PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 21 de febrero, 7 y 14 de marzo
Combinatoria
Grupo: Mercurio

Primera parte

Si ya te sabes esta parte, avanza hasta la parte 2.

La combinatoria es el arte de contar. Averiguar cuántos objetos se ajustan a determinadas características puede no ser fácil. En esta hoja empezaremos presentando (o recordando) ideas y conceptos básicos de combinatoria. **Aseguraos de que habéis entendido y resuelto correctamente todos los ejemplos y problemas de la introducción**.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con un alfabeto de 27 letras? Las palabras no tienen por qué significar nada en ningún idioma, por "palabra" vamos a entender una lista ordenada de letras.

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 27 posibilidades para escoger la segunda letra y teniendo dos letras hay 27 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, hay $27 \cdot 27 \cdot 27 = 19683$ palabras de tres letras con un alfabeto de 27 letras. □

En este ejemplo hemos usado la **la regla de producto**:

Regla del producto

Si un objeto A se puede escoger de m maneras y después de cada elección de este tipo, un objeto B se puede escoger de n maneras, entonces se puede escoger una pareja (A, B) de $m \cdot n$ maneras.

En el ejemplo anterior los objetos que teníamos que elegir eran letras, los elegíamos en orden, y para cada uno que elegíamos teníamos 27 posibilidades. Veamos un ejemplo un poco distinto en el que también se aplica la regla del producto.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con un alfabeto de 27 letras, si imponemos que todas las letras de la palabra tienen que ser distintas?

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 26 posibilidades para escoger la segunda letra (porque no podemos repetir letras) y habiendo elegido ya dos letras, quedan 25 posibilidades para la última letra. Por lo tanto, la regla del producto nos da que hay $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$ palabras de tres letras sin ninguna letra repetida con un alfabeto de 27 letras. □

Problema 1. a) ¿Cuántos números de tres cifras hay que tengan todas sus cifras impares?

b) ¿Cuántos números de tres cifras hay que tengan todas sus cifras pares?

Problema 2. ¿De cuántas maneras distintas puedes poner a 18 alumnos en fila? ¿Y a 100 alumnos?

Vamos a explicar una notación nueva para que sea más fácil escribir la respuesta de problemas como el ejercicio anterior.

El factorial de un número

Definición. Si n es un número entero positivo, entonces llamamos "**n factorial**" (y lo denotamos por **n**!) al número

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

También diremos que $0! = 1$, aunque no se ajuste a la definición que acabamos de dar.

Problema 3. Con la definición anterior en mente, completa las siguiente frases, en las que $n \geq k \geq 1$:

- El número de formas distintas de poner a n alumnos distintos en fila es ________________.
- El número de palabras distintas de k letras que se pueden formar con un alfabeto de n letras en las que todas las letras son distintas es ____.

  Este número se puede expresar como una fracción usando factoriales de la siguiente manera:

  ____

Antes de continuar con la hoja, asegúrate de que tus respuestas en el bloque gris anterior son correctas preguntándole a uno de los profesores.

Las preguntas que hemos hecho hasta ahora tenían en cuenta el orden. Por ejemplo, las palabra de tres letras "res", "ser" y "ers" son tres palabras distintas, a pesar de estar formadas por las mismas tres letras. Veamos un ejemplo de una pregunta parecida en la que no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Adrián tiene un total de 15 camisetas, y se va a ir de vacaciones. Quiere meter en la maleta un total de 7 camisetas. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Solución. Aquí no nos importa el orden en el que escogemos las camisetas, sino cuáles escogemos. Tenemos que escoger 7 camisetas de entre 15. Si nos importara el orden, tendríamos 15 posibilidades para la primera camiseta, 14 para la segunda... así hasta $15 - 7 + 1 = 9$ posibilidades para la séptima. Por tanto, si nos importara el orden, la respuesta sería

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!}.$$

Sin embargo, como no nos importa el orden, hay varias de estas elecciones (en la que importa el orden de las camisetas) que nos dan lugar a la misma elección de 7 camisetas. Más concretamente, para cada elección de 7 camisetas, hay 7! maneras de ponerlas en fila, por lo que cada elección de 7 camisetas la estamos contando 7! veces distintas en el cálculo de $\frac{15!}{8!}$. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{\frac{15!}{8!}}{7!} = \frac{15!}{7!8!} = 6435.$$

$\square$

Problema 4. Cada equipo de baloncesto tiene 5 personas. ¿Cuántas maneras de formar 2 equipos hay si tenemos

a) a 10 personas?

b) a 12 personas?

