PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS 2024-25

Fechas: 11, 18, 25 de octubre y 8 de noviembre de 2024
Sucesiones I
Grupo: Mercurio **(Soluciones)**

Una **sucesión** es una regla que a cada número natural proporciona un número. Normalmente este número es un número real y por lo tanto podemos definir una sucesión también como una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. A menudo, en vez de escribir $s(n)$ preferimos escribir s_n.

Ejemplo. La sucesión $s_n \equiv 1, 3, 5, 7, ...$ de números impares corresponde a la función $s(n) = 2n - 1$

Una **recurrencia**, o relación de recurrencia, es una ecuación que relaciona un término de una sucesión con otros anteriores.

Para definir bien una sucesión no es suficiente con definir una relación de recurrencia. Hay que establecer determinadas **condiciones iniciales**: los valores de los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo. La relación de recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2$ si fijamos $s_1 = 1$ nos crea la misma sucesión de impares del ejemplo anterior $1, 3, 5, 7, ...$ pero si fijamos $s_1 = 0$ nos genera los números pares.

Ejemplo. $s_{n+1} = 2s_n + 1$ nos define una relación de recurrencia. Tomando el valor inicial $s_1 = 3$ obtenemos

$$s_2 = s_{1+1} = 2s_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$s_3 = s_{2+1} = 2s_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

y así sucesivamente.

Sabiendo la función que define una sucesión podemos fácilmente desarrollar una relación de recurrencia:

Ejemplo resuelto. ¿Qué relación de recurrencia corresponde a $s_n = n^3$?

Solución.

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Por tanto,

$$s_{n+1} = s_n + 3n^2 + 3n + 1$$

nos proporciona una recurrencia que define la sucesión si fijamos $s_1 = 1$.

Sin embargo, no es la única. Observemos que

$$(s_{n+2} - s_{n+1}) - (s_{n+1} - s_n) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6,$$

y por lo tanto la recuerrencia

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - s_n + 6n + 2$$

nos define la misma sucesión si fijamos $s_1 = 1$ y $s_2 = 8$. $\square$

Problema 1. Encuentra otra relación de recurrencia para la sucesión $s_n = n^3$.

Solución. Observemos que

$$(s_{n+3} - 2s_{n+2} + s_{n+1}) - (s_{n+2} - 2s_{n+2} + s_n) = 6(n+1) - 6n = 6.$$

Por lo tanto,

$$s_{n+3} = 3s_{n+2} - 3s_{n+1} + s_n + 6$$

con los datos iniciales $s_1 = 1$, $s_2 = 8$ y $s_3 = 27$. $\square$

Propiedades de las sucesiones

En el océano de sucesiones variadas existen algunas que tienen determinadas características que necesitaremos nombrar. Son las siguientes:

Definición 1. Se dice que una sucesión es **acotada por arriba** si existe un número S tal que $\forall n : s_n \leqslant S$.
Una sucesión es **acotada por abajo** si existe un número I tal que $\forall n : s_n \geqslant I$.
Una sucesión es **acotada** si es acotada por arriba y por abajo.

Definición 2. Una sucesión es **monótona creciente** si $n \geqslant m \Rightarrow s_n \geqslant s_m$ y **monótona decreciente** si $n \geqslant m \Rightarrow s_n \leqslant s_m$.
Una sucesión se llama **monótona** si es monótona creciente o monótona decreciente.
Si cambiamos $\leqslant, \geqslant$ por $<, >$, es decir, no permitimos términos iguales, se habla de **monotonía estricta**.

Ejemplo.

1. La sucesión $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ es monótona creciente, acotada por abajo y no acotada por arriba.
2. La sucesión $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ no es monótona ni acotada.
3. La sucesión $1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, ...$ no es monótona pero sí acotada.

Podemos formar sucesiones sumando los términos de otra sucesión.

Definición 3. Una **serie** es una sucesión s_n cuyos términos son sumas de los elementos de otra sucesión a_n,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$$

Ejemplo. Si la sucesión $a_n = 1/2^n$ (es una progresión geométrica), la serie correspondiente es la suma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

¿Cómo demostrar que una sucesión está acotada por arriba? Hay varias maneras de hacerlo. La más sencilla es demostrar que cada término es la resta de una constante y un número positivo.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ está acotada por arriba.

Solución. Como $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ vemos que todos los términos son menores de 1. □

Problema 2. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n^2+n+5}{n^2-2n-10}$ está acotada.

Solución. Notemos que para $n \geq 20$

$$0 \leq a_n = \frac{n^2+n+5}{n^2-2n-10} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{5}{n}-\frac{10}{n^2}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \leq 2.$$

□

Problema 3. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

está acotada.

Solución. Vamos a demostrar por inducción que $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Para $n = 1$ es obvio. Supongamos que es cierto para $n = k$. Entonces

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1 - \frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Hemos demostrado que todos los miembros de la sucesión son menores de 1, además, son mayores de 0. □

Otra forma es buscar una sucesión mayor de la que sepamos que está acotada.

Ejemplo resuelto. Cada término de la sucesión es la suma

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} ... + \frac{1}{3\cdot 4\cdot (n+2)}$$

Demuestra que está acotada.

Solución. Cambiemos en cada denominador los distintos números por 3:

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3} ... + \frac{1}{3^n}$$

Claramente, cada nueva fracción es mayor que la anterior, por lo que $a_n < b_n$. Por otro lado, b_n es la suma de una progresión geométrica, por lo que

$$b_n < \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

□

Problema 4. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

está acotada.

Solución. Como hemos demostrado en el problema anterior que la sucesión

$$b_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

está acotada, también lo está a_n ya que

$$\forall n \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}$$

Esta sucesión, por cierto, tiende a $\pi^2/6$, resultado que se conoce como "problema de Basilea", resuelto por primera vez por Euler. □

Demostrar que una sucesión no está acotada suele ser algo más difícil. Vamos a ver un ejemplo clásico que cualquier matemático que se precie debe conocer.

Ejemplo resuelto. La suma de la serie armónica

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

no está acotada.

Demostración. Consideremos el segundo término de la suma. Es igual a $\frac{1}{2}$. Ahora consideremos la suma del tercero y el cuarto.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Análogamente,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

Ahora agruparemos los siguientes 8 números, luego los siguientes 16,...

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}_{>1/2} + ...$$

Cada siguiente suma de 2^k números es mayor que $1/2$, por lo que la suma es mayor que cualquier entero N, es decir, diverge. □

Problema 5. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

no está acotada.

Solución. Vamos a usar el mismo truco que hemos usado para demostrar la divergencia de la suma armónica, pero ahora lo vamos a llevar todo a $1/4$:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Siguiendo así vemos que esta suma supera cualquier número dado, o sea, diverge. □

Definición 4. Una subsucesión de la sucesión s_n es una sucesión que formamos eliminando algunos (puede que infinitos) términos de la sucesión s_n.

Matemáticamente hablando, sea i_n una sucesión monótona estrictamente creciente de números naturales. Entonces s_{i_n} es una subsucesión de la sucesión s_n.

Ejemplo. La sucesión $1, 3, 5, 7, 9$ es subsucesión de la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ mientras que $1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots$ no lo es.

Problema 6. Inventa dos sucesiones distintas, u_n, v_n tales que cada una es subsucesión de la otra.

Solución. Por ejemplo:

$$u \equiv 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$$

$$v \equiv 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 \ldots$$

□

Límite de una sucesión

El concepto de límite es clave en el desarrollo de las matemáticas. Intuitivamente, una sucesión tiene límite cuando sus términos cada vez se van acercando más a un determinado número. La formalización de esta idea no es sencilla:

Definición 5. Se dice que la sucesión a_n **tiene límite** A - se escribe $\lim a_n = A$ - si para cualquier positivo ϵ por muy pequeño que sea existe un número N a partir del cual todos los términos de la sucesión distan de A menos de ϵ, es decir, $\forall \epsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geqslant N \ |a_n - A| < \epsilon$.

Vamos a ver un ejemplo de demostración:

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ tiene límite.

