entre 0 y 9, a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, etc. Como 100 es divisible por 4, tenemos que la parte subrayada es múltiplo de 4

$$n = \underline{a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2} + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

y obtenemos que n es múltiplo de 4 exactamente cuando $a_1 \cdot 10 + a_0$ es múltiplo de 4. Pero $a_1 \cdot 10 + a_0 = 8a_1 + (2a_1 + a_0)$, por lo que $a_1 \cdot 10 + a_0$ es múltiplo de 4 exactamente cuando $a_0 + 2a_1$ es múltiplo de 4. □

Problema 12. Halla el múltiplo de 125 más grande que existe entre los números en los que todas sus cifras son distintas. *Pista: Empieza formulando y demostrando un criterio de divisibilidad por* 125.

Solución. Como las potencias de 10 mayores o iguales que 10^3 son divisibles por 125, tenemos que para que un número sea múltiplo de 125, el número formado por sus tres últimas cifras también tienen que serlo. Por tanto, el número acaba en 125, 250, 375, 625, 750 u 875.

Nuestro número no puede tener más de 10 cifras, si no, habría que repetir alguna. Para que sea el mayor número posible el orden de las cifras tiene que ser de mayor a menor (9876...) dentro de lo posible, teniendo en cuenta la restricción de las 3 últimas cifras. Por tanto, las tres últimas cifras tendrán que estar entre aquellas entre las que la cifra más grande sea lo menor posible (125 o 250). De hecho, será 250, porque 9876431250 es mayor que 9876430125. Por tanto, la respuesta es 9876431250. □

Antes de hacer el Problema 13, **lee y entiende el siguiente ejemplo resuelto**, que nunca leéis los ejemplos resueltos y **están ahí por algo**.

Ejemplo resuelto. Demuestra el criterio de divisibilidad por 3.

Solución. Sea n un número natural. Lo expresamos en base 10 como $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots$, es decir, a_0 es la cifra de las unidades, a_1 la de las decenas, a_2 la de las centenas, etc. Tenemos que $10 = 9+1$, $10^2 = 99 + 1$, $10^3 = 999 + 1$, ... Por tanto,

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + (a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + a_3 \cdot 999 + \ldots).$$

Observamos que $a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + a_3 \cdot 999 \ldots = 3 \cdot (a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + a_3 \cdot 333 \ldots)$ es divisible por 3. En resumen, sabemos que

$$n = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + 3 \cdot (a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + a_3 \cdot 333 + \ldots) \quad (1)$$

Nos piden demostrar que n es divisible por 3 en las mismas ocasiones en las que $(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots)$ es divisible por 3. Hacemos esta demostración en dos pasos. Primero veremos que si n es divisible por 3, entonces también lo es $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$. Luego veremos que si $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$ es divisible por 3, también lo es n.

Si n es divisible por 3, entonces la ecuación (1) nos dice que

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = n - 3 \cdot (a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + a_3 \cdot 333 \ldots),$$

y como resta de dos múltiplos de 3 es múltiplo de 3, la suma de las cifras de n también será múltiplo de 3.

Ahora, supongamos que $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$ es divisible por 3. Entonces,la ecuación (1) nos dice que n es suma de dos múltiplos de 3, y por tanto n es múltiplo de 3. □

Problema 13. Demuestra el criterio de divisibilidad por 9. Escribe la demostración individualmente en tu cuaderno.

Solución. Sea $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots$ un numero natural expresado en base 10 como en el ejemplo resuelto anterior. Como antes, tenemos que

$$n = a_0+a_1\cdot 10+a_2\cdot 10^2+\ldots = (a_0+a_1+a_2+\ldots)+(a_1\cdot 9+a_2\cdot 99+\ldots) = (a_0+a_1+a_2+\ldots)+9(a_1+a_2\cdot 11+a_3\cdot 111+\ldots).$$

Argumentando como en el ejemplo anterior (usando que la suma/resta de múltiplos de 9 es múltiplo de 9) obtendremos que n es divisible por 9 en las mismas ocasiones en las que $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ es divisible por 9. □

Si has entendido el ejemplo resuelto anterior y has hecho bien el último problema, verás por qué es cierto lo siguiente:

> Si a un número le restamos la suma de sus cifras, el resultado es siempre un múltiplo de 9 (y por tanto también un múltiplo de 3).