Solución. a) Tenemos que elegir a 5 alumnos de entre esos 10 para formar un equipo, y automáticamente los 5 restantes formarán el otro equipo. Argumentando como en el ejemplo anterior de Adrián y las camisetas, vemos que hay

$$\frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!}$$

formas en las que podemos escoger a 5 alumnos en orden. Como no le importa el orden de los alumnos a la hora de formar un equipo, tenemos que dividir esta cantidad por 5! para obtener que la cantidad de equipos distintos de 5 personas que podemos hacer con 10 alumnos es

$$\frac{\frac{10!}{5!}}{5!} = \frac{10!}{5!5!}.$$

Sin embargo, buscamos las maneras que tenemos para hacer dos equipos de 5. Por cada equipo de 5 que hacemos, los 5 restantes forman el otro equipo. Por tanto, cada posibilidad de dos equipos la estamos contando dos veces en la cantidad $\frac{10!}{5!5!}$, y la respuesta final al problema es

$$\frac{\frac{10!}{5!5!}}{2} = \frac{10!}{5!5!2} = 126$$

b) Argumentando como en la parte anterior, tenemos $\frac{12!}{5!(12-5)!}$ maneras de elegir el primer equipo, $\frac{7!}{5!(7-5)!}$ maneras de elegir el segundo equipo, y como no nos importa el orden de los equipos, la solución es $\frac{\frac{12!}{5!(12-5)!} \cdot \frac{7!}{5!(7-5)!}}{2} = 8316$.

□

Problema 5. Repite el razonamiento de la solución del ejemplo resuelto anterior para justificar que el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Solución. Si nos importara el orden, sabemos por el anterior bloque gris que la respuesta sería $\frac{n!}{(n-k)!}$. Sin embargo, como no nos importa el orden, cada manera de escoger k elementos la estamos contando $k!$ veces (tantas como maneras de poner k elementos en fila). Por tanto, la respuesta es $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

□

Como el ejercicio anterior lo vamos a usar muchísimo, vamos a darle un nombre a su respuesta:

Números combinatorios $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

Definición. Si n es un número entero positivo, y k es un número entero tal que $0 \leq k \leq n$, llamamos "**n sobre k**" (y lo denotamos por $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$) al número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es decir, $\binom{n}{k}$ es simplemente una manera abreviada de escribir $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. El motivo por el que los números combinatorios son importantes es el siguiente, como hemos visto en el Problema 5,:

El número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\binom{n}{k}$.

Si $k = 0$ esta fórmula también tiene sentido, ya que el número de maneras de escoger 0 elementos de entre n es 1 (hay una manera, no escoger nada), y

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Problema 6. En este ejercicio, una palabra es una lista ordenada de letras sin espacios entre medio. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas palabras distintas de siete letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *NUMEROS*?

b) ¿Cuántas palabras distintas de once letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *MATEMATICAS*? Date cuenta de que algunas letras están repetidas.

c) ¿De cuántas maneras puedes formar dos palabras, una de tres letras y otra de dos, usando las letras de la palabra *NUMERITOS* sin repetir ninguna letra?

Solución. a) La palabra *NUMEROS* tiene 7 letras, todas distintas. Por tanto, nos están perguntando por el número de formas que hay de poner 7 elementos distintos en fila, que es

$$7! = 5040$$

b) Si todas las letras fueran distintas, la respuesta sería 11!. Podemos imaginarnos que lo son, por ejemplo, pintando una M de rojo y otra de azul, una T de rojo y otra de azul, y una A de rojo, otra de azul y otra de verde. Cada posible respuesta de entre las 11! la estamos contando $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos M's son idénticas, $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos T's son idénticas, y $3! = 6$ veces si pasamos a considerar que las A's son idénticas. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{11!}{2!2!3!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.663.200$$

c) La palabra *NUMERITOS* tiene 9 letras, todas ellas distintas. Elegimos las letras en este orden: primero las de la palabra de 3 letras, de la primera a la última, y luego de la palabra de 2 letras, de la primera a la última. Para la primera letra de la palabra de 3 letras hay 9 posibilidades, para la segunda hay 8, para la tercera hay 7. Para la primera letra de la palabra de 2 letras hay 6 posibilidades y para la segunda hay 5. Por tanto, la regla del producto nos dice que la respuesta es

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15 \cdot 120$$

□

Problema 7. ¿Cuántas maneras de escribir 10 letras A y 4 letras B existen si las letras B no pueden ir juntas?

