PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 21 de febrero, 7 y 14 de marzo
Combinatoria
Grupo: Neptuno y Marte (Soluciones)

La combinatoria es el arte de contar. Averiguar cuántos objetos se ajustan a determinadas características puede no ser fácil. En esta hoja presentamos ideas y conceptos básicos de combinatoria. Estos conceptos nuevos se van a exponer en una serie de ejemplos resueltos y ejercicios en la introducción de la hoja (hasta el bloque gris que hay después del Problema 9), así que **es muy importante que leáis y entendáis las soluciones a todos los ejemplos resueltos y que resolváis todos los ejercicios en orden de aparición en la introducción.**

Si os atascáis en cualquier cosa, pedid ayuda a vuestros compañeros o a vuestros profesores, pero no avancéis sin haber entendido lo anterior. Si ya estabais en el PIM el año pasado, la mayoría de ejercicios de la introducción ya estaban en la hoja de combinatoria del año pasado, pero conviene que los volváis a leer con cuidado para aseguraros de que recordáis estos conceptos.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con un alfabeto de 27 letras? Las palabras no tienen por qué significar nada en ningún idioma, por "palabra" vamos a entender una lista ordenada de letras.

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 27 posibilidades para escoger la segunda letra y teniendo dos letras hay 27 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, hay $27 \cdot 27 \cdot 27 = 19683$ palabras de tres letras con un alfabeto de 27 letras. □

En este ejemplo hemos usado la **la regla de producto**:

Regla del producto

Si un objeto A se puede escoger de m maneras y después de cada elección de este tipo, un objeto B se puede escoger de n maneras, entonces se puede escoger una pareja (A, B) de $m \cdot n$ maneras.

En el ejemplo anterior los objetos que teníamos que elegir eran letras, los elegíamos en orden, y para cada uno que elegíamos teníamos 27 posibilidades. Veamos un ejemplo un poco distinto en el que también se aplica la regla del producto.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con un alfabeto de 27 letras, si imponemos que todas las letras de la palabra tienen que ser distintas?

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 26 posibilidades para escoger la segunda letra (porque no podemos repetir letras) y habiendo elegido ya dos letras, quedan 25 posibilidades para la última letra. Por lo tanto, la regla del producto nos da que hay $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$ palabras de tres letras sin ninguna letra repetida con un alfabeto de 27 letras. □

Problema 1. a) ¿Cuántos números de tres cifras hay que tengan todas sus cifras impares?

b) ¿Cuántos números de tres cifras hay que tengan todas sus cifras pares?

Solución. a) Para cualquiera de los tres dígitos tenemos 5 opciones: $1, 3, 5, 7, 9$. Por tanto, la respuesta es $5^3 = 125$

b) Ahora tenemos 5 opciones para unidades y decenas, sin embargo, para centenas no podemos usar el 0. La respuesta es $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

$\square$

Problema 2. ¿De cuántas maneras distintas puedes poner a 18 alumnos en fila? ¿Y a 100 alumnos?

Solución. Para poner a 18 alumnos en fila, hay 18 posibilidades para el primero, 17 para el segundo, 16 para el tercero... así hasta una posibilidad para el último. La regla del producto nos dice que la respuesta es

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Este número es demasiado grande como para escribirlo. Para 100 alumnos, el mismo argumento nos dice que la respuesta es

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$\square$

Vamos a explicar una notación nueva para que sea más fácil escribir la respuesta de problemas como el ejercicio anterior.

El factorial de un número

Definición. Si n es un número entero positivo, entonces llamamos "**n factorial**" (y lo denotamos por **n**!) al número

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

También diremos que $0! = 1$, aunque no se ajuste a la definición que acabamos de dar.

Problema 3. Con la definición anterior en mente, completa las siguiente frases, en las que $n \geq k \geq 1$:

- El número de formas distintas de poner a n alumnos distintos en fila es ______________.
- El número de palabras distintas de k letras que se pueden formar con un alfabeto de n letras en las que todas las letras son distintas es ____.

  Este número se puede expresar como una fracción usando factoriales de la siguiente manera:

  ____

Antes de continuar con la hoja, asegúrate de que tus respuestas en el bloque gris anterior son correctas preguntándole a uno de los profesores.