Asegúrate de que entiendes por qué esto es verdad antes de seguir con el resto de problemas.

Problemas

Problema 14. Después de aprender las reglas de divisibilidad por 3 y por 9, un alumno propuso la siguiente regla de divisibilidad por 27: un número es divisible por 27 si la suma de sus cifras es divisible por 27.

¿Es esto verdad? Demuéstralo o encuentra un contraejemplo.

Solución. No es verdad, 9945 no es divisible por 27, pero la suma de sus cifras sí lo es.

□

Problema 15. Para todo número natural n, definimos $n!$ como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

¿Existe algún número natural n tal que $n! = 202500\cdots0$? El número de ceros al final es arbitrario.

Solución. No. La descomposición en primos de $202500\cdots0$ es $2^k \cdot 3^4 \cdot 5^{k+2}$ donde k es el número de 0's al final. Si $k \geq 1$, $202500\cdots0 > 7! = 5040$, por lo que si $n! = 202500\cdots0$, entonces $n > 7$ y por tanto 7 dividiría a $n! = 202500\cdots0$, que ya sabemos que no lo divide. Por tanto, la única posibilidad que nos queda por descartar es que $k = 0$. Pero $6! = 720 < 2025 < 7! = 5040$, por lo que este caso tampoco puede ocurrir. □

Problema 16. ¿Es posible encontrar valores para x e y que sean números enteros de tal manera que $x^2 + 2017 = y^2$? Si es posible, da un ejemplo, y si no, demuestra por qué no es posible.

Solución. Como tanto x como y aparecen al cuadrado en la ecuación, vemos que si fuera posible encontrar valores enteros de x e y satisfaciendo la ecuación, entonces sería posible encontrar valores enteros *no negativos* de x e y satisfaciendo la ecuación.

Reescribimos la ecuación como

$$(y-x) \cdot (y+x) = 2017.$$

Como buscamos soluciones tales que $y, x \geq 0$, de aquí obtenemos que $y \geq x$, y que $y - x \leq y + x$. Como 2017 es un número primo, obtenemos que

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 2017 \end{cases}$$

Sumar las ecuaciones nos dice que $2y = 2018$, por lo que $y = 1009$. De la primera ecuación obtenemos que $x = 1008$. Efectivamente, podemos comprobar que

$$(1008)^2 + 2017 = (1009)^2.$$

□

Problema 17. En cada una de las casillas de una tabla 15×15 hay escrito un número del 1 al 15. Sabemos que cualesquiera dos casillas que son simétricas respecto a la diagonal principal tienen el mismo número. También sabemos que cada fila y cada columna contiene 15 números distintos. Demuestra que no puede haber dos números iguales en dos casillas distintas de la diagonal principal.

Solución. Cada número aparece 15 veces en el tablero. Si quitamos las casillas de la diagonal principal, cada número aparece un número par de veces. Por tanto, cada número aparece un número impar de veces en la diagonal principal (al menos una vez). Como hay 15 números y 15 casillas en la diagonal principal, cada número aparece exactamente una vez en la diagonal principal. □

Problema 18. ¿Se puede escribir el número 1 como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, donde a, b, c, d son números enteros impares (no necesariamente positivos)? Da un ejemplo o explica por qué no se puede.

Solución. No se puede. Si se pudiera, tendríamos que

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd}.$$

El denominador es un número impar, y el numerador es la suma de cuatro números impares, que es par. □

Problema 19. Encuentra un número natural n tal que los números $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+2025$ son todos números compuestos.

Solución. $n = 2026! + 1 = 2026 \cdot 2025 \cdot 2024 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1$ satisface las condiciones del enunciado. Si $k = 1, \ldots, 2025$, los números $(2026!+1)+k = 2026!+(k+1)$ son divisibles por $k+1$, donde $2 \leq k+1 \leq 2026$, y por tanto son todos compuestos. □

Problema 20. Andrea y Baldur juegan al siguiente juego: En una hoja de papel están escritos los números 1, 1, 1, y 2. En cada turno, el jugador al que le toca jugar elige dos de los números y sustituye cada uno de ellos por el resultado de sumarle 1. Gana el que consigue que los cuatro números se vuelvan iguales. Si los dos jugadores se alternan y empieza jugando Andrea, ¿puede alguno de los jugadores asegurarse la victoria haga lo que haga el otro? Si es así, ¿cómo? Justifica tu respuesta.