Problema 8. En un estante tengo 5 botes idénticos de mermelada de arándanos y 7 botes también idénticos de dulce de leche. ¿Cuántas maneras distintas tengo de ponerlos en fila? (como los botes son idénticos, entenderemos que si intercambiamos dos botes de mermelada, eso nos da lugar a la misma manera de ponerlos en fila).

Ahora vamos a ver un ejemplo en el que hay repeticiones (como en el Problema 6 parte b), pero, que a diferencia del Problema 6 parte b, no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Pablo tiene camisetas en tres colores distintos: 15 rojas, 7 verdes y 6 azules. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir 6 camisetas, si las camisetas del mismo color son indistinguibles entre sí?

Solución. Vamos a representar las camisetas por puntos ($\bullet$) y los cambios de color por barras ($|$), poniendo las camisetas en el siguiente orden de colores: rojo, verde, azul. Así, la secuencia

$$\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet$$

corresponde a 2 camisetas rojas, 3 verdes y 1 azul, y la secuencia

$$\mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet$$

corresponde a 0 camisetas rojas, 2 verdes y 4 azules.

El dato de que Pablo tiene 15 camisetas rojas, 7 verdes y 6 azules sólo nos sirve para darnos cuenta que cualquier fila de 6 puntos y dos barras se corresponde con una elección de camisetas posible para Pablo. Así, contar el número de maneras de escoger 6 camisetas equivale al número de maneras de colocar 6 puntos en 8 huecos de una fila, que es $\binom{8}{6} = \frac{8\cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$. □

Podemos observar que, una vez hemos modelizado el problema anterior con puntos y barras, se convierte a un problema muy similar al Problema 8. Siguiendo un razonamiento parecido usando puntos y barras, responde al siguiente problema.

Ejemplo resuelto. En una pastelería hay 4 tipos de pasteles. ¿Cuántas cajas distintas de 7 pasteles se puede formar?

Solución. Los 4 tipos de pasteles los distinguimos mediante 3 barras separadoras, y los 7 pasteles los representamos por puntos. De una fila de $10 = 3 + 7$ tenemos que elegir los 7 huecos donde va a haber puntos (pasteles), y el resto serán barras. Por tanto, la respuesta es

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

□

El ejercicio anterior se puede interpretar como que nos están preguntando la manera de repartir 7 elementos iguales en 4 grupos distintos (cada uno de los 7 elementos es un pastel, y los grupos corresponden al tipo de pastel). Con esto en mente, completa la siguiente frase:

> El número de formas distintas de poner a n elementos idénticos en k grupos distintos es
>
> __________________________________.

Segunda parte. Funciones generatrices

Si no entiendes esta parte, no pasa nada: pasa a los problemas. Requiere conocimientos que **no** deberías tener. Si tienes los conocimientos, tampoco pasa nada, nadie es perfecto.

Si $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión de números enteros, su **función generatriz** es

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

¿Verdad que sí? No, por supuesto que no. Las sumas infinitas, que yo sepa, no existen. Llamar función a algo que no es una función no es de muy buena educación. Tendría sentido si podemos demostrar que un límite existe.

Definición. Una sucesión $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ se dice que es **de Cauchy** si se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (\forall n_1, n_2 \geq N, |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon).$$

Problema 9. Explica con palabras qué es una sucesión de Cauchy. Haz un dibujo.

Problema 10. ¿Cuáles son de Cauchy?

a) $1, 1, 1, \ldots$.

b) $1, 2, 3, \ldots$.

c) $1, 1/2, 1/3, \ldots$.

d) $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$.

e) $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Definición (Recordatorio)**.** Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Si existe el límite L, decimos que la sucesión es convergente.