Demostración. Si calculamos los primeros términos

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5},$$

vemos que la sucesión crece y, además, nunca puede superar 1. Vamos a demostrar que efectivamente 1 es su límite. Fijemos un $\epsilon > 0$ y elijamos $N = 2/\epsilon$. Entonces $n \geqslant N \Rightarrow 1/n \leqslant \epsilon/2$. ¿Qué ocurre con la distancia $|a_n - 1|$?

$$|a_n - 1| = |\frac{n-1-(n+1)}{n+1}| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \epsilon$$

Recuerda: aplicar la demostración equivale a saber indicar un N adecuado para cada valor de ϵ, es decir, saber construir $N(\epsilon)$. □

La idea del límite consiste en que

- existe una franja alrededor del límite tal que todos los términos de la sucesión a partir de determinado momento están dentro de esta franja,
- podemos hacer esta franja tan estrecha como queramos.

Imagínate la estela de un barco que se va estrechando a medida que nos acercamos al barco.

Problema 7. Calcula $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Solución. Observemos que

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Fijemos un $\epsilon > 0$ y elijamos $N > \frac{1}{\epsilon^2}$. Entonces si $n \geqslant N$,

$$|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$. □

¿Cómo son las sucesiones que no tienen límite? Claramente, deben tener términos "díscolos" que se salgan de la estela al menos a cierta distancia del barco.

Para demostrar que una sucesión NO tiene límite A basta indicar algún valor de ϵ para el cual, sea cual sea N, hay términos a partir de N que distan de A más que ϵ.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene límite.

A simple vista el resultado es evidente. El límite no puede ser 1 porque hay infinitos términos que distan de él 2, tampoco puede ser -1 por la misma razón. Pero necesitamos darle rigor y forma:

Demostración. Supongamos que el límite existe y es igual a A. Consideremos $\epsilon = 1$ (la mitad de la distancia entre 1 y -1). Fijemos un N. Sabemos que para cualquier $n \geqslant N$ los números a_n, a_{n+1} son $1, -1$. Por la definición del límite

$$|1 - A| < 1, |-1 - A| < 1 \Rightarrow 0 < A < 2, -2 < A < 0$$

Contradicción. □

Este ejemplo es importante porque nos ayudará a introducir un concepto nuevo.

Definición 6. El punto A se llama **punto de acumulación** de la sucesión a_n si existe una subsucesión s_n tal que $\lim s_n = A$

Como habrás observado, una sucesión puede tener varios puntos de acumulación, pero nunca dos límites (¡lo tendrás que demostrar tú!):

Teorema 1. *Una sucesión no puede tener más de un límite.*

A menudo no podemos indicar cuál es el límite de una sucesión pero lo sabemos gracias al siguiente teorema:

Teorema 2. *Una sucesión monótona y acotada tiene límite*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo resuelto. Sea $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$. Demuestra que esta sucesión tiene límite.

Podemos calcular que $x_2 = \sqrt{7} \approx 2.65, x_3 = \sqrt{6 + \sqrt{7}} \approx 2.94, \ldots$. Vemos que los términos se van acercando al 3. En vez de demostrar que el límite es 3 (que es algo más complicado), demostraremos que la sucesión es monótona y acotada.

Demostración. Vamos a demostrar por inducción que todos los términos son menores de 3. Efectivamente, $x_1 < 3$, ahora $x_n < 3 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$, así que la sucesión está acotada.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x^2}{\sqrt{x_n + 6} + x} = \frac{(3 - x)(x + 2)}{\sqrt{x_n + 6} + x} > 0$$

para $0 < x_n < 3$. La sucesión es también estrictamente creciente, por lo que tiene un límite.

□

Problema 8. Demuestra que la serie $s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$, $s_1 = 1$ converge

Solución. Considera la sucesión s'_n que tiene la misma relación de recurrencia $s'_{n+1} = \sqrt{2s'_n}$ pero $s'_1 = 2$. Es fácil comprobar que es una sucesión constante, todos sus términos son iguales a 2. Al mismo tiempo vemos que $s_1 < s'_1$ y si $s_k < s'_k$, entonces

$$s_{k+1} = \sqrt{2s_k} < \sqrt{2s'_k} = s'_{k+1}$$

de modo que por inducción la serie $s'_n \equiv 2$ acota por arriba la serie original.

Queda demostrar que la serie s_n es monótona creciente. Como $\forall n \; 0 < s_n < 2$, también se tiene

$$s_n(s_n - 2) < 0 \Leftrightarrow s_n < \sqrt{2s_n}$$

□

Problema 9. Demuestra que la sucesión $s_0 = \pi/2$, $s_{n+1} = \sin s_n$ tiene límite.

Solución. Como $\sin x < x$ para $x \in (0, \pi/2)$ la sucesión s_n es estrictamente decreciente, además, es positiva, por tanto, está acotada por abajo. Por esto tiene límite. □

Otro teorema que nos puede resultar muy útil en el folklore matemático lleva un divertido título:

Teorema 3 (Teorema de dos policías)**.** *Si existen dos sucesiones a_n, b_n tales que $a_n \leqslant s_n \leqslant b_n$ y, además, $\lim b_n = \lim a_n = A$, entonces $\lim s_n = A$.*

Confiemos en que podrás demostrarlo, sólo tienes que elegir unos ϵ adecuados para las sucesiones a_n, b_n.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

tiene límite y búscalo.

Solución. Notemos que entre las n fracciones la primera es la mayor y la última, la menor. Para evitar trabajar con radicales, consideremos dos sucesiones auxiliares: la suma de n primeras fracciones y la de n últimas:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Claramente, $a_n < x_n < b_n$. Para hallar el límite de a_n notemos que

$$a'_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

Ya sabemos que el límite de a'_n es 1. Por tanto, el de a_n, también. Análogamente, $\lim b_n = 1$. Entonces, $\lim x_n = 1$ - ¡después de aplicar el teorema de dos policías tres veces! □

Apéndice teórico

En esta sección indicaremos cómo se demuestran algunos teoremas mencionados en el preámbulo.

No es necesario discutir esta parte en clase si no se ha revisado previamente en casa.

Los teoremas sobre la convergencia de sucesiones se basan en las propiedades de los números reales y en cómo los definimos. El concepto principal es la noción de una sucesión de Cauchy en los números racionales.

Definición 7. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales. Decimos que es de **Cauchy** si la diferencia $|a_n - a_m|$ es muy pequeña para n y m grandes. Formalmente, $\{a_n\}$ es de **Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - a_m| \leqslant \epsilon$ para todos $n, m > N$.

Ahora podemos considerar el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy $\mathcal{SC}$.

Decimos que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **equivalentes** si para grandes n, $|a_n - b_n|$ es pequeño. Es decir, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **equivalentes** si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|a_n - b_n| \leqslant \epsilon$ para todos $n > N$. Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ son equivalentes.

La clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy consiste en todas las sucesiones de Cauchy que son equivalentes a ella. Esto nos permite ver a $\mathcal{SC}$ como la unión disjunta de las clases de equivalencia. Los números reales $\mathbb{R}$ los entendemos como el conjunto de las clases de equivalencia.

Intuitivamente, puedes pensar que los números reales son límites de las sucesiones de Cauchy. Por ejemplo, no existe $\sqrt{2}$ entre los números racionales. Definamos t_n como el mayor número natural tal que $t_n^2 < 2n^2$ y pongamos $a_n = \frac{t_n}{n}$. Entonces, $\{a_n\}$ representa el número $\sqrt{2}$.

Ahora, no es difícil extender la suma y el producto a los números reales usando nuestra definición. Tampoco es difícil extender el orden que conocemos en los números racionales a los reales. También podemos hablar de sucesiones de Cauchy en los reales (esto requiere más trabajo) y la propiedad principal nueva que conseguimos es que las sucesiones de Cauchy en números reales siempre tienen un límite. A partir de este resultado, podemos ver cómo se demuestra alguno de los teoremas mencionados anteriormente. Por ejemplo, para probar el Teorema 2, se debe demostrar que una sucesión monótona y acotada es una sucesión de Cauchy.

Problema 10. Demuestra que cualquier sucesión acotada s_n tiene al menos un punto de acumulación.

Solución. **Pistas:** Ve dividiendo su imagen en mitades.