Las preguntas que hemos hecho hasta ahora tenían en cuenta el orden. Por ejemplo, las palabra de tres letras "res", "ser" y "ers" son tres palabras distintas, a pesar de estar formadas por las mismas tres letras. Veamos un ejemplo de una pregunta parecida en la que no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Adrián tiene un total de 15 camisetas, y se va a ir de vacaciones. Quiere meter en la maleta un total de 7 camisetas. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Solución. Aquí no nos importa el orden en el que escogemos las camisetas, sino cuáles escogemos. Tenemos que escoger 7 camisetas de entre 15. Si nos importara el orden, tendríamos 15 posibilidades para la primera camiseta, 14 para la segunda... así hasta $15 - 7 + 1 = 9$ posibilidades para la séptima. Por tanto, si nos importara el orden, la respuesta sería

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!}.$$

Sin embargo, como no nos importa el orden, hay varias de estas elecciones (en la que importa el orden de las camisetas) que nos dan lugar a la misma elección de 7 camisetas. Más concretamente, para cada elección de 7 camisetas, hay 7! maneras de ponerlas en fila, por lo que cada elección de 7 camisetas la estamos contando 7! veces distintas en el cálculo de $\frac{15!}{8!}$. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{\frac{15!}{8!}}{7!} = \frac{15!}{7!8!} = 6435.$$

$\square$

Problema 4. Cada equipo de baloncesto tiene 5 personas. ¿Cuántas maneras de formar 2 equipos hay si tenemos

a) a 10 personas?

b) a 12 personas?

Solución. a) Tenemos que elegir a 5 alumnos de entre esos 10 para formar un equipo, y automáticamente los 5 restantes formarán el otro equipo. Argumentando como en el ejemplo anterior de Adrián y las camisetas, vemos que hay

$$\frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!}$$

formas en las que podemos escoger a 5 alumnos en orden. Como no le importa el orden de los alumnos a la hora de formar un equipo, tenemos que dividir esta cantidad por 5! para obtener que la cantidad de equipos distintos de 5 personas que podemos hacer con 10 alumnos es

$$\frac{\frac{10!}{5!}}{5!} = \frac{10!}{5!5!}.$$

Sin embargo, buscamos las maneras que tenemos para hacer dos equipos de 5. Por cada equipo de 5 que hacemos, los 5 restantes forman el otro equipo. Por tanto, cada posibilidad de dos equipos la estamos contando dos veces en la cantidad $\frac{10!}{5!5!}$, y la respuesta final al problema es

$$\frac{\frac{10!}{5!5!}}{2} = \frac{10!}{5!5!2} = 126$$

b) Argumentando como en la parte anterior, tenemos $\frac{12!}{5!(12-5)!}$ maneras de elegir el primer equipo, $\frac{7!}{5!(7-5)!}$ maneras de elegir el segundo equipo, y como no nos importa el orden de los equipos, la solución es $\frac{\frac{12!}{5!(12-5)!}\cdot\frac{7!}{5!(7-5)!}}{2} = 8316$.

$\square$

Problema 5. Repite el razonamiento de la solución del ejemplo resuelto anterior para justificar que el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Solución. Si nos importara el orden, sabemos por el anterior bloque gris que la respuesta sería $\frac{n!}{(n-k)!}$. Sin embargo, como no nos importa el orden, cada manera de escoger k elementos la estamos contando $k!$ veces (tantas como maneras de poner k elementos en fila). Por tanto, la respuesta es $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$\square$

Como el ejercicio anterior lo vamos a usar muchísimo, vamos a darle un nombre a su respuesta:

Números combinatorios $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

Definición. Si n es un número entero positivo, y k es un número entero tal que $0 \leq k \leq n$, llamamos "**n sobre k**" (y lo denotamos por $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$) al número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es decir, $\binom{n}{k}$ es simplemente una manera abreviada de escribir $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. El motivo por el que los números combinatorios son importantes es el siguiente, como hemos visto en el Problema 5,:

> El número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\binom{n}{k}$.

Si $k = 0$ esta fórmula también tiene sentido, ya que el número de maneras de escoger 0 elementos de entre n es 1 (hay una manera, no escoger nada), y

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Problema 6. En este ejercicio, una palabra es una lista ordenada de letras sin espacios entre medio. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas palabras distintas de siete letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *NUMEROS*?

b) ¿Cuántas palabras distintas de once letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *MATEMATICAS*? Date cuenta de que algunas letras están repetidas.

c) ¿De cuántas maneras puedes formar dos palabras, una de tres letras y otra de dos, usando las letras de la palabra *NUMERITOS* sin repetir ninguna letra?