Problema 11. Demuestra que si una sucesión tiene límite, entonces es de Cauchy.

Problema 12. Demuestra que si una sucesión es de Cauchy, entonces tiene límite. Pista: Toda sucesión creciente y acotada tiene límite.

Problema 13. Una sucesión de Cauchy de números complejos tiene la misma definición, pero $|a_{n_1} - a_{n_2}|$ denota el módulo. Demuestra que para una sucesión $a_0, a_1 \ldots \in \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) La sucesión es de Cauchy.

b) La sucesión tiene límite.

c) Ambas sucesiones $(\Re a_i)$ y $(\Im a_i)$ son de Cauchy.

d) Ambas sucesiones $(\Re a_i)$ y $(\Im a_i)$ tienen límite.

Ya sabemos todo lo que hay que saber sobre límites. Demostremos que a veces las funciones generatrices convergen.

Problema 14. Sea $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ una sucesión **acotada** de números complejos. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| < 1$, existe el límite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right).$$

Problema 15. Sea $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, y sea $0 < r < 1$. Demuestra que son equivalentes.

i) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que para todo $i \geq N$, $|a_i| < (r - \varepsilon)^{-i}$.

ii) Para todo $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| < r$, existe el límite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right).$$

iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| > r - \varepsilon$ y el límite $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ existe.

Definición. El supremo de los r que cumplen las condiciones del ejercicio anterior se llama **el radio de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Problema 16. ¿Para qué valores de x existe el límite $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$?

Problema 17. Encuentra una fórmula que coincida con las funciones que definen estas series (dentro de su radio de convergencia). (Es decir, encuentra las funciones generatrices de estas sucesiones)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

Operaciones con funciones generatrices

Problema 18. Sean dos series $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$, y sea $r > 0$ tal que ambas tienen radio de convergencia al menos r. Demuestra que la serie $\sum (a_n + b_n)x^n$ tiene radio de convergencia al menos r, y que es igual a $f(x) + g(x)$ (cuando $|x| < r$).

(Recuerda que el límite de la suma es la suma de los límites)

Problema 19. Sea la series $f(x) = \sum a_n x^n$, y sea $r > 0$ su radio de convergencia. Sea $0 \neq c \in \mathbb{C}$. Demuestra que la serie $\sum c_n x^n$ tiene radio de convergencia r, y que es igual a $cf(x)$.

Problema 20. Escribe y demuestra un teorema sobre la resta de series (debería ser muy fácil usando los dos anteriores).

Problema 21. Sean dos series $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$, y sea $r > 0$ tal que ambas tienen radio de convergencia al menos r. Demuestra que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1+m_2=n} a_{m_1} b_{m_2} \right) x^n$$

tiene radio de convergencia al menos r, y que es igual a $f(x) \cdot g(x)$ (cuando $|x| < r$).

Problema sin respuesta. ¿Qué pasa con la división de funciones generatrices? ¿Y la derivada? ¿Y la composición?

Problema 22. Si $b, c \neq 0$, encuentra una serie cuya función generatriz sea

$$\frac{a}{bx + c}$$

Problema 23. Demuestra que la función generatriz de la sucesión de Fibonacci es:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Demuestra que esta función es la suma de dos sucesiones geométricas distintas, y deduce la fórmula para el n-ésimo número de Fibonacci.

Problemas

Problema 24. ¿Cuántos factores de 10^{10} no son factores de 8^{10}?

Problema 25. Tengo a 20 candidatos formando una fila. ¿Cuántas maneras hay de elegir 6 de ellos hay si entre dos candidatos elegidos tiene que haber al menos dos personas?

Problema 26.

a) ¿Cuántas soluciones distintas en los números enteros no negativos tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 30$?

b) ¿Cuántas de ellas satisfacen que $x_2 \geq 2$?

c) ¿Cuántas de ellas satisfacen que $x_2 \geq 2$ y $x_5 \leq 5$?

Problema 27. En la lengua Bombón sólo hay 5 sonidos. Las palabras son exactamente las series de 5 sonidos en las que al menos 2 se repiten. ¿Cuántas palabras hay en su lengua?

