PIM — Pequeño Instituto de Matemáticas 2024-25

Fechas: 11, 18, 25 de octubre y 8 de noviembre de 2024
Sucesiones I
Genérica **(Soluciones)**

Tus padres probablemente marcaban tu estatura en una pared. Y con toda seguridad tu médico de cabecera la apuntaba en tu ficha durante las revisiones anuales. Esta serie de números forma una **sucesión**, que en tu caso podría ser así:

$$e_1 = 50, e_2 = 75, e_3 = 87, e_4 = 95, e_5 = 103, ...$$

El subíndice aquí indica tu edad en años.

¿Qué podemos decir los matemáticos de esta sucesión? Primero, que va creciendo. Me vas a decir que es natural, porque ¡es lo que suelen hacer los niños! Pero un matemático puede sacar de allí conclusiones importantes, por ejemplo, que tu estatura a los dos años y medio era mayor que 87 cm pero menor que 95 cm, o que en algún momento entre los 3 y los 4 años medías exactamente un metro. Los principios que acabamos de usar son la monotonía y la continuidad: la monotonía garantiza que no decrezcamos en ningún momento y la continuidad, que nuestra estatura vaya pasando por todos los valores intermedios, que sea imposible medir 99 cm y en el momento siguiente 101 cm. Quizás estos principios te parezcan evidentes, pero son el fundamento del análisis matemático.

Pero volvamos a las sucesiones. Cada vez que decidimos empezar a apuntar ciertos datos nace una sucesión. La cotización diaria del Bitcoin nos genera una, y la temperatura del Atlántico, otra. Ambas series son finitas porque el tiempo de observación es finito. Las sucesiones matemáticas son infinitas: podemos encontrar cualquier elemento, o término, de cualquier sucesión aplicando determinadas reglas.

Ahora bien, ¿cómo podemos definir una sucesión? Piensa bien antes de leer la definición. Es infinita por la derecha. Tiene orden. Cada término de la serie tiene su "número"...

Una **sucesión**, o serie, es una regla que a cada número natural le asigna un número. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & \cdots & 3n+7 & \cdots \end{array}$$

Observa que escribir la regla como $3n + 7$ ocupa mucho menos papel que escribir infinitos números naturales. Muchas veces elegimos una letra para representar la sucesión, por ejemplo, s, y llamamos a los términos $s_1, s_2, \ldots$. En este ejemplo, podemos decir que $s_1 = 10, s_3 = 16$ y $s_n = 3n + 7$. O, lo que es lo mismo, $s_m = 3m + 7$, o también $s_{\text{🐵}} = 3\text{🐵} + 7$.

Problema 1. Encuentra una fórmula que describa cada una de estas sucesiones:

a) p_n es el n-ésimo número par.

b) i_n es el n-ésimo número impar.

c) q_n es el n-ésimo cuadrado perfecto.

d) f_n es el resultado de tomar n, restar 1, multiplicar por 2 y sumar 3.

e) d_n es la sucesión que empieza por 2 y cada término es el doble del anterior.

Hace casi dos siglos, en 1859, unos colonos llevaron a Australia 24 conejos. Estos animales se reproducen muy rápido: al mes de nacer ya son fértiles y a los dos meses pueden tener crías. El problema es que en Australia, donde no tienen depredadores que los cacen, su población se expandió tanto que ya a principios del siglo XX había ¡¡¡más de 10.000.000.000 ejemplares!!!

¡¿Cómo es posible?! A principios del siglo XIII Leonardo de Pisa (aka Fibonacci) estudió el siguiente problema: supongamos que cada pareja de conejos fértiles da a luz exactamente otra pareja de críos cada mes a partir de segundo mes desde su nacimiento.

Problema 2. Si al inicio del año hay una pareja de conejos recién nacidos, calcula cuántas habrá después de 12 meses. ¿Y 24?