Repite el ejercicio si juegan con estos cuatro números: 1, 2, 3, 4.

Solución. Primera pregunta: La suma de los números de la hoja es $1 + 1 + 1 + 2 = 5$. En cada turno, a esta suma se le añaden 2, por lo que la suma de los números de la hoja siempre es impar. Como la suma de cuatro números iguales es siempre par, este juego nunca acabará.

Segunda pregunta: Si juegan con esos cinco números, la suma después del primer turno de Andrea es 12, por lo que siempre será múltiplo de 4 después de cada turno de Andrea, y par pero no múltiplo de 4 después de cada turno de Baldur. Eso significa que Baldur nunca puede ganar a este juego, pero quizá pueda jugar bien para asegurarse que Andrea tampoco. Baldur puede seguir la estrategia de sumarle 1 a los dos números más grandes. Después de la primera jugada, la diferencia máxima entre dos de los números de la hoja es al menos 3. Baldur puede aumentar esta diferencia en su siguiente turno siguiendo la estrategia descrita, y Andrea en sus turnos sólo puede reducirla en 1. Por tanto, en este juego tampoco puede ninguno de los jugadores asegurarse la victoria. De todos modos, Andrea podría ganar si Baldur juega mal. Por ejemplo

$$1, 2, 3, 4 \xrightarrow{\text{Andrea}} 2, 3, 3, 4 \xrightarrow{\text{Baldur}} 3, 3, 4, 4 \xrightarrow{\text{Andrea}} 4, 4, 4, 4.$$

□

Problema 21. ¿Existe algún número de 300 cifras tal que 100 de sus cifras son 0, otras 100 de sus cifras son 1 y las otras 100 restantes son 2 que sea un cuadrado perfecto? ¿Por qué sí o por qué no?

Solución. La suma de las cifras de un tal número es 300, que es divisible por 3 pero no por 9. Si un cuadrado perfecto es divisible por 3, entonces es divisible por 9. Por tanto no puede existir un número como el que describe este enunciado.

□

Problema 22. Fulanito multiplicó todos los números del 1 al 100. Como le quedó un número muy grande, sumó todas las cifras de ese número y obtuvo otro. Como le siguió quedando un número muy grande, sumó todas sus cifras y obtuvo otro. Continuó así hasta obtener un número de una sola cifra. ¿Qué número obtuvo al final? ¿Cómo lo puedes saber?

Solución. La respuesta es 9. $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ es divisible por 9, por lo que la suma de sus cifras también lo es. Repitiendo este proceso sólo obtenemos números tal que la suma de sus cifras es divisible por 9. El único número de una cifra que satisface que la suma de sus cifras es divisible por 9 es 9.

□

Problema 23. Mientras estudiaba números y sus propiedades, Pepito encontró un número primo de 3 cifras tal que su última cifra era igual a la suma de sus otras dos cifras. ¿Cuál era la última cifra de ese número primo, si ninguna de sus cifras es 0?

Solución. Como el número es primo, su última cifra no puede ser par ni 5. La última cifra tampoco puede ser 3 ni 9, porque la suma de todas sus cifras sería 6 o 18 respectivamente, y por tanto sería divisible por 3 y no primo. Por tanto, la última cifra es 7.

□

Problema 24. Para todo número natural n, definimos $n!$ como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Encuentra el número natural k más pequeño que cumple que $k!$ es divisible por 2024. ¿Cuál es el resultado si cambiamos 2024 por 2025?

Solución. $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. La respuesta es de la forma $k!$ para $k \geq 23$, porque 23 no aparece como factor en $n!$ si $n < 23$. De hecho, tanto 8 como 11 dividen a 23!, por lo que la respuesta es $k = 23$.

$2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. La respuesta es de la forma $k!$ para $k \geq 10$, ya que 25 no divide a $n!$ si $n < 10$. De hecho, $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, por lo que la respuesta es $k = 10$.

□

Problema 25. Zutano está buscando números de tres cifras tales que la primera y la última cifra son la misma. Nos dice que se ha dado cuenta que esos números son divisibles por 7 exactamente cuando la suma de su segunda y tercera cifra es divisible por 7. ¿Tiene razón? ¿Por qué sí o por qué no?