Problema 28.

a) ¿Cuántos subconjuntos distintos de tamaño al menos 3 tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

b) Blanca ha pensado en un número del 1 al 99. Amir quiere adivinar el número, y para ello puede hacerle 7 preguntas de sí o no a Blanca. Sin embargo, si Blanca contesta "no" a un total de cuatro preguntas se pondrá muy triste y no podrá responder a ninguna más de las preguntas restantes de Amir. Explica qué estrategia puede seguir Amir para asegurarse de que adivinará el número en el que ha pensado Blanca, sea cual sea ese número.

Problema 29. El PIM tiene n alumnos, que se organizan en clubes según sus intereses: por ejemplo, puede haber un club para los que juegan a baloncesto, otro club para los que les gusta el ajedrez... Cada alumno puede no estar en ningún club, estar en uno o en varios clubes a la vez. No sabemos cuántos clubes hay, pero sí sabemos que para cualesquiera dos clubes, hay al menos un alumno que forma parte de los dos. Dos clubes se consideran el mismo si tienen exactamente los mismos miembros. Determina el número máximo de clubes distintos que puede haber (tu respuesta dependerá de n). *Pista:* ¿Sabrías calcular cuántos clubes distintos podría haber en total si no impusiéramos la condición de que para cualquier par de clubes distintos hay al menos un alumno que forma parte de los dos?

Problema 30. El Ajedrez 960 es una variante del ajedrez. Al comenzar, los peones se colocan como en el ajedrez normal, y las piezas se colocan al azar, siguiendo estas normas.

1. Cada jugador tiene 1 rey, 1 reina, 2 alfiles, 2 caballos y 2 torres.
2. Las piezas blancas y negras están colocadas de manera simétrica (las negras en la 8ª fila, las blancas en la 1ª).
3. El rey está entre las torres.
4. Los alfiles están en casillas de colores opuestos.

¿Cuántas posiciones iniciales posibles hay?

Problema 31. (a) Hemos comprado 3 naranjas y 3 manzanas para desayunar los próximos 6 días. ¿De cuántas formas podemos distribuir las piezas de fruta a los largo de los 10 días si pedimos que siempre nos sobren las mismas o más manzanas que naranjas?

(b) ¿Y si tuviéramos 5 naranjas y 5 manzanas para 10 días? (¡NO escribas/pintes todas las posibilidades!) *Pista:* Intenta usar el número de posibilidades para números menores de piezas.

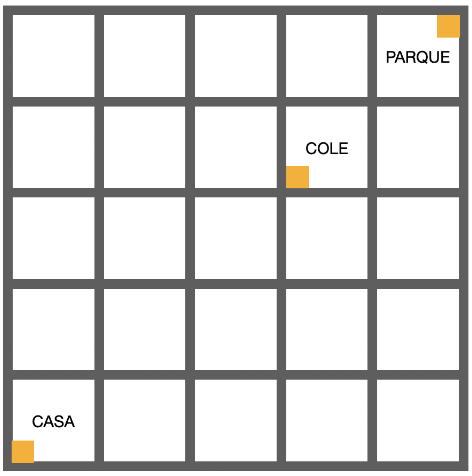
(c) Demuestra que si tenemos n piezas de cada fruta y tenemos que distribuirlas en $2n$ días como anteriormente, el número de posibilidades es

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Pista: Puedes utilizar que para todo $n \geq 1$ se verifica que

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + C_{n-1}C_0.$$

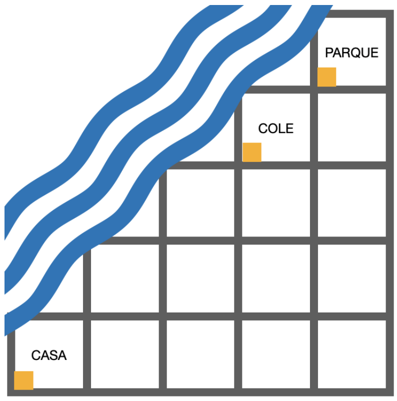
Problema 32. Ana vive en un pueblo donde las calles forman una cuadrícula. Como en su clase hay un niño pesado que insiste en acompañarla hasta el cole, decide elegir cada mañana un camino diferente.