En el siguiente dibujo se puede ver que la población de conejos sigue un patrón claro: A partir del segundo mes, en cada mes hay tantos conejos como había el mes anterior (siguen vivos) más las crías nuevas, que son tantas como conejos había hace dos meses (porque el mes anterior se han reproducido todas las parejas que son fértiles, es decir, las que tienen al menos dos meses):

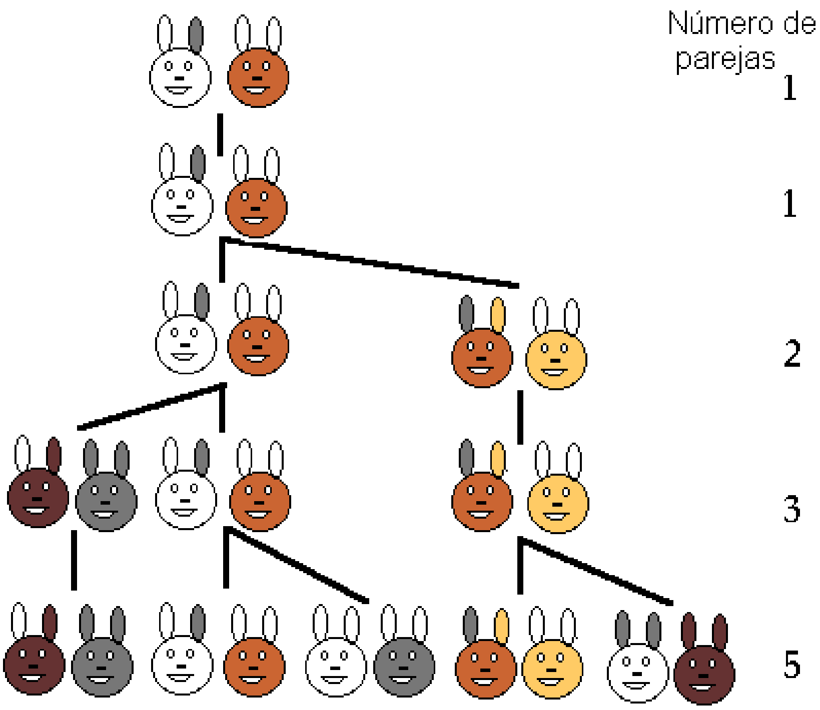


Figure 1: Población de conejos

Ejemplo resuelto. Si llamamos F_n al número de parejas que hay después de n meses, comprueba que en efecto $F_2 = F_1 + F_0, F_3 = F_2 + F_1, F_4 = F_3 + F_2, \ldots$. Convéncete de que $F_{1000} = F_{999} + F_{998}$. Convéncete de que para cualquier n, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Solución. Observa que si hablamos del mes n-ésimo, el mes anterior es $n-1$, y el anterior a éste es $n-2$. El número de *nuevas* parejas en el mes n es el mismo que el número de parejas que había en el mes $n-2$, porque éstas son las que en el mes $n-1$ son adultas.

$$\underbrace{F_n}_{\text{Parejas ahora}} = \underbrace{F_{n-1}}_{\text{Parejas que ya estaban el mes pasado}} + \underbrace{F_{n-2}}_{\text{Nuevas parejas}} .$$

$\square$

De esta manera, la sucesión de Fibonacci - una de las más famosas de la historia de la humanidad[1] - es definida por la relación $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$. Parece que crece lentamente, pero ya al cabo de un año serían 233, y al cabo de dos, ¡75025!

Hay varias maneras de definir una sucesión. La primera consiste en presentar una regla que la define como en el Problema **??**, o, como decimos a veces, hallar una **forma cerrada**. La segunda es expresar el siguiente término de la sucesión a través del anterior (o de los anteriores), como ocurre en el caso de Fibonacci.

Una **recurrencia**, o relación de recurrencia, es una ecuación que relaciona un término de una sucesión con otros anteriores.

Para definir bien una sucesión no es suficiente con definir una relación de recurrencia. Hay que establecer determinadas **condiciones iniciales**: los valores de los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo. La relación de recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2$ si fijamos $s_1 = 1$ nos crea la sucesión de impares $1, 3, 5, 7, ...$ pero si fijamos $s_1 = 0$ nos genera los números pares.