Solución. a) La palabra *NUMEROS* tiene 7 letras, todas distintas. Por tanto, nos están perguntando por el número de formas que hay de poner 7 elementos distintos en fila, que es

$$7! = 5040$$

b) Si todas las letras fueran distintas, la respuesta sería 11!. Podemos imaginarnos que lo son, por ejemplo, pintando una M de rojo y otra de azul, una T de rojo y otra de azul, y una A de rojo, otra de azul y otra de verde. Cada posible respuesta de entre las 11! la estamos contando $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos M's son idénticas, $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos T's son idénticas, y $3! = 6$ veces si pasamos a considerar que las A's son idénticas. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{11!}{2!2!3!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.663.200$$

c) La palabra *NUMERITOS* tiene 9 letras, todas ellas distintas. Elegimos las letras en este orden: primero las de la palabra de 3 letras, de la primera a la última, y luego de la palabra de 2 letras, de la primera a la última. Para la primera letra de la palabra de 3 letras hay 9 posibilidades, para la segunda hay 8, para la tercera hay 7. Para la primera letra de la palabra de 2 letras hay 6 posibilidades y para la segunda hay 5. Por tanto, la regla del producto nos dice que la respuesta es

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$

□

Problema 7. ¿Cuántas maneras de escribir 10 letras A y 4 letras B existen si las letras B no pueden ir juntas?

Solución. Coloquemos primero las letras A. Las letras B pueden ir en cualquiera de los 11 huecos que hay (incluido el hueco de delante de todas y el de detrás de todas). Por tanto, hay $\binom{11}{4} = 330$ maneras de colocación. □

Problema 8. En un estante tengo 5 botes idénticos de mermelada de arándanos y 7 botes también idénticos de dulce de leche. ¿Cuántas maneras distintas tengo de ponerlos en fila? (como los botes son idénticos, entenderemos que si intercambiamos dos botes de mermelada, eso nos da lugar a la misma manera de ponerlos en fila).

Solución. Tenemos que elegir 5 (o 7) huecos de entre $5 + 7 = 12$ huecos posibles, por lo que la respuesta es $\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792$. $\square$

Ahora vamos a ver un ejemplo en el que hay repeticiones (como en el Problema 6 parte b), pero, que a diferencia del Problema 6 parte b, no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Pablo tiene camisetas en tres colores distintos: 15 rojas, 7 verdes y 6 azules. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir 6 camisetas, si las camisetas del mismo color son indistinguibles entre sí?

Solución. Vamos a representar las camisetas por puntos ($\bullet$) y los cambios de color por barras ($|$), poniendo las camisetas en el siguiente orden de colores: rojo, verde, azul. Así, la secuencia

$$\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet$$

corresponde a 2 camisetas rojas, 3 verdes y 1 azul, y la secuencia

$$\mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet$$

corresponde a 0 camisetas rojas, 2 verdes y 4 azules.

El dato de que Pablo tiene 15 camisetas rojas, 7 verdes y 6 azules sólo nos sirve para darnos cuenta que cualquier fila de 6 puntos y dos barras se corresponde con una elección de camisetas posible para Pablo. Así, contar el número de maneras de escoger 6 camisetas equivale al número de maneras de colocar 6 puntos en 8 huecos de una fila, que es $\binom{8}{6} = \frac{8\cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$. $\square$

Podemos observar que, una vez hemos modelizado el problema anterior con puntos y barras, se convierte a un problema muy similar al Problema 8. Siguiendo un razonamiento parecido usando puntos y barras, responde al siguiente problema.

Problema 9. En una pastelería hay 4 tipos de pasteles. ¿Cuántas cajas distintas de 7 pasteles se puede formar?

Solución. Los 4 tipos de pasteles los distinguimos mediante 3 barras separadoras, y los 7 pasteles los representamos por puntos. De una fila de $10 = 3 + 7$ tenemos que elegir los 7 huecos donde va a haber puntos (pasteles), y el resto serán barras. Por tanto, la respuesta es

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

$\square$

El ejercicio anterior se puede interpretar como que nos están preguntando la manera de repartir 7 elementos iguales en 4 grupos distintos (cada uno de los 7 elementos es un pastel, y los grupos corresponden al tipo de pastel). Con esto en mente, completa la siguiente frase:

> El número de formas distintas de poner a n elementos idénticos en k grupos distintos es
>
> ____________________________________.