Llamemos las cotas inferior y superior de la sucesión I, S. Considera los intervalos $[I, \frac{I+S}{2}], [\frac{I+S}{2}, S]$. Al menos en uno de ellos la sucesión s_n tiene una cantidad infinita de términos. Elijamos este intervalo, llamémoslo $[I_1, S_1]$. Este intervalos contiene un elemento $s_{n_1} \in [I_1, S_1]$. Pongamos $t_1 = s_{n_1}$. De nuevo vamos a considerar dos subintervalos suyos, $[I_1, \frac{I_1+S_1}{2}], [\frac{I_1+S_1}{2}, S_1]$. Al menos en uno de ellos habrá infinitos términos de la sucesión, llamémoslo $[I_2, S_2]$ y escogemos $t_2 = s_{n_2} \in [I_2, S_2]$. Está claro que $\{t_i\}$ es una sucesión de Cauchy. Su límite es punto de acumulación de s_n.

□

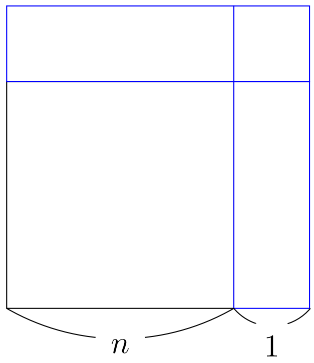
Problemas

Problema 11. Busca la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2n + 1$, $s_1 = 1$. Demuéstralo.

Solución. Es $s_n = n^2$. La demostración es sencilla, pero para que sea correcta hay que hacerlo por inducción. Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, $s_k = k^2$. Entonces

$$s_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

y el centésimo número es el 10000. También se puede hacer una demostración gráfica:



□

Problema 12. Isabel quiere aprovisionarse para una sesión larga de cine. En la tienda venden bolsas de palomitas por 2€, gusanitos por 1€ y chuches también por 2€. Isabel quiere gastar 11€ y va a hacer una lista con todas las combinaciones posibles... ¿cuántas son?

Solución. Claramente, necesitará comprar al menos una bolsa de gusanitos por 1€ porque las demás cantidades son pares. Ahora llamemos c_n la cantidad de maneras de gastar $2n$ euros. Claramente, $c_1 = 3$ porque puede comprar dos bolsas de gusanitos, o bien una de chuches o bien una de palomitas. Para hallar c_{n+1} notemos que de cualquier manera de gastar $2n$ euros podemos crear una de gastar $2n+2$ comprando dos bolsas de gusanitos. Además, están las maneras de no comprar ninguna bolsa de gusanitos, que son $n+1$ (podemos comprar de 0 a n bolsas de palomitas, lo que determina la cantidad de bolsas de chuches). Nuestra recurrencia, por tanto, es $c_{n+1} = c_n + n + 1$, lo que nos genera números triángulares "movidos" una posición, $c_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$. Así que $c_5 = 21$.

□

Problema 13. Una sucesión de números que comienza con un número real positivo tiene la propiedad de que el número en el puesto $n+1$ es la longitud del perímetro del cuadrado cuya área es el número en el puesto n para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por ejemplo, si la secuencia empieza por 1, los primeros términos de la secuencia serían $1, 4, 8, 8\sqrt{2}, \ldots$

Si sabemos que los tres primeros términos están en progresión aritmética, ¿cuáles son los valores posibles para el primer término?

Solución. Sea a el primer término de la sucesión, el segundo es $4\sqrt{a}$, y el tercero es $8\sqrt[4]{a}$. Además, si están en progresión aritmética, se cumple que

$$4\sqrt{a} - a = 8\sqrt[4]{a} - 4\sqrt{a}.$$

Sea $x = \sqrt[4]{a}$. La ecuación anterior es equivalente a

$$x^4 - 8x^2 + 8x = 0$$

Factorizamos este polinomio y obtenemos que

$$x(x^3 - 8x + 8) = x(x-2)(x^2 + 2x - 4) = x(x-2)\left(x - (-1+\sqrt{5})\right)\left(x - (-1-\sqrt{5})\right) = 0$$

Como $\sqrt[4]{a} > 0$, las únicas posibilidades son $\sqrt[4]{a} = 2$ y $\sqrt[4]{a} = \sqrt{5} - 1$. Por tanto, los valores posibles para a son 16 y $(\sqrt{5} - 1)^4$.

Si el primer término es 16, todos los términos son 16, pero eso también es una progresión aritmética (de razón 0).

□

Problema 14. Considera la sucesión armónica $a_n = 1/n$. ¿Es verdad que para cualquier m tiene una subsucesión de m números que sea una progresión aritmética?

Solución. Sí. Sea M el mínimo común múltiplo de $1, 2, 3, ..., n$. Entonces la sucesión $m_i = \frac{i}{M}$ es la que buscábamos.

□

Problema 15. Todas las mañanas Julia baja la escalera de su portal. La escalera tiene 10 peldaños, y Julia baja de uno en uno o de dos en dos. Procura inventar una nueva manera de bajar la escalera cada día. ¿Cuántos días puede variar las maneras de bajar la escalera sin repetir ninguna?

Solución. Llamemos s_n la cantidad de maneras de bajar una escalera de n peldaños. Fijémonos en el primer paso que da Julia. Puede ser de uno en uno o de dos en dos. En el primer caso, le quedan $n-1$ peldaños, que puede bajar de s_{n-1} maneras, en el segundo, le quedan $n-2$ y s_{n-2} maneras. Por tanto, la recurrencia que buscamos es la de Fibonacci: $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. Son 89 maneras.

□

Problema 16. Una canica se desplaza por una superficie rugosa. En el primer segundo recorre 10 cm; luego su velocidad disminuye recorriendo en cada segundo $2/3$ de la distancia recorrida en el segundo anterior. ¿A qué distancia se parará la canica?

Solución. Llamemos v_n las velocidades de la canica en el segundo n. Sabemos que $v_1 = 10, v_{n+1} = 2/3v_n$. Es fácil ver que $v_{n+1} = 10 \cdot (2/3)^n$. Como las distancias recorridas en cada segundo numéricamente coinciden con las velocidades, la distancia total es la suma

$$10 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^i = \frac{10}{1 - \frac{2}{3}} = 30$$

□

Problema 17. Consideremos la sucesión a_n definida por la siguiente relación de recurrencia: si a_n es par, $a_{n+1} = a_n/2$, si es impar, $a_{n+1} = a_n^2 - 5$. Se sabe que a_1 es impar mayor que 5. Demuestra que esta sucesión no está acotada por arriba.

Solución. Para cualquier $a_n = 2k + 1$ se cumple que $a_{n+1} = 4k^2 + 4k - 4$, por lo que $a_{n+3} = k^2 + k - 1$. Si $k > 2, a_{n+3} = k^2 + k - 1 > 2k + 1 = a_n$. Por tanto, esta sucesión de números naturales crece cada 3 números y no puede estar acotada por arriba.

□

Problema 18. Demuestra que la serie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ a_n = \frac{n}{2^n}$$

está acotada.

Solución. A partir de $n = 3$ podemos estimar la relación entre los términos vecinos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{2}{3}$$

Esto significa que a partir de $n = 3$ $s_n \leqslant s_1 + s_2 + s_3 \cdot \sum_{i=3}^{n} (\frac{2}{3})^{i-3}$

□

Problema 19. Demuestra que la serie $a_{n+1} = a_n + 1/a_n, a_1 = 1$ no está acotada.

Solución. **Pistas:** Eleva al cuadrado

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + 1/a_n^2 > a_n^2 + 2$$

por lo que los cuadrados de los términos van como mínimo de dos en dos. Si los cuadrados de una serie positiva no están acotados, no lo está la propia serie. De hecho, podemos fácilmente demostrar por inducción que $a_n \geqslant \sqrt{2n-1}$

□

Problema 20. Fijemos un conjunto de números $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$. Ahora vamos a construir la siguiente sucesión:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{k} n_k, a_2 = \sum_{i=1}^{k} n_k^2, a_3 = \sum_{i=1}^{k} n_k^3, ..., a_m = \sum_{i=1}^{k} n_k^m$$

1. ¿Es posible que esta sucesión disminuya hasta a_5 y crezca a partir de a_5?
2. ¿Es posible que esta sucesión crezca hasta a_5 y luego disminuya a partir de a_5?

