Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 31 de enero, 7 y 14 de febrero de 2025
Aritmética
Neptuno y Marte

Tenéis que hacer los ejercicios de esta hoja **en orden hasta el Problema 13, leyendo las explicaciones teóricas y el ejemplo resuelto con cuidado**. Los problemas más difíciles están al final de la hoja.

Divisibilidad

Definición. Si n es un número entero positivo, decimos que es **primo** si tiene exactamente dos divisores. Si tiene más de dos divisores, decimos que es **compuesto**.

5 es primo porque tiene exactamente dos divisores, 1 y 5. 6 es compuesto porque tiene exactamente cuatro divisores: 1, 2, 3 y 6. Sin embargo 1 **no es primo ni compuesto** porque sólo tiene un divisor, él mismo.

Problema 1. ¿Cuántos divisores tienen estos números?

a) $17 \cdot 19$.

b) 17^3.

c) $17 \cdot 19 \cdot 23$.

d) $17 \cdot 19^2 \cdot 23^3$.

e) $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, donde $k \geq 1$, $p_1, \ldots, p_k$ son números primos, y $n_1, \ldots, n_k \geq 1$.

Problema 2. Demuestra que los siguientes números son compuestos y busca al menos 3 factores (distintos de 1). *Pista: Recuerda que* $(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y)$.

1. $117^{96} - 1$
2. 99999996

¿Qué significa que un número N sea múltiplo de 3? Matemáticamente hablando, significa que N **se puede representar como producto de 3 por un número entero**, es decir

$$N = 3k, \qquad \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

Por ejemplo, -12 es múltiplo de 3 porque $-12 = 3 \cdot (-4)$, donde -4 es entero, sin embargo, 7 no es múltiplo de 3 porque $7 = 3 \cdot \frac{7}{3}$, y $\frac{7}{3}$ no es entero.

Parece mentira, pero esta notación nos permite demostrar hechos sobre números que ni siquiera sabemos cuáles son:

Para cualquier número natural n, las siguientes afirmaciones son ciertas:

- La suma de dos múltiplos de n es también múltiplo de n.
- La resta de dos múltiplos de n es también múltiplo de n.

En efecto, dos múltiplos cualesquiera de n se pueden escribir como $n \cdot a$ y $n \cdot b$, donde a, b son números naturales. Por tanto, su suma será $n \cdot a + n \cdot b = n \cdot (a+b)$, y su resta será $n \cdot a - n \cdot b = n \cdot (a-b)$, ambas múltiplos de n.

Problema 3. Demuestra que la suma de cinco números consecutivos siempre es múltiplo de 5. *Pista: Llama a los cinco números consecutivos n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ y $n+4$.*

Problema 4. Determina si son ciertas las siguientes afirmaciones, demostrándolas si son ciertas y dando un contraejemplo si no lo son:

a) Si un número es divisible por 4 y por 6, ¿es necesariamente divisible por 24?

b) Si un número es divisible por 6 y por 7, ¿es necesariamente divisible por 42?

c) Si n es un número natural y $15n$ es divisible por 7, entonces n es divisible por 7.

d) Si n es un número natural y $15n$ es divisible por 10, entonces n es divisible por 10.

Problema 5. Un número está compuesto por dos grupos iguales de cuatro cifras (como 16781678 o 33533353). Demuestra que es múltiplo de 73 y de 137.

Problema 6. ¿Es verdad que el producto de cuatro números enteros consecutivos siempre es múltiplo de 24? Justifica tu respuesta.

Criterios de divisibilidad

Seguramente te acuerdes de lo siguiente:

Criterios de divisibilidad por 3 y 9

Un número es múltiplo de 3 (o de 9) exactamente cuando la suma de sus cifras de un número es múltiplo de 3 (o de 9).

Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 13 más adelante (leyendo y entendiendo el ejemplo resuelto que va justo antes de él). Por el momento, vamos a empezar justificando el siguiente criterio más fácil, que también conoces.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es par (es decir, divisible por 2) exactamente cuando su última cifra es par (es decir, igual a $0, 2, 4, 6$ u 8).

Veamos por qué es cierto el criterio de divisibilidad por 2. La “culpa” la tiene nuestro sistema decimal: cualquier número entero no negativo n se puede representar así:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

donde k es el número de cifras de n, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son cifras entre 0 y 9, a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, etc. Por ejemplo,

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Cada potencia de 10 es **par**, por tanto, en la siguiente ecuación, n será par exactamente en los casos en los que su cifra de las unidades (a_0) lo sea:

$$n = \underline{a_k 10^k} + \underline{a_{k-1} 10^{k-1}} + ... + \underline{a_1 10} + a_0$$

Es decir, los números subrayados son pares, y como la suma de dos números pares es par, y la suma de par e impar es impar, obtenemos que n y a_0 tienen la misma paridad.