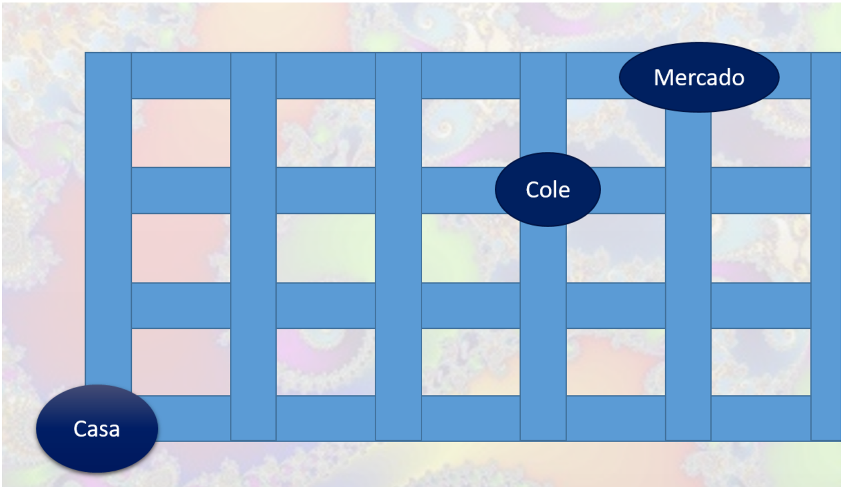
Muchos de los problemas de esta hoja se pueden resolver aplicando los conceptos explicados hasta ahora, así que **asegúrate de haber entendido todos los ejercicios anteriores bien antes de continuar**, y si no pide ayuda a tus compañeros o a tus profesores. Tu grupo puede resolver los demás problemas de la hoja en el orden que queráis, aunque siempre recomendamos ir en orden.

Problemas

Problema 10. Ana vive en un pueblo donde las calles forman una cuadrícula. Como en su clase hay un niño pesado que insiste en acompañarla hasta el cole, decide elegir cada mañana un camino diferente.

1. ¿Cuántos caminos distintos llevan de su casa al cole? Ana no quiere alejarse del cole, solamente va hacia arriba o a la derecha.

2. ¿Cuántos caminos distintos llevan de su casa hasta el mercado? Igualmente, sólo puede ir hacia arriba o a la derecha.



Solución. Vamos a llamar el movimiento hacia arriba A y el movimiento a la derecha, D. En el caso del cole, Ana tiene que realizar 3 movimientos a la derecha y 2 arriba, siempre 5 en total. En el caso del mercado, son 4 Ds y 3 As.
Si has resuelto el problema de colocar 2 botes de Arándanos y 3 botes de Dulce de leche, te puedes dar cuenta de que son idénticos. En el primer caso, hay que elegir 2 de 5, en el segundo, 3 de 7, por lo que las respuestas son

1. $\binom{5}{2} = 10$

2. $\binom{7}{3} = 35$

□

Problema 11. ¿Cuántos factores de 10^{10} no son factores de 8^{10}?

Solución. La descomposición en factores primos de los factores de 10^{10} es $2^n \cdot 5^m$, donde $0 \leq n \leq 10$ y $0 \leq m \leq 10$. La descomposición en factores primos de los factores de 8^{10} es 2^k, donde $0 \leq k \leq 30$. Por tanto, los factores de 10^{10} que no son factores de 8^{10} son del tipo $2^n \cdot 5^m$, donde $0 \leq n \leq 10$ y $1 \leq m \leq 10$. Por tanto, la respuesta es $11 \cdot 10 = 110$. □

Problema 12. Tengo a 20 candidatos formando una fila. ¿Cuántas maneras de elegir 6 de ellos hay si entre dos candidatos elegidos tiene que haber al menos dos personas?

Solución. Vamos a colocar mentalmente un tabique delante de cada persona seleccionada. Entonces entre dos tabiques tiene que haber al menos 3 personas. Las restantes $20 - 3 \cdot 5 - 1 = 4$ personas tienen que estar distribuidas entre los 7 huecos que hay. El problema ahora es equivalente a distribuir 4 bolas entre 7 huecos, para ello crearemos una tira de 10 casillas y marcaremos 6 de ellas (que separarán los huecos). Habrá $\binom{10}{6} = 210$ combinaciones.

□

Problema 13. María tiene 5 amigos: Alberto, Boris, Carlos, Daniela y Elena. Todos los días invita a algunos de ellos sin que ningún grupo de amigos se repita tal cual. Por ejemplo, un día invita a Alberto y a Daniela. Otro día invita a todos. Otro día, sólo a Carlos. ¿Durante cuántos días puede hacerlo? ¿Cómo cambiará la respuesta si en vez de 5 amigos tiene a 10?

Solución. Este problema se puede abordar como suma de numeros combinatorios

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=31$$

Pero es más fácil ver que cada amigo o es invitado o no es invitado, por tanto, cada grupo de amigos equivale a una tira de 5 bits. En total habría 2^5 combinaciones de lo que habrá que restar la tira vacía, que corresonde a no invitar a nadie. La respuesta al primer problema, por tanto, es 31, y al segundo, $2^{10}-1=1023$.