Solución. Sí tiene razón. Estos números son del tipo $100a + 10b + a$, donde a es un número del 1 al 9 y b del 0 al 9. Como

$$100a + 10b + a = 91a + 10(a+b) = 7 \cdot 13 \cdot a + 10(a+b),$$

obtenemos que si $(a+b)$ es divisible por 7, entonces también lo es $100a+10b+a$, y al revés, si $100a+10b+a$ es divisible por 7, entonces $10(a+b)$ es divisible por 7, por lo que, como el máximo común divisor de 7 y 10 es 1, $(a+b)$ tiene que ser divisible por 7.

□

Problema 26. Menganita encontró un recibo en su cartera de la vez que compró 72 pollos asados. Algunas de las cifras se habían borrado, y solo sabe que los 72 pollos le costaron $*61,9*$ euros (los asteriscos representan las cifras que se borraron). ¿Puedes saber cuánto le costó cada pollo? ¿Por qué sí o por qué no?

Solución. $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Llamamos a al primer asterisco y b al segundo. Tenemos que $a + 6 + 1 + 9 + b$ es divisible por 9, por lo que $a+b+7$ es divisible por 3. También b tiene que ser par, $9b$ tiene que ser divisible por 4, por lo que $b = 2$ o $b = 6$, $19b$ tiene que ser divisible por 8. Por tanto, $b = 2$. Como $a + b + 7$ es divisible por 9, tenemos que a es divisible por 9, por lo que $a = 9$. Por tanto, en total pagó $961,92$ euros, y cada pollo le costó $13,36$ euros.

□

Problema 27. Para cada una de las preguntas, encuentra un ejemplo o explica por qué no se puede.

a) ¿Se puede expresar el número 221 como suma de 52 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

b) ¿Se puede expresar el número 226 como suma de 52 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

c) ¿Se puede expresar el número 226 como suma de 51 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

Solución. a) Supongamos que sí que se puede. Tenemos que $221 = 3 \cdot 73 + 2$ y $52 = 3 \cdot 17 + 1$. Sea s_i el sumando número i, y sea n la suma de sus cifras. Por la demostración de la regla de divisibilidad por 3, tenemos que $s_i = 3k_i - n$ para algún número entero k_i. Por tanto.

$$3 \cdot 73 + 2 = s_1 + \ldots + s_{52} = 3 \cdot (k_1 + \ldots + k_{52}) + 52 \cdot n = 3 \cdot (k_1 + \ldots + k_{52} + 17n) + n$$

Por tanto, $n - 2$ es divisible por 3. Por tanto n sólo puede ser $2, 5, 8, \ldots$. De hecho, como el menor número cuyas cifras suman al menos 5 es 5 y $52 \cdot 5 > 221$, tenemos que $n = 2$.

Con esto en mente ya es más sencillo buscar ejemplos: La respuesta es que sí se puede, y un ejemplo es $221 = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{50 \text{ veces}} + 11 + 110$.

b) Supongamos que sí que se puede. Tenemos que $226 = 9 \cdot 25 + 1$ y $52 = 9 \cdot 5 + 7$. Sea s_i el sumando número i, y sea n la suma de sus cifras. Por la demostración de la regla de divisibilidad por 9, tenemos que $s_i = 9k_i - n$ para algún número entero k_i. Por tanto.

$$9 \cdot 25 + 1 = s_1 + \ldots + s_{52} = 9 \cdot (k_1 + \ldots + k_{52}) + 52 \cdot n = 9 \cdot (k_1 + \ldots + k_{52} + 5n) + 7n$$

Por tanto, $7n - 1$ es divisible por 9. Esto ocurre si $n = 4$, pero no si $n = 1, 2, 3$. Por tanto $n \geq 4$. De hecho, como el menor número cuyas cifras suman al menos 5 es 5 y $52 \cdot 5 > 226$, tenemos que $n = 4$.