Ejemplo. $s_{n+1} = 2s_n + 1$ nos define una relación de recurrencia. Tomando el valor inicial $s_1 = 3$ obtenemos

$$s_2 = s_{1+1} = 2s_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$s_3 = s_{2+1} = 2s_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

y así sucesivamente.

Problema 3. ¿De cuántas formas se puede escribir un entero mayor o igual que 2 como suma ordenada de doses y treses? Por ejemplo, 9 se puede escribir como $2+2+2+3$, $2+2+3+2$, $2+3+2+2$, $3+2+2+2$ y $3+3+3$.

Solución. Sea s_n el número de formas de sumar $n+1$. Si $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$, hay una única forma, por tanto, $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Para cualquier otro n, es decir, para sumar $n+1$, puedo sumar $n-1$ de s_{n-2} formas posibles y después añadir 2, o sumar $n-2$ de s_{n-3} maneras y acabar sumando 3. Por tanto, $s_n = s_{n-2} + s_{n-3}$ $\square$

Sabiendo la forma cerrada que define una sucesión podemos fácilmente desarrollar una relación de recurrencia:

Ejemplo resuelto. ¿Qué relación de recurrencia corresponde a $s_n = n^3$?

Solución.

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Por tanto,

$$s_{n+1} = s_n + 3n^2 + 3n + 1$$

nos proporciona una recurrencia que define la sucesión si fijamos $s_1 = 1$.

Sin embargo, no es la única. Observemos que

$$(s_{n+2} - s_{n+1}) - (s_{n+1} - s_n) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6,$$

y por lo tanto la recurrencia

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - s_n + 6n + 2$$

nos define la misma sucesión si fijamos $s_1 = 1$ y $s_2 = 8$. $\square$

Problema 4. Encuentra otra relación de recurrencia para la sucesión $s_n = n^3$.

[1] Se descubrió 1000 años antes en India, pero eso no nos impide barrer para casa y decir que le pertenece a Fibonacci.

Solución. Observemos que

$$(s_{n+3} - 2s_{n+2} + s_{n+1}) - (s_{n+2} - 2s_{n+2} + s_n) = 6(n+1) - 6n = 6.$$

Por lo tanto,

$$s_{n+3} = 3s_{n+2} - 3s_{n+1} + s_n + 6$$

con los datos iniciales $s_1 = 1$, $s_2 = 8$ y $s_3 = 27$. □

Al revés, es decir, pasar de una relación de recurrencia a una forma cerrada no siempre es fácil. Pero en la mayoría de los casos es vital. Supongamos que necesitamos hallar el centésimo término de una sucesión... ¿realmente habrá que calcular primero los 99 términos anteriores? ¿No hay otra manera más directa?

Ejemplo resuelto. ¿Cuál es la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 2s_n + 1, s_1 = 3$?

Si analizamos los primeros términos, son

$$s_1 = 3, s_2 = 7, s_3 = 15, s_4 = 31, s_5 = 63, ...$$

Podemos ver que son potencias de dos menos 1, o sea

$$s_n = 2^{n+1} - 1$$

Ahora hallar el centésimo término está cantado, es $2^{101} - 1$

Problema 5. Busca la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 3s_n, s_1 = 2$. Escribe con una expresión matemática (sin calcular) el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo.

Solución. Es $s_n = 2 \cdot 3^n$. Como cada término siguiente es multiplicado por tres, es lógico pensar en una función exponencial, lo único que hay que hacer es "tunearla" para que s_1 sea igual a 2. La demostración en este caso es trivial.

□

Ejemplo resuelto. ¿Cómo siguen las siguientes series? Escribe un número más y encuentra su relación de recurrencia y, si puedes, su forma cerrada.

(a) $2, 8, 18, 32, 50$

(b) $2, 3, 7, 13, 27$

(c) $40, 40, 20, 60, 15, 75$

(d) $1, 11, 21, 1211, 111221, 312211$

(d) $335, 24, 12, 4, 6$

Solución. (a) Hay dos formas de determinar el siguiente número. La primera es directa, el doble del cuadrado, es decir, $a_n = 2n^2$. La segunda es recursiva: $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$. El siguiente número es el 72.