□

Problema 14. a) ¿Cuántas soluciones distintas en los números enteros no negativos tiene la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30$?

b) ¿Cuántas de ellas satisfacen que $x_2 \geq 2$?

c) ¿Cuántas de ellas satisfacen que $x_2 \geq 2$ y $x_5 \leq 5$?

Solución. a) El problema equivale a las maneras de poner 30 puntos y 5 barras en fila. Las barras simbolizan el cambio de variable, y la cantidad de puntos seguidos simboliza el valor de la variable correspondiente. Por tanto, la solución es

$$\binom{35}{5}=\frac{35!}{30!5!}=\frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=7\cdot 34\cdot 11\cdot 4\cdot 31=324632.$$

b) Esto es lo mismo que hallar el número de soluciones enteras no negativas de $x_1+\tilde{x_2}+x_3+x_4+x_5+x_6=28$, donde $\tilde{x}_2=x_2-2$. Por tanto, la solución es

$$\binom{33}{5}=237336.$$

c) A la solución a la parte anterior, tenemos que restarle las soluciones que cumplen que $x_5 \geq 6$. De esas hay

$$\binom{27}{5}=80730,$$

por lo que la solución es $237336-80730=156606$.

□

Problema 15. Una escalera tiene 7 peldaños. Marta baja la escalera saltando de vez en cuando unos cuantos peldaños (2,3,... incluso los 7). Por ejemplo, 1–1–3–1 − 1, o 2–2–3. ¿Cuántas formas de bajar la escalera tiene?

Solución. Podemos notar que para una determinada manera de bajar la escalera cada peldaño es pisado o no, menos el último, que es pisado siempre. Por tanto, la respuesta es $2^6=64$ maneras.

□

Problema 16. En un tablero de ajedrez, ¿cuántas formas hay de colocar 8 torres de modo que no se amenacen? En el tablero todas las casillas están numeradas, así que no es lo mismo colocar una torre en la casilla $a1$ que en la $a8$, por ejemplo.

Solución. Claramente, las torres deben ocupar distintas filas y columnas. A cada colocación de las torres le corresponde la siguiente permutación de 8 números: la columna de la torre que ocupa la primera fila, la columna de la torre que ocupa la segunda,... y así hasta la columna de la torre que ocupa la última fila. Por tanto, hay 8! permutaciones.

□

Problema 17. En la lengua Bombón sólo hay 5 sonidos. Las palabras son exactamente las series de 5 sonidos en las que al menos 2 se repiten. ¿Cuántas palabras hay en su lengua?

Solución. Es más fácil calcular las no-palabras, donde ningún sonido se repite. Son $5! = 120$. Todas las combinaciones de 5 sonidos son 5^5, por lo que la respuesta es $5^5 - 5! = 3005$.

□

Problema 18. Un repartidor de Amazon debe repartir 15 pedidos en 15 pueblos distintos. Empieza en uno de los destinos y vuelve a dejar allí la furgoneta al final del día. El ordenador de la central calcula todas las rutas esencialmente diferentes (que no miden lo mismo) para ver cuál es la ruta más rápida. Si calcular cada ruta le lleva un microsegundo (una millonésima parte de un segundo), ¿cuánto tiempo necesita para calcularlas todas?

Solución. Una ruta circular es una permutación de los 15 destinos, por lo que hay 15! rutas que parecen distintas. Pero no todas lo son. Como la ruta es circular, da igual en qué pueblo empezar a hacerla, así que en realidad hace falta ver $15! : 15 = 14!$ permutaciones. Además, da igual la dirección en que se realiza la ruta, lo que supone que tenemos que ver la mitad de las permutaciones, $14! : 2 = 43589145600$. El ordenador de la central tardaría algo más de 5 días en calcularlas todas.

□

Problema 19. El Rey Arturo quiere colocar a 6 caballeros en torno a la Mesa Redonda. ¿Cuántas maneras de hacerlo tiene? Las maneras se consideran idénticas si tienes a tu derecha a la misma persona, y tu vecino de la izquierda también es el mismo.

Solución. Si los caballeros estuviesen formando una fila india, habría $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ maneras. Pero el caso es que la mesa es redonda y girar a los caballeros una o varias sillas en dirección de las agujas del reloj no cambia la disposición de los vecinos. Por tanto, por cada manera de sentar a los caballeros hay 6 permutaciones distintas que le corresponden, de modo que maneras distintas hay $6! : 6 = 5! = 120$.

□

Problema 20. ¿Hay más números de 6 cifras distintas que contienen un 9 o los que no lo contienen?