1. ¿Cuántos caminos distintos llevan de su casa al cole? Ana no quiere alejarse del cole, solamente va hacia arriba o hacia la derecha. La esquina coloreada indica dónde está la puerta.

2. ¿Cuántos caminos distintos llevan de su casa hasta el parque? Igualmente, sólo puede ir hacia arriba o a la derecha.

3. ¿Cuántas opciones tiene si en realidad vive en un pueblo costero con el mar como se muestra en el siguiente mapa?



Problema 33. Para el concurso de claves secretas Teresa ha elaborado una caja fuerte con 6 ruedas, cada una tenía 30 posiciones distintas y solamente una combinación de 6 ruedas abría la caja fuerte. Yolanda lo ha hecho al revés: su caja fuerte tenía 30 ruedas con 6 posiciones para cada rueda. Zuleica, en cambio, ha presentado una caja fuerte con 90 interruptores, y había que adivinar la única combinación de interruptores (que tenían solamente 2 posiciones, encendido o apagado) que abría la caja. ¿Qué código es el más fuerte y cuál es el más flojo?

Problema 34. En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y lo ha dejado en un mismo paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria. ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que nadie se quede con el suyo?

Problema 35. Andrea es alumna del IES Combinaciones, y su clase tiene 30 alumnos. Su profesor de educación física quiere elegir a 5 alumnos de clase de Andrea para formar un equipo de baloncesto y que jueguen contra equipos de otras clases y de otros cursos en la liga interna.

a) ¿De cuántas maneras puede el profesor de Andrea hacer el equipo de manera que Andrea forme parte del equipo?

b) ¿De cuántas maneras puede el profesor de Andrea hacer el equipo de manera que Andrea no forme parte del equipo?

c) Demuestra que, para todo par de números enteros n, k tales que $0 \leq k < n$, se cumple que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pista: El caso $n = 29$ y $k = 4$ tiene que ver con las partes a) y b).

Problema 36. A Pablo le encanta jugar a los trenes. Tiene un juego de 12 vagones de forma idéntica pero de varios colores. No sabemos cuántos vagones de cada color hay. Pablo cree que si hace trenes con los 12 vagones, habrá más combinaciones que si hace trenes con 11 vagones. ¿Tiene razón?

Problema 37. En un estante hay 10 volúmenes numerados de una enciclopedia. María ha desordenado todos los volúmenes y ahora reta a su hermana mayor a ver si puede ordenarlos si solamente se permite intercambiar los tomos entre los que hay 4 volúmenes o más. Demuestra que la hermana puede hacerlo en como mucho 25 operaciones.

Problema 38. Tenemos 20 canicas de 10 colores distintos, 2 por cada color. Se colocan en 10 cajas de tal manera que de cada caja se puede sacar una canica y tener un conjunto de diez colores distintos. Demuestra que la cantidad de maneras de hacerlo es una potencia de 2.

Problema 39. El detective Nero Wolfe está investigando un crimen. 100 personas están involucradas en el caso, entre las cuales una es el delincuente, otra es el único testigo del crimen (pero no se sabe quién es). Todos los días, el detective puede invitar a una o más de estas 100 personas a su lugar, y si hay el testigo entre los invitados, pero no está el delincuente, entonces el testigo dirá quién es el criminal. ¿Puede el detective resolver este caso en 9 días?

Problema 40. En una caja hay dos cajas más pequeñas, en cada una de ellas hay otras dos cajas y así sucesivamente n veces. En cada una de las 2^n últimas cajas hay una moneda, algunas marcan cara y otras, cruz. En un movimiento se permite voltear cualquier caja junto con todo lo que contiene. Demuestra que en como máximo n movimientos se pueden disponer las cajas de manera que el número de caras sea igual al de cruces.

Problema 41. En la esquina de un tablero de ajedrez de tamaño $n \times n$ casillas hay una torre. ¿Para qué valores de n puede la torre, alternando movimientos horizontales y verticales, visitar todas las casillas del tablero en n^2 movimientos y regresar a su posición inicial? Solo se cuentan las casillas en las que la torre se detiene, no aquellas sobre las que pasa durante un movimiento. Cada movimiento horizontal debe ser seguido por uno vertical, y cada movimiento vertical debe ser seguido por uno horizontal.