Solución. 1. Sí, es posible. Por ejemplo, $n_1 = 1,02, n_2 = 0,5$, de modo que $a_m = 1,02^m + 0,5^m$. Ahora

$$a_{m+1} > a_m \Leftrightarrow (1,02 - 1) \cdot 1,02^m > 0,5^{m+1} \Leftrightarrow 2,04^m > 25 \Leftrightarrow m \geqslant 5$$

2. No. Entre los números n_i había al menos un número mayor de 1 (si no, la sucesión siempre disminuiría). Llamemos este número $x > 1$. Notemos que $a_n > x^n$, pero la sucesión x_n no está acotada, por lo que no puede disminuir a partir del quinto número.

□

Problema 21. Inventa una sucesión de números naturales x_i tal que cualquier sucesión de números naturales sea su subsucesión.

Solución. Por ejemplo,

$$u_n \equiv 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

formada como concatenación de subsucesiones s_k de los primeros k números naturales. Supongamos que el primer término de nuestra sucesión es k_1. Elijamos el primer $k_1 \in s_i$ de la sucesión universal u_n. Si el siguiente término es menor, lo elegiremos desde s_{i+1}. Si no, volvemos al paso anterior.

□

Problema 22. Considera el trapecio $ABCD$ con las bases $a = AB$ y $b = CD$. Tracemos el segmento A_1B_1 que une los puntos medios de las diagonales. Se ha formado un nuevo trapecio ABB_1A_1 o CDB_1A_1. En este nuevo trapecio de nuevo uniremos los puntos medios de las diagonales A_2B_2, y así hasta el infinito. Considera la sucesión $s_n = A_nB_n$, ¿es monótona? ¿Está acotada? ¿Tiene límite?

Solución. Está claro que $s_1 = \frac{a-b}{2}$. De la misma manera se puede demostrar que $s_{n+1} = \frac{|s_n - b|}{2}$. El límite de esta sucesión si existiera sería $x = \frac{|x-b|}{2} \Rightarrow x = \frac{b}{3}$ Si $s_n = b/3 + \delta_n$ vemos que

$$\frac{b}{3} + \delta_{n+1} = \frac{b/3 + \delta_n - b}{2} = \frac{b}{3} - \frac{\delta_n}{2} \Rightarrow \delta_{n+1} = -\delta_n$$

Esto significa que la sucesión δ_n está acotada, tiene límite aunque en el caso general no es monótona. Es monótona solamente en el caso de que algún $s_k = b/3$.

□

Problema 23. ¿Existe una sucesión estrictamente creciente de naturales a_n que cumpla que $a_{nm} = a_n + a_m$ para todos n y m?

Solución. **Pistas:** $n = 2$

No. Con $n = 2$, tenemos que $a_{2n} = a_n + a_2$, y si la sucesión es creciente, esto es imposible para $n > a_2$. □

Problema 24. Demuestra que

$$\forall x > 0, x \neq 1 \ (n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$$

Solución. Llevemos todos los términos a la derecha y factoricemos:

$$n(x^{n+1} - x^n) - (x^n - 1) = nx^n(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) =$$
$$= (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - 1)$$

Ahora si $x > 1$ cada uno de los n sumandos x^n es mayor que x^i por lo que ambos paréntesis son positivos, y viceversa. □

Problema 25. Demuestra que la sucesión de Euler

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es estrictamente creciente. Puedes usar la desigualdad $(n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$

Solución. **Pistas:** Pon $x = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$

Poniendo $x = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$ tenemos

$$(n+1)(1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{n+1}} < n(1 + \frac{1}{n}) + 1 = n + 2$$

de ahí que

$$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

□

Problema 26. Demuestra que la serie

$$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

es estrictamente creciente. Puedes usar la desigualdad $(n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$

Solución. **Pistas:** Pon $x = (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$

Poniendo $x = (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$ tenemos

$$(n+1)(1 - \frac{1}{n})^{\frac{n}{n+1}} < n(1 - \frac{1}{n}) + 1 = n$$

de ahí que

$$(1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

□

Problema 27. Demuestra que la serie

$$c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

es estrictamente decreciente.

Solución. **Pistas:** Usa el problema anterior,

$$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

es estrictamente creciente.

Notemos que $c_n = \frac{1}{b_{n+1}}$, donde

$$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

Efectivamente,

$$\frac{1}{b_{n+1}} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Como b_n es estrictamente creciente, c_n es estrictamente decreciente.

□

Problema 28. Demuestra que la serie de Euler

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

tiene límite. Este límite en honor a Euler se llama e.

Solución. **Pistas:** Busca algo que la acote por arriba

Ya sabemos que la serie e_n es estrictamente creciente, pero, además, está acotada por la serie $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ que es decreciente, por lo que está acotada por $c_1 = 4$. Una serie acotada por arriba y creciente debe tener límite.

□

Problema 29. Un empresario promete pagar a su trabajador un promedio de $\sqrt{2}$ pesetas por día. Para ello, cada día le paga 1 o 2 pesetas de tal manera que, para cualquier número natural n, la cantidad pagada en los primeros n días sea un número natural lo más cercano posible a $n \cdot \sqrt{2}$. Aquí están los valores de los primeros cinco pagos: 1, 2, 1, 2, 1. Demostrar que la secuencia de pagos no es periódica.

Solución. Sea S_n la cantidad pagada en los primeros n días. Según la condición, se tiene que $|S_n - n \cdot \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto $\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Supongamos que para $n > N$, la secuencia de pagos es periódica con periodo T. Entonces, por cada T días siguientes, el trabajador recibiría la misma cantidad entera de c pesetas, en particular,

$$S_{N+mT} = S_N + mc$$

para cualquier número natural m. Por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{S_{N+mT}}{N+mT} = \frac{S_N + mc}{N + mT} = \frac{c}{T}$$

lo que implica que $\sqrt{2} = \frac{c}{T}$, es decir, $\sqrt{2}$ es un número racional. Esto es una contradicción.

□

Problema 30. Sea $M = \{x_1, \dots, x_{30}\}$ un conjunto que consiste en 30 números positivos distintos, y sea A_n (para $1 \le n \le 30$) la suma de todos los productos posibles de n elementos distintos del conjunto M. Demostrar que si $A_{15} > A_{10}$, entonces $A_1 > 1$.

Solución. **Pistas:**

Supongamos que $A_1 \le 1$. Es suficiente demostrar que $A_{n+1} \le A_n$ para cualquier $1 \le n \le 29$. Tenemos que $A_n \ge A_1 A_n$. Al multiplicar A_1 y A_n y al expandir los paréntesis, vemos que:

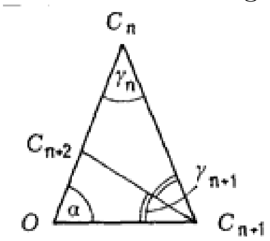
$$A_1 A_n = A_{n+1} + S_n,$$

donde S_n es la suma de todos los términos de la suma obtenida en los que aparece el cuadrado de uno de los x_i. Entonces, $S_n > 0$, de lo que se sigue lo requerido. □

Problema 31. Dado un triángulo $\triangle C_1C_2O$, trazamos la bisectriz C_2C_3, luego en el triángulo $\triangle C_2C_3O$ se traza la bisectriz C_3C_4, y así sucesivamente. Demostrar que la secuencia de los ángulos $\gamma_n = \angle C_{n+1}C_nO$ tiende a un límite, y encontrar dicho límite si $\angle C_1OC_2 = \alpha$.

Solución. **Pistas:**

Del enunciado se sigue que $C_{n+1}C_{n+2}$ es la bisectriz del ángulo del triángulo $C_nC_{n+1}O$.



Por lo tanto,

$$2\gamma_{n+1} + \gamma_n + \alpha = \pi. \tag{1}$$

Demostraremos que γ_n tiende al límite $\beta = \frac{\pi-\alpha}{3}$. Reescribamos (1) de la siguiente manera:

$$2(\gamma_{n+1} - \beta) = \beta - \gamma_n.$$

De aquí se sigue que

$$|\gamma_{n+1} - \beta| = \frac{1}{2}|\gamma_n - \beta|,$$

es decir, la diferencia entre γ_n y β se reduce a la mitad al pasar de n a $n+1$. Por lo tanto,

$$|\gamma_n - \beta| = 2^{1-n}|\gamma_1 - \beta|$$

tiende a cero.