Con esto en mente ya es más sencillo buscar ejemplos: La respuesta es que sí se puede, y un ejemplo es $226 = \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{51 \text{ veces}} + 22$.

c) No se puede. Argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que sí que se puede. Tenemos que $226 = 3 \cdot 75 + 1$ y $51 = 3 \cdot 17$. Sea s_i el sumando número i, y sea n la suma de sus cifras. Por la demostración de la regla de divisibilidad por 3, tenemos que $s_i = 3k_i - n$ para algún número entero k_i. Por tanto.

$$3 \cdot 75 + 1 = s_1 + \ldots + s_{51} = 3 \cdot (k_1 + \ldots + k_{51}) + 51 \cdot n = 3 \cdot (k_1 + \ldots + k_{52} + 17n)$$

Por tanto, 1 sería divisible por 3, y esto es imposible.

□

Problema 28. Demuestra el criterio de divisibilidad por 11.
Ayuda: Empieza demostrando que $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par y $10^k + 1$ es divisible por 11 si k es impar.

Solución. Empezamos demostrando la ayuda. Si k es par, entonces $k = 2m$ para algún número entero $m \geq 0$. El resultado es obvio si $m = 0$, por lo que podemos asumir que $m \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 10^k - 1 &= \underbrace{99\ldots99}_{2m \text{ veces}} \\ &= 99 \cdot 1 + 99 \cdot 10^2 + 99 \cdot 10^4 + \ldots + 99 \cdot 10^{2m-2} \\ &= 99 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2}) \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2}), \end{aligned}$$

y como $9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2})$ es un número entero, $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par.

Si k es impar, entonces $k = 2m + 1$ para algún entero $m \geq 0$. El resultado es obvio si $m = 0$, por lo que podemos asumir que $m \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 10^k + 1 &= \underbrace{99\ldots9}_{2m \text{ veces}}0 + 11 \\ &= 11 + 10 \cdot (10^{2m} - 1) \\ &= 11 \cdot (1 + 10 \cdot 9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2})), \end{aligned}$$

y como $(1+10\cdot 9\cdot(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2m-2}))$ es un número entero, obtenemos que 10^k+1 es divisible por 11 si k es impar. Con esto, queda demostrada la ayuda.

Pasamos ahora a demostrar el problema. Sea $n=r_0+r_1\cdot 10+r_2\cdot 10^2+\ldots$ un número natural n escrito en base 10, es decir, r_0 es la cifra de las unidades, r_1 la de las decenas, etc. Tenemos que

$$n=(r_0-r_1+r_2-\ldots)+(r_1\cdot(10+1)+r_2\cdot(10^2-1)+r_3\cdot(10^3+1)\ldots).$$

La ayuda nos dice que $(10+1),(10^2-1),(10^3+1),\ldots$ son todos divisibles por 11, por lo que

$$(r_1\cdot(10+1)+r_2\cdot(10^2-1)+r_3\cdot(10^3+1)\ldots) \quad \text{es divisible por 11.}$$

Argumentando como en el criterio de divisibilidad por 3 (el ejemplo resuelto antes del Problema 13), obtenemos que n es divisible por 11 si y sólo si $(r_0-r_1+r_2-\ldots)$ es divisible por 11. □

Problema 29. Los números 2^{2025} y 5^{2025} se escriben en un papel, uno detrás de otro. ¿Cuántos dígitos se escriben en total?

Solución. Sea k el número de dígitos de 2^{2025}. Tenemos que

$$10^k>2^{2025}>10^{k-1}$$

Observamos que $2^{2025}\cdot 5^{2025}=10^{2025}$, y dividimos toda la desigualdad por 10^{2025}, obteniendo

$$\frac{1}{10^{2025-k}}>\frac{1}{5^{2025}}>\frac{1}{10^{2026-k}},$$

por lo que

$$10^{2026-k}>5^{2025}>10^{2025-k},$$

es decir, 5^{2025} tiene $2026-k$ dígitos. Por tanto, la cantidad total de dígitos en el papel es $k+2026-k=2026$. □

Problema 30. Nos informan de la existencia del siguiente criterio.

Criterio de divisibilidad por 37

Sea N un número natural. Empieza agrupando el número N en bloques de 3 cifras empezando por la derecha (puedes añadir ceros a la izquierda para que esto sea posible). Entonces, N es divisible por 37 exactamente cuando la suma de los números de 3 cifras obtenidos a partir de N de esta manera es divisible por 37.

Comprueba que el número 4567835 es divisible por 37 de dos maneras: dividiendo por 37 y siguiendo esta regla. Después, demuestra que la regla funciona siempre.