El **criterio de divisibilidad por 5** también proviene del sistema decimal.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 exactamente cuando su última cifra es divisible por 5 (es decir, igual a 0 o 5).

Problema 7. Justifica por qué es cierto el criterio de divisibilidad por 5 usando el mismo tipo de argumento usado para justificar el criterio de divisibilidad por 2.

Problema 8. Encuentra el número entero positivo más pequeño de entre los que son divisibles por 45 y sus cifras son todas ceros o unos.

Criterio de divisibilidad por 11

Sea n un número natural, sea a_0 su cifra de las unidades, a_1 su cifra de las decenas, a_2 su cifra de las centenas, etc. Entonces, n es divisible por 11 exactamente cuando la cantidad

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

es divisible por 11.

Por ejemplo 312345 es divisible por 11 porque $5 - 4 + 3 - 2 + 1 - 3 = 0$, que es divisible por 11. **Podrás saber por qué es cierto este criterio si haces el Problema 28** más adelante.

Problema 9. En la palabra PEPINO cada letra representa una de las siguientes cifras: 1, 2, 4, 6, 8 y distintas letras corresponden a cifras distintas. El número correspondiente es múltiplo de 3. ¿Qué cifra representa la P?

Problema 10. Hemos multiplicado todos los números impares del 1111 al 9999. ¿En qué cifra termina el resultado?

Problema 11. Demuestra el siguiente criterio de divisibilidad:

Criterio de divisibilidad por 4

Un número n es divisible por 4 exactamente cuando $a_0 + 2a_1$ es divisible por 4, donde a_0 es la cifra de las unidades de n y a_1 es su cifra de las decenas.

Problema 12. Halla el múltiplo de 125 más grande que existe entre los números en los que todas sus cifras son distintas. *Pista: Empieza formulando y demostrando un criterio de divisibilidad por* 125.

Antes de hacer el Problema 13, **lee y entiende el siguiente ejemplo resuelto**, que nunca leéis los ejemplos resueltos y **están ahí por algo**.

Ejemplo resuelto. Demuestra el criterio de divisibilidad por 3.

Solución. Sea n un número natural. Lo expresamos en base 10 como $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots$, es decir, a_0 es la cifra de las unidades, a_1 la de las decenas, a_2 la de las centenas, etc. Tenemos que $10 = 9+1$, $10^2 = 99 + 1$, $10^3 = 999 + 1$, $\dots$. Por tanto,

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \dots = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) + (a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + a_3 \cdot 999 + \dots).$$

Observamos que $a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + a_3 \cdot 999 \dots = 3 \cdot (a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + a_3 \cdot 333 \dots)$ es divisible por 3. En resumen, sabemos que

$$n = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) + 3 \cdot (a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + a_3 \cdot 333 + \dots) \tag{1}$$

Nos piden demostrar que n es divisible por 3 en las mismas ocasiones en las que $(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots)$ es divisible por 3. Hacemos esta demostración en dos pasos. Primero veremos que si n es divisible por 3, entonces también lo es $(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots)$. Luego veremos que si $(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots)$ es divisible por 3, también lo es n.

Si n es divisible por 3, entonces la ecuación (1) nos dice que

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots = n-3\cdot(a_1\cdot 3+a_2\cdot 33+a_3\cdot 333\ldots),$$

y como resta de dos múltiplos de 3 es múltiplo de 3, la suma de las cifras de n también será múltiplo de 3.

Ahora, supongamos que $(a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots)$ es divisible por 3. Entonces,la ecuación (1) nos dice que n es suma de dos múltiplos de 3, y por tanto n es múltiplo de 3. □

Problema 13. Demuestra el criterio de divisibilidad por 9. Escribe la demostración individualmente en tu cuaderno.

Si has entendido el ejemplo resuelto anterior y has hecho bien el último problema, verás por qué es cierto lo siguiente:

> Si a un número le restamos la suma de sus cifras, el resultado es siempre un múltiplo de 9 (y por tanto también un múltiplo de 3).

Asegúrate de que entiendes por qué esto es verdad antes de seguir con el resto de problemas.

Problemas

Problema 14. Después de aprender las reglas de divisibilidad por 3 y por 9, un alumno propuso la siguiente regla de divisibilidad por 27: un número es divisible por 27 si la suma de sus cifras es divisible por 27.

¿Es esto verdad? Demuéstralo o encuentra un contraejemplo.

Problema 15. Para todo número natural n, definimos $n!$ como

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

¿Existe algún número natural n tal que $n! = 202500\cdots 0$? El número de ceros al final es arbitrario.

Problema 16. ¿Es posible encontrar valores para x e y que sean números enteros de tal manera que $x^2+2017=y^2$? Si es posible, da un ejemplo, y si no, demuestra por qué no es posible.