□

Problema 32. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una secuencia creciente de números naturales. Se sabe que $a_{a_k} = 3k$ para cualquier k. Encontrar:

a) a_{100}

b) a_{2025}

Solución. **Pistas:**

a) Observamos de inmediato que la secuencia a_k es estrictamente creciente. En efecto, la suposición $a_k = a_{k+1} = n$ conduce a una contradicción: $a_n = 3k = 3(k+1)$.

Además, $a_1 > 1$ (de lo contrario, $a_{a_1} = a_1 = 1 \neq 3$). De aquí se sigue que $a_k > k$ para todos k. Por otro lado, $a_1 < a_{a_1} = 3$, por lo que $a_1 = 2$.

Calculamos los siguientes términos:

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 6, \quad a_6 = 9, \quad a_9 = 18, \quad a_{18} = 27, \quad a_{27} = 54, \quad a_{54} = 81, \quad a_{81} = 162, \quad a_{162} = 243.$$

Dado que $162 - 81 = 243 - 162$, tenemos que $a_k = 81 + k$ para todos los k desde 81 hasta 162. En particular, $a_{100} = 181$.

b) Sabemos que $a_{162} = 243$, $a_{243} = 486$, $a_{486} = 729$. Dado que $729 - 486 = 486 - 243$, tenemos que $a_k = 243 + k$ para todos los k desde 243 hasta 486. En particular, $a_{432} = 675$, por lo tanto $a_{675} = 1296$, $a_{1296} = 2025$, $a_{2025} = 3888$.

De manera análoga, se puede obtener la fórmula general:

$$a_n = \begin{cases} n + 3^m, 3^m \leq n \leq 2 \cdot 3^m, \\ 3(n - 3^m), 2^m \leq n \leq \cdot 3^{m+1}. \end{cases}$$

□

Problema 33. Sea $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (donde $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el conjunto de los números enteros no negativos) una función estrictamente creciente, que satisface la relación $f(n+f(m)) = f(n)+m+1$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Encontrar todos los valores que puede tomar $f(2024)$.

Solución. **Pistas:**

Sustituyendo $m = 0$ y $n = 0$, obtenemos $f(f(0)) = f(0) + 1$. Si $f(0) = 0$, tendríamos $f(0) = f(0) + 1$, lo cual es imposible.

Supongamos que $f(0) = a$, donde $a \in \mathbb{N}$. Del primer paso se sigue que $f(a) = a + 1$. Si sustituimos $m = 0$ y $n = a$, obtenemos que $f(2a) = f(a) + 1 = a + 2$. Por lo tanto, los valores de la función en los extremos del intervalo $[a; 2a]$ son dos números naturales consecutivos. Dado que la función $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es estrictamente creciente, no debe haber otros puntos enteros en el intervalo $[a; 2a]$ aparte de a y $2a$, ya que, de lo contrario, los valores en esos puntos coincidirían con $a + 1$ o $a + 2$, lo que contradiría el crecimiento estricto de la función. Por lo tanto, $2a - a = 1$, es decir, $a = 1$.

Sustituyendo en la relación original $m = 0$ y teniendo en cuenta que $f(0) = 1$, obtenemos $f(n + 1) = f(n) + 1$. Así, $f(n) = n + 1$, por lo tanto, $f(2024) = 2025$.

□

Problema 34. Tenemos 10 pesas que pesan $1, 2, 4, 8, ..., 512$ gramos, es decir, potencias de dos con exponentes de 0 a 9. Está permitido pesar colocando pesas en ambos platillos de la balanza. Algunas cantidades se pueden pesar de varias maneras, por ejemplo, si $x = 9$,

$$x + 1 = 2 + 8, x = 8 + 1$$

¿Cuál es el máximo de las maneras de pesar un determinado peso?

Solución. **Pistas:** Demuestra que es 89. Piensa en una recurrencia

Llamemos $K_n(x)$ la cantidad de maneras de pesar x gramos usando pesas con exponentes de 0 a n. Sea $K_n = \max_x K_n(x)$. Queremos demostrar que $K_{n+1} \leqslant K_n + K_{n-1}$, por lo que la cantidad de maneras de pesar será limitada por los números de Fibonacci.

Consideremos un peso par $x = 4k + 2$ que queremos pesar con pesas $1, 2, ..., 2^{n+1}$. En este caso no usamos la pesa 1. Hay una clara biyección entre las maneras de pesar $4k + 2$ gramos usando las pesas $2, 4, ..., 2^{n+1}$ y pesar $2k + 1$ gramos usando las pesas $1, 2, ..., 2^n$. Por tanto, $K_{n+1}(4x + 2) = K_n(2x + 1)$.

Veremos un peso $x = 4k$. Claramente, no podremos usar pesas $1, 2$. A cada manera de pesar $4k$ con las pesas $4, 8, ..., 2^{n+1}$ le corresponde una manera de pesar k con las pesas $1, 2, ..., 2^{n-1}$. Entonces, $K_{n+1}(4x) = K_{n-1}(x)$.

Ahora supongamos que x es impar. Entonces para pesarlo habrá que usar la pesa de $1gr$. Se puede colocar en el mismo platillo o en el contrario, es decir, se trata de pesar $x - 1$ gramos o $x + 1$ gramos. Pero ambos valores son pares, uno es múltiplo de 4 y el otro no. Por esto, $K_{n+1}(x) \leqslant K_n(x) + K_{n-1}(x)$.

Ahora toca demostrar que el máximo se alcanza para algún x. Busquemos una serie de impares tal que $s_n + s_{n+1} = 2^n$. Siendo $s_1 = 1$ tenemos $s_2 = 1, s_3 = 3, s_4 = 5, ..., s_9 = 171$. Podemos comprobar que para estos números se cumple la igualdad $K_{n+1}(s_{n+1}) = K_n(s_n) + K_{n-1}(s_{n-1})$

□

Problema 35. Dos personas están jugando a un juego. Uno concibe un número natural n, y el otro hace preguntas como ¿es cierto que n es menor que x? (puede elegir cualquier número x) y recibe respuestas "sí" o "no". A cada posible estrategia T del segundo jugador, le asignamos una función $f_T(n)$ igual al número de preguntas (antes de adivinar), si se concibió el número n. Supongamos, por ejemplo, que la estrategia T consiste en hacer primero las preguntas: ¿Es cierto que n es menor que 10?, ¿Es cierto que n es menor que 20?, ... hasta que en algún momento la pregunta ¿es cierto que n es menor que $10(k + 1)$? no se responderá "no", y luego se preguntará ¿es cierto que n es menor que $10k + 1$?, ¿es cierto que n es menor que $10k + 2$ y así sucesivamente. Entonces $f_T(n) = a + 2 + \frac{n-a}{10}$, donde a es el último dígito de n, entonces $f_T(n)$ crece como $\frac{n}{10}$.

a) Sugiere una estrategia para la cual la función f_T crezca más lentamente.

b) Dada una estrategia T, también vamos a introducir la función $\tilde{f}_T$ cuyo valor $\tilde{f}_T(n)$ es igual al mayor de los números $f_T(k)$, donde k va de 1 a n. Esta función es más conveniente si queremos comparar dos estrategias diferentes. Estima $\tilde{f}_T$ desde abajo (es decir, encuentra una función g tal que $\tilde{f}_T(n) \geq g(n)$ para cualquier n y para una estrategia arbitraria T).

Solución. Supongamos primero, que n no es un número natural cualquiera, sino que esté en el intervalo $1 \leq n \leq N$, donde N es un número dado. Entonces se conoce el problema de minimizar el número máximo de preguntas para adivinar n.

La mejor estrategia en este sentido, llamémosla S_N, consiste en que cada nueva pregunta divida el rango de valores que aún puede tomar el todavía desconocido número n en dos partes iguales (o diferentes en 1). Es decir, si ya sabemos que $a \leq n < b$, entonces necesitamos hacer la pregunta: ¿Es cierto que $n < \frac{a+b}{c}$?

Se puede probar que el número máximo de preguntas para adivinar el número $n \leq N$ usando S_N es el $[\log_2 N]$, donde $[x]$ es el número entero más pequeño no menor que x.

El razonamiento anterior nos da una respuesta a la pregunta b): para cualquier estrategia T y cualquier número n, $\tilde{f}_T(n) \geq [\log_2 n]$.