Solución. Contemos primero la cantidad de números de 6 cifras distintas. Son $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136080$. Ahora contemos los que no tienen ningún 9, son $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 53760$. Los que tienen algún 9 son $136080 - 53760 = 82320$, bastantes más.

□

Problema 21. Para el concurso de claves secretas Teresa ha elaborado una caja fuerte con 6 ruedas, cada una tenía 30 posiciones distintas y solamente una combinación de 6 ruedas abría la caja fuerte. Yolanda lo ha hecho al revés: su caja fuerte tenía 30 ruedas con 6 posiciones para cada rueda. Zuleica, en cambio, ha presentado una caja fuerte con 90 interruptores, y había que adivinar la única combinación de interruptores (que tenían solamente 2 posiciones, encendido o apagado) que abría la caja. ¿Qué código es el más fuerte y cuál es el más flojo?

Solución. El código de Teresa tiene $30^6 = 10^6 \cdot 3^6 < 10^9$ combinaciones (nota que $3^3 = 27, 3^6 < 30 \cdot 30 < 1000$).
El código de Yolando tiene 6^{30} combinaciones. Para compararlos, notemos que $6^4 = 36^2 > 1000$ por lo que $6^{30} = (6^4)^7 \cdot 36 > 36 \cdot 10^{21}$, por lo que es claramente mejor.
El código de Zuleica no parece gran cosa, pero $2^{90} = (2^3)^{30} > 6^{30}$ y es el ganador.

□

Problema 22. Bea tiene un precioso collar hecho de 15 perlas distintas. Lo quiere cortar en 5 partes. ¿Cuántas maneras de hacerlo existen?

Solución. Tenemos 15 lugares de corte posibles (detrás de cada perla) de los cuales hay que elegir 5. La respuesta es $\binom{15}{5}$. $\square$

Problema 23. En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y lo ha dejado en un mismo paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria. ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que nadie se quede con el suyo?

Solución. O bien dos personas se intercambian sus paraguas a pares, o se pueden reordenar las personas de manera que la primera se queda el paraguas de la segunda, que se queda el paraguas de la tercera, que se queda el paraguas de la cuarta, que se queda el paraguas de la primera. Hay $\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$ maneras de intercambiarse paraguas a pares, y 3! maneras de lo otro (tener un ciclo de longitud cuatro). Por tanto, la respuesta es $3 + 3! = 9$. $\square$

Problema 24.

a) Tenemos 8 bombillas en fila. Cada una de ellas puede o no estar encendida. ¿De cuántas maneras distintas puede pasar esto?

b) Demuestra que, para todo número entero positivo N,

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + ... + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N} = 2^N.$$

Pista: Si $N = 8$, esto tiene que ver con la parte a).

Solución.

a) Cada bombilla puede estar encendida o no, por lo que la respuesta es 2^8.

b) Considera una fila de N bombillas. Elegir unas cuantas bombillas de esta fila es encenderlas. En total, hay 2^N maneras de encender las bombillas, porque cada una puede estar encendida o apagada. Por otro lado, cada combinación de k bombillas encendidas está contabilizada en $\binom{N}{k}$. Como todas las maneras de encender las bombillas es la suma de maneras de no encender ninguna, encender una, encender dos,..., encender N, el enunciado queda demostrado.

$\square$

Problema 25. Andrea es alumna del IES Combinaciones, y su clase tiene 30 alumnos. Su profesor de educación física quiere elegir a 5 alumnos de clase de Andrea para formar un equipo de baloncesto y que jueguen contra equipos de otras clases y de otros cursos en la liga interna.

a) ¿De cuántas maneras puede el profesor de Andrea hacer el equipo de manera que Andrea forme parte del equipo?

b) ¿De cuántas maneras puede el profesor de Andrea hacer el equipo de manera que Andrea no forme parte del equipo?

c) Demuestra que, para todo par de números enteros n, k tales que $0 \leq k < n$, se cumple que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pista: El caso $n = 29$ y $k = 4$ tiene que ver con las partes a) y b).

Solución.

a) El profesor tiene que elegir a los 4 integrantes del equipo que no son Andrea entre los 29 alumnos que no son Andrea. Por tanto, la solución es $\binom{29}{4} = 23751$.

b) El profesor tiene que elegir a los 5 integrantes del equipo que no son Andrea entre los 29 alumnos que no son Andrea. Por tanto, la solución es $\binom{29}{5} = 118755$.

c) Ahora supongamos que la clase de Andrea tiene $n+1$ alumnos y que los equipos son de $k+1$ alumnos. El profesor puede hacer $\binom{n+1}{k+1}$ equipos distintos: de ellos, $\binom{n}{k}$ tienen a Andrea como una de sus integrantes, y $\binom{n}{k+1}$ no tienen a Andrea entre sus integrantes. Por tanto,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Problema 26. Julia se toma 2 piezas de fruta de almuerzo en elcolegio. Su hermana mayor le tiene preparados 2 plátanos, 3 peras y 5 manzanas. ¿Cuántas maneras distintas de distribuir toda esta fruta durante una semana (de lunes a viernes) tiene Julia? En un día puede comerse tanto dos frutas distintas como dos frutas iguales.