Problema 17. En cada una de las casillas de una tabla 15×15 hay escrito un número del 1 al 15. Sabemos que cualesquiera dos casillas que son simétricas respecto a la diagonal principal tienen el mismo número. También sabemos que cada fila y cada columna contiene 15 números distintos. Demuestra que no puede haber dos números iguales en dos casillas distintas de la diagonal principal.

Problema 18. ¿Se puede escribir el número 1 como $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, donde a,b,c,d son números enteros impares (no necesariamente positivos)? Da un ejemplo o explica por qué no se puede.

Problema 19. Encuentra un número natural n tal que los números $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+2025$ son todos números compuestos.

Problema 20. Andrea y Baldur juegan al siguiente juego: En una hoja de papel están escritos los números 1, 1, 1, y 2. En cada turno, el jugador al que le toca jugar elige dos de los números y sustituye cada uno de ellos por el resultado de sumarle 1. Gana el que consigue que los cuatro números se vuelvan iguales. Si los dos jugadores se alternan y empieza jugando Andrea, ¿puede alguno de los jugadores asegurarse la victoria haga lo que haga el otro? Si es así, ¿cómo? Justifica tu respuesta.

Repite el ejercicio si juegan con estos cuatro números: 1, 2, 3, 4.

Problema 21. ¿Existe algún número de 300 cifras tal que 100 de sus cifras son 0, otras 100 de sus cifras son 1 y las otras 100 restantes son 2 que sea un cuadrado perfecto? ¿Por qué sí o por qué no?

Problema 22. Fulanito multiplicó todos los números del 1 al 100. Como le quedó un número muy grande, sumó todas las cifras de ese número y obtuvo otro. Como le siguió quedando un número muy grande, sumó todas sus cifras y obtuvo otro. Continuó así hasta obtener un número de una sola cifra. ¿Qué número obtuvo al final? ¿Cómo lo puedes saber?

Problema 23. Mientras estudiaba números y sus propiedades, Pepito encontró un número primo de 3 cifras tal que su última cifra era igual a la suma de sus otras dos cifras. ¿Cuál era la última cifra de ese número primo, si ninguna de sus cifras es 0?

Problema 24. Para todo número natural n, definimos $n!$ como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Encuentra el número natural k más pequeño que cumple que $k!$ es divisible por 2024. ¿Cuál es el resultado si cambiamos 2024 por 2025?

Problema 25. Zutano está buscando números de tres cifras tales que la primera y la última cifra son la misma. Nos dice que se ha dado cuenta que esos números son divisibles por 7 exactamente cuando la suma de su segunda y tercera cifra es divisible por 7. ¿Tiene razón? ¿Por qué sí o por qué no?

Problema 26. Menganita encontró un recibo en su cartera de la vez que compró 72 pollos asados. Algunas de las cifras se habían borrado, y solo sabe que los 72 pollos le costaron $*61,9*$ euros (los asteriscos representan las cifras que se borraron). ¿Puedes saber cuánto le costó cada pollo? ¿Por qué sí o por qué no?

Problema 27. Para cada una de las preguntas, encuentra un ejemplo o explica por qué no se puede.

a) ¿Se puede expresar el número 221 como suma de 52 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

b) ¿Se puede expresar el número 226 como suma de 52 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

c) ¿Se puede expresar el número 226 como suma de 51 números enteros positivos tal que cada uno de los sumandos tenga la misma suma de sus cifras?

Problema 28. Demuestra el criterio de divisibilidad por 11.
Ayuda: Empieza demostrando que $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par y $10^k + 1$ es divisible por 11 si k es impar.

Problema 29. Los números 2^{2025} y 5^{2025} se escriben en un papel, uno detrás de otro. ¿Cuántos dígitos se escriben en total?

Problema 30. Nos informan de la existencia del siguiente criterio.

Criterio de divisibilidad por 37

Sea N un número natural. Empieza agrupando el número N en bloques de 3 cifras empezando por la derecha (puedes añadir ceros a la izquierda para que esto sea posible). Entonces, N es divisible por 37 exactamente cuando la suma de los números de 3 cifras obtenidos a partir de N de esta manera es divisible por 37.

Comprueba que el número 4567835 es divisible por 37 de dos maneras: dividiendo por 37 y siguiendo esta regla. Después, demuestra que la regla funciona siempre.

Problemas para hacer en casa

7 de febrero

Problema 31. En el PIM queremos crear nuestra propia moneda, que obviamente va a llamarse PIM, y su símbolo será ₱ (cualquier parecido con el peso filipino es pura coincidencia). Solamente habrá monedas de 1₱, 3₱ y 5₱. ¿Podríamos tener 100₱ en once monedas? ¿Por qué sí o por qué no?

14 de febrero

Problema 32. ¿Es posible encontrar valores para x e y que sean números enteros de tal manera que $x^2 + 4034 = y^2$? Si es posible, da un ejemplo, y si no, demuestra por qué no es posible.