(b) Hay dos formas de determinar el siguiente número. La primera es: el doble del anterior menos uno, luego el doble del anterior más uno, y así en ciclo:

$$s_{2k+1} = 2s_{2k} + 1, s_{2k} = 2s_{2k-1} - 1$$

La segunda es el doble del penúltimo más el último:

$$s_{k+1} = 2s_{k-1} + s_k$$

El siguiente número es el 53.

(c) Cada número se obtiene multiplicando o dividiento el anterior por su posición, según estemos calculando el número en posición par o impar, respectivamente. Es decir:

$$s_{2n} = (2n-1)s_{2n-1}, \quad s_{2n+1} = s_{2n}/(2n),$$

con $s_1 = 40$. Teniendo esto en cuente:

$$s_{2n} = 40\frac{(2n-1)!}{(2n-2)!}, \quad s_{2n+1} = 40\frac{(2n-1)!}{(2n)!}.$$

El siguiente número es $75/6 = 25/2$.

(d) Cada término consiste en leer en voz alta el término anterior. Leemos 1 como "un 1", es decir, 11. Leemos 11 como "dos 1s", es decir, 21, y 312211 es "un 3, un 1, dos 2s, dos 1s", es decir, el siguiente término es 13112221.

(e) Cada número es la cantidad de letras que tiene el número anterior. El 6 tiene 4 letras, por lo que el siguiente término es 4 y la serie entra en bucle. Podemos escribir $s_{n+1} =$ nº de letras de s_n, con $s_1 = 335$.

□

En algunas de las sucesiones anteriores, hemos "adivinado" la forma cerrada. A continuación vamos a ver dos tipos de sucesiones donde la podemos encontrar fácilmente. No obstante, hay que destacar que existen sucesiones matemáticas bien definidas que, sin embargo, se resisten a las formalizaciones. Por ejemplo, la sucesión de números primos. No existe ninguna forma directa de calcular, pongamos, el milésimo número primo, ni tampoco una relación de recurrencia.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es constante, dicha cantidad llamada "diferencia de la progresión", "diferencia" o incluso "distancia".

Por ejemplo, la sucesión $3, 5, 7, 9, \ldots$ es una progresión aritmética de diferencia constante 2, así como $5, 2, -1, -4, \ldots$ es una progresión aritmética de diferencia constante -3.

Problema 6. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = 3$.

Solución. $a_n = a_{n-1} + 4 = a_{n-2} + 2 \cdot 4 = \cdots = a_1 + 4 \cdot (n-1) = 4n - 1$. □

Problema 7. Si a_n es la progresión aritmética de diferencia d, entonces

$$a_n = d \cdot (n-1) + a_1.$$

Solución. Si a_n es la progresión aritmética de diferencia d, entonces por la definición $a_{n+1} = a_n + d$. Por lo tanto si fijamos a_1, la sucesión está determinada de forma única. Pongamos $s_n = d \cdot n + a_1 - d$. Comprobamos que $s_1 = a_1$ y $s_{n+1} - s_n = d$. Por lo tanto, $s_n = a_n$ para todo n. □

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante no nula denominada "razón" o "factor" de la progresión.

Problema 8. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $a_{n+1} = 3s_n, a_1 = 2$. Escribe con una expresión matemática (sin calcular) el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo.

Solución. Es $a_n = 2 \cdot 3^n$. Como cada término siguiente es multiplicado por tres, es lógico pensar en una función exponencial, lo único que hay que hacer es "tunearla" para que a_1 sea igual a 2. La demostración en este caso es trivial.