Solución. Empecemos por los plátanos. Supongamos que no quiere repetirlos el mismo día. Entonces hay $\binom{5}{2}$ maneras de distribuirlos entre los 5 días de la semana. Pasemos a las peras: pueden darse 4 casos distintos. Si cada día que come un plátano, come también una pera, hay 3 maneras. Si junta pera y plátano un día, hay $3 \cdot 2 = 6$ maneras. Si no junta plátanos y peras, puede no juntar plátanos (1 única manera) o juntar dos (6 maneras porque hay 3 días para elegir paraja de plátanos y quedan 2 para elegir un plátano solo). En total, hay

$$\binom{5}{2} \cdot (3+6+6+1) = 160$$

maneras.
Ahora bien, si decide comerse ambos plátanos el mismo día, puede hacerlo cualquiera de los 5 días de la semana. Si junta dos plátanos, hay $4 \cdot 3 = 12$ maneras de hacerlo (4 días para la pareja y quedan 3 para el plátano solo). Si no los junta, tiene que elegir un día de 4 que no come plátanos, lo que nos da 4 maneras. En total este caso nos aporta

$$5 \cdot (12+4) = 80$$

maneras. La respuesta final es $160 + 80 = 240$ maneras de organizar parejas de fruta.

□

Problema 27. Magda tiene 18 muñecas distintas. Su hermana le pide que le preste algún número par de muñecas. ¿Cuántas maneras de hacerlo hay? Simplifica tu respuesta usando las últimas partes de los Problemas 24 y 25

Solución. Se trata de sumar

$$\binom{18}{2} + \binom{18}{4} + \binom{18}{6} + ... + \binom{18}{18}.$$

Tenemos que $\binom{18}{2k} = \binom{17}{2k-1} + \binom{17}{2k}$ para todo $k = 1, \ldots, 8$, por lo que

$$\begin{aligned} \binom{18}{2} + \binom{18}{4} + \binom{18}{6} + ... + \binom{18}{18} &= \binom{17}{1} + \binom{17}{2} + \binom{17}{3} + \binom{17}{4} + \ldots + \binom{17}{15} + \binom{17}{16} + \binom{18}{18} \\ &= \left(\binom{17}{0} + \binom{17}{1} + \ldots + \binom{17}{17}\right) + \binom{18}{18} - \binom{17}{0} - \binom{17}{17} \\ &= 2^{17} + 1 - 1 - 1 = 2^{17} - 1. \end{aligned}$$

□

Problema 28. A Pablo le encanta jugar a los trenes. Tiene un juego de 12 vagones de forma idéntica pero de varios colores. No sabemos cuántos vagones de cada color hay. Pablo cree que si hace trenes con los 12 vagones, habrá más combinaciones que si hace trenes con 11 vagones. ¿Tiene razón?

Solución. Se equivoca, hay las mismas. Considera dos trenes distintos de 12 vagones. Si los últimos vagones son idénticos, basta quitarlos y tendremos dos trenes distintos de 11 vagones. Si los últimos vagones son distintos, al quitarlos también tendremos dos trenes distintos. ya que al eliminar dos elementos distintos de un juego de 12 vagones, los resultados serán distintos. Hemos construido una inyección del conjunto de trenes de 12 vagones al de trenes de 11, por lo que hay al menos tantas maneras de crear trenes de 11 vagones como de 12. De hecho, hay las mismas, ya que para todo tren de 11 vagones, hay un único tren de 12 vagones tal que el tren inicial de 11 es el formado por sus 11 primeros vagones. □

Problema 29. En un estante hay 10 volúmenes numerados de una enciclopedia. María ha desordenado todos los volúmenes y ahora reta a su hermana mayor a ver si puede ordenarlos si solamente se permite intercambiar los tomos entre los que hay 4 volúmenes o más. Demuestra que la hermana puede hacerlo en como mucho 25 operaciones.