Solución. Haciendo la división por 37 obtenemos que $4567835=37\cdot 123455$. Siguiendo la regla, obtenemos que 4567835 es divisible por 37 si y sólo si $4+567+835=1406$ es divisible por 37, que ocurre si y sólo si $1+406=407$ es divisible por 37. Como $407=37\cdot 11$, obtenemos que 4567835 es divisible por 37.

Ahora vamos a demostrar que la regla es cierta. Cualquier número natural N es de la forma $N=a_0+10b_0+10^2c_0+10^3a_1+10^4b_1+10^5c_1+\ldots+10^{3n}a_n+10^{3n+1}b_n+10^{3n+2}c_n$, donde $n\geq 0$, a_i,b_i,c_i son números entre 0 y 9 para todo $i=0,\ldots,n$, $a_n\neq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}N&=(a_0+10b_0+10^2c_0)+10^3(a_1+10b_1+10^2c_1)+10^6(a_2+10b_2+10^2c_2)+\ldots+10^{3n}(a_n+10b_n+10^2c_n)\\&=\big((a_0+10b_0+10^2c_0)+(a_1+10b_1+10^2c_1)+\ldots+(a_n+10b_n+10^2c_n)\big)+\\&\quad(10^3-1)(a_1+10b_1+10^2c_1)+(10^6-1)(a_2+10b_2+10^2c_2)+\ldots(10^{3n}-1)(a_n+10b_n+10^2c_n).\end{aligned}$$

Similarmente al argumento de la demostración de las reglas de divisibilidad por 3 y 9, el resultado se seguirá si conseguimos demostrar que $10^{3i}-1$ es divisible por 37 para todo $i\geq 1$. Si $i=1$, $10^{3i}-1=10^3-1=999=37\cdot 27$. En general,

$$10^{3i}-1=999+10^3\cdot 999+\ldots+10^{3(i-1)}\cdot 999=999\cdot\left(1+10^3+\ldots+10^{3(i-1)}\right),$$

por lo que, como 999 es divisible por 37, $10^{3i}-1$ es divisible por 37 para todo $i\geq 1$.

□

Problemas para hacer en casa

7 de febrero

Problema 31. En el PIM queremos crear nuestra propia moneda, que obviamente va a llamarse PIM, y su símbolo será ₱ (cualquier parecido con el peso filipino es pura coincidencia). Solamente habrá monedas de 1₱, 3₱ y 5₱. ¿Podríamos tener 100₱ en once monedas? ¿Por qué sí o por qué no?

Solución. La respuesta es que no. Argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que sí que se puede, yea x el número de monedas de 5₱, y el número de monedas de 3₱, y z el número de monedas de 1₱ con las que podemos hacer esto. Los números x, y, z son números enteros no negativos que satisfacen las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 100 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos $4x + 2y = 89$. Como x e y son enteros, la parte a la izquierda del igual en la ecuación anterior es par, pero la parte a la derecha es impar, por lo que llegamos a una contradicción.

□

14 de febrero

Problema 32. ¿Es posible encontrar valores para x e y que sean números enteros de tal manera que $x^2 + 4034 = y^2$? Si es posible, da un ejemplo, y si no, demuestra por qué no es posible.

Solución. **Pistas:** Recuerda que $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

No es posible. Como tanto x como y aparecen al cuadrado en la ecuación, vemos que si fuera posible encontrar valores enteros de x e y satisfaciendo la ecuación, entonces sería posible encontrar valores enteros *no negativos* de x e y satisfaciendo la ecuación. Supongamos que esto último es posible. Reescribimos la ecuación como

$$(y - x) \cdot (y + x) = 4034.$$

Como buscamos soluciones tales que $y, x \geq 0$, de aquí obtenemos que $y \geq x$, y que $y - x \leq y + x$. Factorizamos $4034 = 2 \cdot 2017$, y notamos que 2017 es un número primo. Por tanto, tenemos dos posibilidades

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 4034 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 2017 \end{cases}$$

Para el primer sistema, sumar las ecuaciones nos dice que $2y = 4035$, pero esto es imposible si y es entero, porque la parte izquierda de la ecuación es par y la parte derecha es impar. Para el segundo sistema, sumar las ecuaciones nos dice que $2y = 2019$, y el mismo argumento nos dice que y no puede ser un número entero.

□