Tratemos la pregunta a) del ejercicio. Supongamos que hacemos varias preguntas como ¿es cierto que $n < x$? y recibimos respuestas "no": el número n siempre resultó ser mayor o igual que x. Está claro que el próximo x debe tomarse más que todas las ya utilizadas (de lo contrario, esta pregunta sería superflua).

Por lo tanto, al comienzo del juego, es necesario aumentar x todo el tiempo, hasta que el primer jugador diga "no". Sea $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ la secuencia que el adivinador decide llamar hasta que obtiene la primera respuesta "no". Debe ser infinita, ya que n puede ser arbitrariamente grande.

Ahora venga la segunda etapa del juego: el primer jugador respondió "si" a la k-ésima pregunta. De este modo, $x_{k-1} \leq n < x_k$.

Luego podemos aplicar una estrategia similar a la estrategia S_N descrita anteriormente, dividiendo el intervalo restante por la mitad todo el tiempo. Obviamente, esto tomará hasta $[\log_2(x_k - x_{k-1})]$ preguntas.

Supongamos que en la segunda etapa del juego, es decir, después de la primera respuesta "si", procedemos de este modo. Queda por elegir una secuencia monótonamente creciente x_k para definir completamente la estrategia.

Analicemos tres estrategias específicas que se diferencian únicamente en la elección de la secuencia x_k.

1. Estrategia T_1: $x_k = 10k$. Entonces, como se indica en el anunciado del ejercicio, $f_{T_1}(n)$ crece aproximadamente como $\frac{n}{10}$.

2. Estrategia T_2: $x_k = 2^k$. Entonces el número de preguntas en la primera etapa no excede $[\log_2 n]$, y el número de preguntas en la segunda etapa no excede $[\log_2 \frac{n}{2}]$. Por lo tanto, hay aproximadamente $2\log_2 n$ preguntas en total.

3. Estrategia T_3: $x_k = 2^{2^k}$. Ahora, el número de preguntas en la primera etapa ha disminuido considerablemente: hacen falta $[\log_2 \log_2 n]$ pasos. Sin embargo, observamos que si $n = 2^{2^k} - 1$, entonces en la segunda etapa, vamos a necesitar unos $[\log_2 n]$ pasos. Sin embargo, si $n = 2^{2^k} + 1$ este número es cercano a $2\log_2 n$.

Surge la pregunta: ¿existe una estrategia T_4 para la cual $\tilde{f}_{T_4}(n)$ para todo n no difiera demasiado de $\log_2 n$? Ahora describamos una estrategia T_4 tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}_{T_4}(n)}{\log_2 n} = 1$.

La primera etapa del juego, como antes, está determinada por la secuencia de números $x_k = 2^{2^k}$.

Supongamos que la k-ésima pregunta se responda "si" por primera vez, de donde $m \leq n \leq m^2$ con $m = 2^{2^{k-1}}$.

Describamos la estrategia T_4 para la segunda etapa del juego. Asignamos a cada n en el intervalo $m \leq n \leq m^2$ un peso igual a $\frac{1}{n}$. Ahora haremos preguntas de tal manera que no reduzcamos a la mitad aproximadamente el número de valores que todavía puede tomar n, sino la suma de sus pesos.

Calculemos aproximadamente cuántas preguntas se necesitarán para adivinar un n arbitrario en el intervalo $m \leq n \leq m^2$. Inicialmente, la suma de los pesos es aproximadamente igual a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m^2-1} = \ln m^2 - \ln m + O(1) = \ln m + O(1) \leq \ln n + O(1).$$

Si adivinamos n, llevaremos la suma de los pesos al valor $\frac{1}{n}$. Esto significa que la suma de los pesos disminuirá aproximadamente $n \ln n$ veces. Supongamos que logramos dividirlo exactamente por la mitad cada vez. Luego necesitaremos unos $\log_2(n \ln n) = \log_2 n + \log_2 \ln n$ pasos. Por lo tanto necesitaremos $\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n)$ preguntas en la segunda etapa. Esto termina la demostración.

□

Problema 36. Tenemos la sucesión dada por $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}$. Demuestra que todos los términos son enteros.

Solución. **Pistas:** Esta sucesión cumple una recurrencia lineal.

Hay que demostrar que

$$a_{n+2} = 4a_n - a_{n-2}.$$

Por inducción, vemos que se cumple para $n = 2$ ($a_4 = 3$). Suponiendo que se cumple para $n-1$,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + a_{n-2} &= \frac{1 + a_{n+1}a_n}{a_{n-1}} + a_{n-2} && \text{(Recurrencia)}\\
&= \frac{1 + a_{n+1}a_n + a_{n-2}a_{n-1}}{a_{n-1}}\\
&= \frac{1 + a_{n+1}a_n + a_n a_{n-3} - 1}{a_{n-1}} && \text{(Recurrencia)}\\
&= \frac{a_n}{a_{n-1}}(a_{n+1} + a_{n-3})\\
&= \frac{a_n}{a_{n-1}} 4a_{n-1} = 4a_n && \text{(Hipótesis de inducción)}
\end{aligned}$$

□

Problema 37. Tenemos $s_0 =$ 🐔. Para conseguir s_{i+1}, reemplazamos cada 🐔 por 🐔🐔🥚 y cada 🥚 por 🐔. Es decir,

🐔, 🐔🐔🥚, 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔, ...

Combinamos toda la sucesión en una ristra larga:

🐔🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 ...

1. ¿Cuál es el elemento 2024?
2. ¿En qué posición está el huevo nº 2024?
3. ¿En algún momento se vuelve periódica?

Solución. **Pistas:** Cuenta los pollos, los huevos, y calcula el límite de la proporción de huevos.

Llamemos sub a la operación sub(🐔) = 🐔🐔🥚 y sub(🥚) = 🐔. Llamemos $s_0 =$ 🥚, $s_1 =$ 🐔 y s_i a la i-ésima palabra de la lista. Demostramos por inducción que $s_{i+2} = s_{i+1}s_{i+1}s_i$: se cumple para $i = 0$. Si se cumple para i e $i-1$, entonces

$$s_{i+3} = \operatorname{sub}(s_{i+2}) \overset{\text{Hipótesis de inducción}}{=} \operatorname{sub}(s_{i+1}s_{i+1}s_i) = \operatorname{sub}(s_{i+1})\operatorname{sub}(s_{i+1})\operatorname{sub}(s_i) = s_{i+2}s_{i+2}s_{i+1}.$$

Es decir, que si p_i es el número de pollos en s_i y h_i el número de huevos,

$$p_{i+1} = 2p_i + p_{i-1}$$
$$h_{i+1} = 2h_i + h_{i-1}$$

Como la sucesión p_i empieza por $0, 1$ y h_i empieza por $1, 0, 1$, por inducción vemos que $h_{i+1} = p_i$.

Sabemos resolver una recurrencia, usando las raíces de $x^2 - 2x - 1$. Son $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Por tanto,

$$p_i = \frac{(1+\sqrt{2})^i - (1-\sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}; \quad h_i = p_{i-1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{i-1} - (1-\sqrt{2})^{i-1}}{2\sqrt{2}}.$$

Con la recurrencia podemos hacer una tabla hasta 2024:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
h_i	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985
$h_i + p_i$	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
$\sum_{j\leq i} h_j + p_j$	1	4	11	28	69	168	407	984	2377	

Entonces, el elemento 2024 está en la novena palabra, en la posición $2024 - 984 = 1040$ de $s_8 s_8 s_7$.