Solución. Sí. Notemos que cualquier tomo se puede intercambiar o bien con el primero o bien con el último. Además, el primero siempre se puede intercambiar con el último. De esta manera, cualquier tomo que no sea el 1 o el 10 se puede colocar en su lugar en como mucho 3 operaciones. Al final, después de como mucho $3 \cdot 8 = 24$ operaciones los tomos 1 y 10 quedarán en los extremos y en como mucho 1 operación los intercambiaremos.

□

Problema 30. Cuatro tenistas españolas han llegado a un hotel junto con otras 6 tenistas de otros países. Si las alojan de manera aleatoria en habitaciones dobles, ¿con qué probabilidad las españolas están juntas en 2 habitaciones?

Solución. Pensemos primero en las 10 camas que ocuparán las 10 tenistas. Hay $\binom{10}{4}$ maneras de distribuir a 4 tenistas españolas en estas camas.
Ahora pensemos en las habitaciones. Si cada pareja de tenistas españolas ocupa una habitación, hay $\binom{5}{2}$ maneras de que ocupen 2 habitaciones de 5. La probabilidad final es

$$\binom{5}{2} : \binom{10}{4} = 1/21$$

□

Problema 31. Tenemos 20 canicas de 10 colores distintos, 2 por cada color. Se colocan en 10 cajas de tal manera que de cada caja se puede sacar una canica y tener un conjunto de diez colores distintos. Demuestra que la cantidad de maneras de hacerlo es una potencia de 2.

Solución. Está claro que no hay ninguna caja vacía. Si alguna caja contiene solamente una canica, tendrá que ser elegida. Quitemos esta caja y, además, la otra del mismo color de otra caja. En esta nueva caja tiene que haber otra canica (si no, no podemos sacar 10 canicas distintas de 10 cajas), además, debe ser de otro color. Si esta canica es única, repetiremos el proceso (quitaremos esta y su pareja) hasta que solamente queden cajas con 2 canicas. Notemos que no hemos aumentado ni disminuido las maneras de elegir 10 canicas.
Ahora quedan $2n$ canicas en n cajas. Si todas las cajas contienen canicas iguales, habrá 2^n maneras de elegir las canicas. Si no, llamemos "vecinas" dos cajas que comparten al menos un color. Formaremos cadenas de cajas vecinas, lo cual dividirá las n cajas en k ciclos. En cada ciclo solamente hay 2 maneras de elegir una cadena de canicas, de modo que la cantidad de maneras total es 2^k.

□

Problemas para hacer en casa

7 de marzo

Problema 32. Para el almuerzo de Julia en el colegio, su hermana mayor le tiene preparados 2 plátanos, 3 peras y 5 manzanas, una fruta para cada día de lunes a viernes. ¿Cuántas maneras de distribuir la fruta durante 2 semanas tiene Julia?

Solución. Elijamos primero qué días comerá una manzana. Hay $\binom{10}{5}$ maneras de hacerlo. Ahora hay que elegir 2 días que comerá un plátano y las peras se colocarán solas. Por tanto, habrá $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{2} = 2520$ maneras de distribuir la fruta.
Otra manera de hacerlo es numerar las piezas de fruta como si fueran ejemlares únicos. Hay 10! permutaciones de 10 frutas distintas. Ahora toca volver a identificar cada tipo de fruta, es decir, dividir entre la cantidad de permutaciones dentro de cada tipo de fruta. La respuesta final es la misma:

$$\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

□

14 de marzo

Problema 33. ¿De cuántas maneras podemos distribuir 10 caramelos idénticos entre 4 niños si

a) no imponemos ninguna restricción?

b) cada niño recibe al menos un caramelo?

c) ningún niño recibe más de 3 caramelos?

Solución. a) El problema equivale a las maneras de poner 10 puntos y 3 barras en fila. Las barras simbolizan el cambio de niño, y la cantidad de puntos seguidos simboliza la cantidad de caramelos que se lleva ese niño. Por tanto, la solución es

$$\binom{13}{3} = 286$$

b) Esto es lo mismo que hallar el número de maneras de repartir 6 caramelos idénticos entre 4 niños sin restricciones. Por tanto, la solución es

$$\binom{9}{3} = 84.$$

c) Hay $\binom{9}{3} = 84$ maneras de repartir los caramelos de manera que el niño número i recibe al menos 4 caramelos. Hay $\binom{5}{3} = 10$ maneras de repartir los caramelos de manera que los niños número i y j reciben al menos 4 caramelos, con $i \neq j$. No hay ninguna manera de repartir 10 caramelos entre 4 niños de manera que tres o más niños reciban 4 o más caramelos cada uno. Por tanto, la solución es

$$286 - 4 \cdot 84 + \binom{4}{2} \cdot 10 = 10.$$

□