Problema 42. Tenemos un panel con varias bombillas, algunas de las cuales están encendidas, y varios botones. Al pulsar cada botón las bombillas conectadas a él cambian de estado: las que estaban apagadas se encienden, y las que estaban encendidas, se apagan. Sabemos que para cualquier grupo de bombillas hay un botón conectado con un número impar de bombillas de este grupo. Demuestra que existe una combinación de botones que apaga todas las bombillas.

Problema 43. Denotemos por $S(n, k)$ el número de coeficientes no divisibles por k en el desarrollo del polinomio $(x + 1)^n$.

1. Halla $S(2012, 3)$.

2. Prueba que $S(20122011, 2011)$ es divisible por 2012.

Problema 44. Unos geólogos llevaron a una expedición 80 latas de conserva, cuyos pesos son todos conocidos y diferentes y, además, están apuntados en una lista. Después de algún tiempo, las etiquetas en las latas se volvieron ilegibles, y solo el intendente sabe qué hay en cada una. Tiene que demostrárselo a todos (es decir, justificar qué hay en cada lata) sin abrir las conservas y usando sólo la lista conservada y una balanza de dos platillos con una aguja que muestra la diferencia de pesos. Demuestra que para conseguirlo

1. cuatro pesajes son suficientes;

2. tres pesajes son insuficientes.

Problema 45. Un multiconjunto es una lista no ordenada de elementos que pueden estar repetidos. Decimos que un multiconjunto de números enteros mayores o iguales que 2 es una *partición multiplicativa* de un número x si la multiplicación de todos los elementos del multiconjunto es x. Para todo entero positivo n, sea $f(n)$ el número distinto de particiones multiplicativas de n. Por ejemplo, el multiconjunto $\{2, 2, 2, 3, 30\}$ es una partición de división de 720, y se puede comprobar que $f(100) = 9$. Demuestra que $f(10^{10}) + f(40^5) + f(250^5) < \left(\frac{5}{2}\right)^{19}$.

Problemas para hacer en casa

7 de marzo

Problema 46. Llamemos una palabra "limpia" si ningún fragmento suyo aparece repetido uno al lado del otro. Por ejemplo, la palabra "zanahoria" es una palabra limpia, mientras que "patata" no lo es. ¿Existe una palabra limpia tal que, al añadir cualquier letra al final deja de serlo?

Problema 47. Julia se toma 2 piezas de fruta de almuerzo en el colegio. Su hermana mayor le tiene preparados 2 plátanos, 3 peras y 5 manzanas. ¿Cuántas maneras distintas de distribuir toda esta fruta durante una semana (de lunes a viernes) tiene Julia? En un día puede comerse tanto dos frutas distintas como dos frutas iguales.

Problema 48. Una nueva pieza de ajedrez blanca "escarabajo" está ubicada en una esquina del tablero de $1000 \times n$, donde n es un número natural impar mayor que 2020. En las dos esquinas más cercanas del tablero hay dos alfiles negros de ajedrez. En cada movimiento, el escarabajo puede moverse a una casilla adyacente (que comparte un lado), o moverse como un caballo de ajedrez. El escarabajo quiere alcanzar la esquina opuesta del tablero sin pasar por las casillas ocupadas o atacadas por un alfil y visitando cada una de las casillas restantes exactamente una vez. Prueba que el número de caminos posibles que puede tomar el escarabajo no depende de n.

14 de marzo

Problema 49. En un estante hay 10 volúmenes numerados de una enciclopedia. María ha desordenado todos los volúmenes y ahora reta a su hermana mayor a ver si puede ordenarlos si solamente se permite intercambiar los tomos entre los que hay 4 volúmenes o más. Demuestra que la hermana puede hacerlo en como mucho 25 operaciones.

Problema 50. Ocho alumnos resolvían 8 problemas. Resulta que cada problema fue resuelto por 5 alumnos. Demuestra que hay dos alumnos tales que entre los dos resolvieron todos los problemas.

Problema 51. En un grupo de 12 personas, entre cualquier conjunto de nueve se pueden encontrar cinco que se conocen mutuamente. Prueba que en este grupo se pueden encontrar seis personas que se conocen mutuamente.