1040 de $s_9 = \overbrace{s_8}^{577}\overbrace{s_8}^{577}\overbrace{s_7}^{239}$

463 de $s_8 = \overbrace{s_7}^{239}\overbrace{s_7}^{239}\overbrace{s_6}^{99}$

224 de $s_7 = \overbrace{s_6}^{99}\overbrace{s_6}^{99}\overbrace{s_5}^{41}$

26 de $s_5 = \overbrace{s_4}^{17}\overbrace{s_4}^{17}s_3$

9 de $s_4 = \overbrace{s_3}^{7}\overbrace{s_3}^{7}\overbrace{s_2}^{3}$

2 de 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 = 🐔

Para el 2024º pollo, vemos que es el pollo número $2024 - 985 = 1039$ en s_{10}. Podemos hacer el mismo razonamiento, ahora contando pollos en vez de elementos

2377 puestos... 🐔1039 de $s_{10} = \overbrace{s_9}^{\text{🐔}985}\overbrace{s_9}^{\text{🐔}985}\overbrace{s_8}^{\text{🐔}408}$

+1393 🐔54 de $s_9 = \overbrace{s_8}^{\text{🐔}408}\overbrace{s_8}^{\text{🐔}408}\overbrace{s_7}^{\text{🐔}169}$

🐔54 de $s_6 = \overbrace{s_5}^{\text{🐔}29}\overbrace{s_5}^{\text{🐔}29}\overbrace{s_4}^{\text{🐔}12}$

+29 🐔25 de $s_5 = \overbrace{s_4}^{\text{🐔}12}\overbrace{s_4}^{\text{🐔}12}\overbrace{s_3}^{\text{🐔}5}$

+24 🐔1 de $s_4 =$ 🐔 $\cdots$

En total, es el puesto 3824.

Para ver que la sucesión no es periódica, calculemos el límite de la proporción de pollos a huevos. Vamos a escribir $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ y $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Entonces,

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} p_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j - \beta^j}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j - \sum_{j=0}^{n}\beta^j\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha - 1} + \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta - 1}\right)$$

$$H_n = \sum_{j=0}^{n} h_i = \sum_{j=0}^{n-1} p_i = P_{n-1}$$

Entonces,

$$\frac{P_n}{H_n} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} + \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}}{\frac{\alpha^{n}-1}{\alpha-1} + \frac{\beta^{n}-1}{\beta-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = 1+\sqrt{2}$$

Si la sucesión se volviera periódica, el límite sería racional. □

Problemas para hacer en casa

11 de octubre

Problema 38. El primer término de la sucesión es 934. Cada siguiente término es 13 multiplicado por la suma de las cifras del número anterior. Busca el término número 2025.

Solución. $a_n = 934, 208, 130, 52, 91, 130, ...$ A partir del sexto término los números se repiten en bucle de 3. Como $2025 \equiv 1(mod\ 3)$ el término $a_{2025} = 52$ □

Problema 39. La sucesión $a_n \in \mathbb{N}$ tiene la siguiente propiedad: para cualquier n la ecuación $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ tiene al menos una solución real.

1. ¿Existe una serie de 10 términos con esta propiedad?
2. ¿Una serie infinita?

Solución.

1. Sí. Por ejemplo,
$$1, 2^{10}, 2^{18}, 2^{24}, 2^{26}, 2^{26}, 2^{24}, 2^{18}, 2^{10}, 1$$

2. No. A partir de un determinado momento se convierte en serie monótona decreciente. Vamos a demostrarlo.

   Para que exista al menos una raíz real se debe dar $4a_{n-1}a_{n+1} \leqslant a_n^2$, lo que se puede reescribir como
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

   Esto implica
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1}{4^2} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leqslant ... \leqslant \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a_2}{a_1}$$

   lo que significa que para n que satisfacen $n > 1 + \log_4 \frac{a_2}{a_1}$ se da $a_{n+1} < a_n$, es decir, la sucesión es monótona decreciente. Pero una sucesión monótona decreciente de números naturales no puede ser infinita.

□

Problema 40. Tenemos la sucesión dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Demuestra que para todo k, $2^k | a_n$ si y sólo si $2^k | n$.

Solución. **Pistas:** Intenta escribir a_n en función de a_{n-m}, a_{n-m-1} para $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Fíjate en los coeficientes que aparecen.

Hay que demostrar por inducción en m que

$$a_{n+m} = a_n a_{m+1} + a_{n-1} a_m.$$

Para $m = 0$ es obvio, y para $m = 1$ es la recurrencia original. Suponiendo que se cumple para m,

$$\begin{aligned}
a_{n+m+1} &= a_{n+1}a_{m+1} + a_n a_m && \text{(Hipótesis de inducción aplicada a } n+1\text{)} \\
&= (2a_n + a_{n-1})a_{m+1} + a_n a_m && \text{(La recurrencia aplicada a } a_{n+1}\text{)} \\
&= a_n(2a_{m+1} + a_m) + a_{n-1}a_{m+1} \\
&= a_n a_{m+2} + a_{n-1}a_{m+1}. && \text{(La recurrencia aplicada a } a_{m+2}\text{)}
\end{aligned}$$

En particular, con $n = m$, tenemos que

$$a_{2n} = a_n(a_{n+1} + a_{n-1}).$$

La sucesión módulo 4 es $0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots$, y por tanto cuando n es par, $a_{n+1} + a_{n-1} \equiv 2$ módulo 4. Por inducción en k, se cumple lo que queremos: si 2^k es la máxima potencia que divide a n, a_{2n} tiene un 2 más, que viene del segundo factor, que es 2 módulo 4.

□

18 de octubre

Problema 41. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

está acotada.

Solución. **Pistas:** Busca una sucesión convergente mayor que esta

Considera la progresión geométrica

$$b_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$$

Cada término de esta suma es mayor que el término correspondiente de la suma de factoriales inversos, por lo que $a_n < b_n < 2$

□

Problema 42. Demuestra que la sucesión

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...\sqrt{2}}}}}_{n \text{ veces}}$$

está acotada.

Solución. **Pistas:** Busca una sucesión parecida, mayor y fácilmente calculable

Considera la sucesión

$$b_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...\sqrt{4}}}}}_{n \text{ veces}}$$

Es constante, $b_n = 2$ y, claramente, $a_n < b_n$.

□

Problema 43. Considera la sucesión S_n cuyo enésimo elemento es la primera cifra de 2^n, es decir, la sucesión comienza así:

$$2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ...$$

Por otro lado, considera la sucesión R_n cuyos elementos son las primeras cifras de las potencias de 5:

$$5, 2, 1, 6, 3, ...$$

Elegimos k términos consecutivos de la sucesión S_n de forma aleatoria y los escribimos en orden inverso obteniendo números $T_1, T_2, ..., T_k$. Demuestra que la sucesión R_n contiene la subsucesión T_k.

Solución. **Pistas:** $10 = 2 \cdot 5$, por eso la sucesión R_n es la sucesión de primeros dígitos no nulos de la sucesión $1/2, 1/4, 1/8, ...$

Fijémonos en que la sucesión R_n es la sucesión de los primeros dígitos no nulos de las potencias negativas de 2 $1/2, 1/4, 1/8, ...$ De esta manera necesitamos saber "mover" las potencias negativas a las positivas. Es decir, si demostramos la existencia de una potencia de 2 que empiece por $2^x = 1000000....$, entonces $2^{x-1} = 5000000...$, $2^{x-2} = 2500000....$, lo que implica que podremos encontrar cualquier subsucesión inversa de los primeros dígitos de las potencias de 5.

Procedamos a demostrar que para cualquier n existe una potencia de 2 que empieza por uno seguido de n ceros. Notemos que existen dos potencias de dos que empiezan por n dígitos iguales porque siempre podemos elegir más de 10^n potencias de 2, y por el principio del Palomar dos de ellas coincidiran en los primeros n dígitos. Vammos a llamarlos $2^m, 2^l, m > l$. Ahora pueden darse dos casos: o bien 2^{m-l} empieza por uno seguido de ceros, o bien el comienzo son todo nueves. En el segundo caso dupliquemos n y buscaremos otras potencias, $2^{m'}, 2^{l'}$ que coincidan en los primeros $2n$ dígitos. Si de nuevo el resultado de la división comienza por nueves, uno de los cocientes $2^{m'}/2^m, 2^{m'-l'}/2^{m-l}$ empezará por uno seguido de ceros, lo que demuestra el problema.

□

25 de octubre

Problema 44. Un número infinito de gigantes, cada uno de estatura distinta, ha formado una fila delante de la mesa del jurado. Demuestra que el jurado puede expulsar cierto número (quizás infinito) de gigantes de tal manera que los restantes sean infinitos y estén ordenados de mayor a menor o de menor a mayor.

Solución. **Pistas:** En el fondo tienes que demostrar que cada sucesión s_n de elementos distintos tiene una subsucesión monótona.

Llamemos s'_i la subsucesión que empieza en el término s_i y luego contiene todos los elementos de la serie s_n. Supongamos que existe una s'_i en la que no hay ningún elemento que sea superior a todos los demás. Elijamos un término aleatorio $m_1 \in s'_i$. Por la suposición hay un elemento $s_k \in s'_i$ mayor que m_1 (si no, m_1 sería superior a todos). Llamémoslo m_2. En la subsucesión s'_k,que empieza por m_2, tiene que haber un elemento mayor que m_2, y así sucesivamente. Hemos construido una subsucesión monótona creciente.

Ahora bien, supongamos que en cualquier subsucesión hay un elemento superior a todos los demás. Llamemos $sup_1 = s_k$ el elemento más grande de la serie original s_n. En la subserie s'_k, que empieza por sup_1 también hay un elemento s_l superior a los demás, llamémoslo sup_2. Claramente $sup_1 > sup_2$. En la subserie s'_l, que empieza por sup_2, también hay un elemento superior a los demás, y así sucesivamente. Hemos construido una subsucesión monótona decreciente.

□

Problema 45. Los números $1, 2, 3, ..., 100, 101$ están desordenados y escritos en fila. Demuestra que se pueden tachar 90 números de manera que los números restantes formen una sucesión monótona.

Solución. Sea la sucesión inicial s_n, llamemos x_k la longitud de la subsucesión creciente más larga con el primer término s_k, análogamente, sea y_k la subsucesión más larga decreciente con el primer término s_k. Supongamos que $\forall k\ x_k \leqslant 10, y_k \leqslant 10$. En este caso la cantidad total de parejas (x_k, y_l) debe ser menor de 100. Como tenemos 101 números, aplicando el principio del palomar, vemos que debe existir una pareja de índices $a < b$ tal que $x_a = x_b, y_a = y_b$. Sin embargo, el número s_a o bien es mayor que s_b o bien es menor que él, por lo que es imposible que se cumplan ambas igualdades. Contradicción.

□

Problema 46. Una sucesión de números naturales a_n se construye de la siguiente manera: a_0 es algún número natural; $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$, si a_n es divisible por 5; $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{5}a_n \rfloor$, si a_n no es divisible por 5. Demostrar que a partir de algún término, la secuencia a_n es creciente.

Solución. La condición es equivalente a que a partir de algún n, el número a_n no sea divisible por 5. Demostremos esto.

Mostremos que existen dos términos consecutivos de la secuencia que no son múltiplos de 5. Supongamos lo contrario. Entonces, para cualquier n, o bien a_{n+1} se obtiene dividiendo a_n entre 5, o bien a_{n+2} se obtiene dividiendo a_{n+1} entre 5. Notemos que siempre se cumple $a_{k+1} \leq \sqrt{5}a_k$, por lo tanto, $a_{n+2} \leq \frac{1}{5}\sqrt{5}a_n < a_n$. Esto significa que la secuencia de números naturales $a_1, a_3, a_5, \ldots$ decrece estrictamente. Esto es una contradicción.

Por lo tanto, existen a_k y a_{k+1} que no son divisibles por 5. Demostremos que a_{k+2} tampoco es múltiplo de 5. De manera similar, se puede deducir que $a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots$ no son divisibles por 5, que es lo que se requiere.

Sabemos que $a_{k+1} = \lfloor\sqrt{5}a_k\rfloor$ y $a_{k+2} = \lfloor\sqrt{5}a_{k+1}\rfloor$. Supongamos que $a_k = m$, entonces $a_{k+1} = \sqrt{5}m - \alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. De aquí, $a_{k+2} = \lfloor\sqrt{5}(\sqrt{5}m - \alpha)\rfloor = 5m + \lfloor-\sqrt{5}\alpha\rfloor$. Pero dado que $0 < \sqrt{5}\alpha < 3$, se tiene que $5m - 3 \leq a_{k+2} < 5m$, es decir, a_{k+2} no es divisible por 5.

□

8 de noviembre

Problema 47. ¿Existe el límite de la sucesión $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$?

Solución. **Pistas:** Demuestra que $x_n \geqslant \sqrt{a}$ para $n \geqslant 2$

Usando la desigualdad de Cauchy entre la media aritmética y la geométrica tenemos $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$, por lo que la sucesión está acotada por abajo. Veamos si es monótona:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$$

Por lo que la sucesión es decreciente y debe tener un límite l, para el que debería cumplirse

$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l})$$

Resolviendo tenemos $l = \sqrt{a}$.

□

Problema 48. Pensamos en todas las sucesiones de números reales **positivos** que cumplen que $a_0 = 1$ y $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. ¿Cuántas sucesiones distintas hay?

Solución. **Pistas:** Hay una.

Sea $F_0 = 0, F_1 = 1, \ldots$ la sucesión de Fibonacci. Demostremos por inducción que para $n \geq 1$, $a_{2n} = F_{2n-1} - F_{2n}a_1$ y $a_{2n-1} = F_{2n-1}a_1 - F_{2n-2}$. Suponiendo que se cumple para $2n$ y $2n-1$, con $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= (F_{2n-1}a_1 - F_{2n-2}) - (F_{2n-1} - F_{2n}a_1) && \text{(Hipótesis de inducción)} \\
&= (F_{2n-1} + F_{2n})a_1 - (F_{2n-1} + F_{2n-2}) \\
&= F_{2n+1}a_1 - F_{2n}. && \text{(Fibonacci)}
\end{aligned}$$

Y para el siguiente término,

$$\begin{aligned}
a_{2n+2} &= a_{2n} - a_{2n+1} \\
&= (F_{2n-1} - F_{2n}a_1) - (F_{2n+1}a_1 - F_{2n}) && \text{(Hipótesis de inducción, y la cuenta de arriba)} \\
&= (F_{2n-1} + F_{2n}) - (F_{2n} + F_{2n+1})a_1 \\
&= F_{2n+1} - F_{2n+2}a_1. && \text{(Fibonacci)}
\end{aligned}$$

Como la sucesión es positiva, esto significa que para todo n,

$$\frac{F_{2n+1}}{F_n} < a_1 < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}$$

Como ambas sucesiones tienden a $\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, la única posibilidad es que $a_1 = \alpha$. Entonces la sucesión es $a_n = \alpha^n > 0$.

□

Problema 49. En el paso 1 tenemos 1. En cada paso, cada vez que en el paso anterior encontramos n, escribimos $123\cdots n$, y al final añadimos el número del paso. Es decir, esta lista:

$$1, 12, 1123, 11121234, 1111211212312345, \ldots$$

Demuestra que en el paso n hay 2^{n-1} números. Demuestra que en el paso $n > 1$, la posición m tiene un 1 si y sólo si la posición $2^{n-1} - i + 1$ no tiene un 1.

Solución. El truco está en poner la sucesión en el triángulo de Pascal. A la izquierda escribimos 1, a la derecha $1, 2, 3, \ldots$, y en vez de sumar los dos números de encima, concatenamos.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{12} & & \boxed{3} & & & \\
 & & 1 & & 112 & & \boxed{12}\boxed{3} & & 4 & & \\
 & 1 & & 1112 & & 112123 & & 1234 & & 5 & \\
1 & & 11112 & & \cdots & & \cdots & & 12345 & & 6
\end{array}$$

Si tenemos una palabra w, escribamos $d(w)$ para referirnos a la palabra en la que sustituimos n por $12\cdots n$.

Demostremos por inducción en las filas que para cada palabra w del triángulo, la que tiene debajo y a la izquierda es $d(w)$. Supongamos que esto se cumple hasta una cierta fila. Para el último número de la fila está claro, así que vamos a suponer que w no es la última de la fila. Entonces, esta palabra es la concatenación de 2, $w = v_1v_2$, y además, por hipótesis de inducción, es $w = d(v_2)$. También por hipótesis de inducción, a la izquierda de w está $d(v_1)$. Entonces, debajo a su izquierda estará $d(v_1)d(v_2) = d(v_1v_2) = d(w)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & v_1 & & v_2 \\
d(v_1) & & \boxed{w} = v_1v_2 = d(v_2) & \\
 & \boxed{d(v_1)d(v_2)} & &
\end{array}$$

Entonces, la longitud total de una fila es la suma de las filas del triángulo de Pascal, que es 2^{n-1}, y los unos están en posición simétrica a los números distintos de 1, porque esto ocurre en la segunda fila. $\square$