□

Problema 9. Si a_n es la progresión geométrica de razón d, entonces

$$a_n = a_1 \cdot d^{n-1}$$

Solución. Si a_n es la progresión geométrica de razón d, entonces por la definición $a_{n+1} = d \cdot a_n$. Por lo tanto si fijamos a_1, la sucesión está determinada de forma única. Pongamos $s_n = a_1 \cdot d^{n-1}$. Comprobamos que $s_1 = a_1$ y $s_{n+1} = d \cdot s_n$. Por lo tanto, $s_n = a_n$ para todo n. □

Problema 10. Obtén la forma cerrada de la sucesión dada por la suma de los primeros n números naturales.

Solución. Si $s_n = 1 + 2 + \cdots + n$, podemos observar que

$$\begin{array}{rcccccc} s_n = & 1 & + & 2 & + \cdots + (n-1) + & & n \\ s_n = & n & + (n-1) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2s_n = & \multicolumn{6}{l}{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)} \end{array}$$

Por tanto, $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Problema 11. ¿Cuál es la forma cerrada de la sucesión $s_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$? ¿Y de $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$?

Solución. Podemos darnos cuenta de que

$$\begin{array}{rl} s_n = & 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \\ -x \cdot s_n = & \quad\;\; -x - x^2 + \cdots - x^{n-1} - x^n \\ \hline (1-x)s_n = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - x^n \end{array}$$

Por tanto, $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$. □

Problema 12. Una tortuga recorre cada día medio metro más que el día anterior. Si hoy comienza recorriendo 2 metros, ¿qué día llegará a estar a 100 metros del origen?

Otra tortuga, recorre cada día la mitad de la distancia del día anterior. Si hoy comienza recorriendo 3 metros, ¿qué día llegará a estar a 5,5 metros del origen? ¿Y si hoy recorre 2 metros y cada día dobla la distancia recorrida? ¿Y los 100 metros?

Solución. Sea a_n la sucesión de la distancia que recorre el día n, correspondiendo $n = 1$ a hoy. Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = 1/2$. Por tanto, $a_n = (n-1)/2 + 2 = n/2 + 3/2$. La sucesión de la distancia total recorrida durante los primeros n días será

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{1 + \cdots + n}{2} + \frac{3}{2}n = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{3n}{2} = \frac{n^2 + 5n}{4}.$$

Para saber el menor valor de n tal que $s_n \geq 100$, podemos resolver $n^2 + 5n = 400$. Pero dándonos cuenta de que $n(n+5) = 20^2$, podemos intuir que n debe estar próximo a 20. En particular, si $n = 17$, $n(n+5) = 374$ y si $n = 18$, $n(n+5) = 414$. Por tanto, la respuesta es *dentro de 18 días.*

En el segundo caso, a_n es una progresión geométrica de razón $1/2$ y por tanto, $a_n = 3/2^{n-1}$. Veamos ahora cómo es s_n. Utilizando el resultado anterior, tenemos que

$$s_n = 3\Big(1 + \frac{1}{2} + \big(\frac{1}{2}\big)^2 + \cdots + \big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}\Big) = 3\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 6\big(1 - \frac{1}{2^n}\big).$$

La solución es el menor n tal que $\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{12}$. Entonces $n = 4$.

En el último caso, $a_n = 2^n$ y $s_n = 2(2^n - 1)$. Necesitamos por tanto $2^n \geq 49$ y entonces, $n = 6$. □

Problema 13. Obtén la forma cerrada de la sucesión dada por la suma de los primeros n términos de

(a) una progresión aritmética de diferencia d,

(b) una progresión geométrica de razón d.

Solución. Utilizando los resultados anteriores, tenemos que

(a) $$s_n = \sum_{j=1}^{n}(d \cdot j + a_1 - d) = d\sum_{j=1}^{n} j + n(a_1 - d) = d\Big(\frac{n(n+1)}{2} - n\Big) + a_1 \cdot n = d\frac{n(n-1)}{2} + a_1 \cdot n,$$

(b) $$s_n = a_1 \sum_{j=1}^{n} d^{n-1} = a_1 \frac{d^n - 1}{d-1}.$$

□

El método de las diferencias

Problema 14. Continúa las siguientes series. Claramente van de fácil a difícil:

a) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

b) $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

c) $3, 5, 8, 12, 17, \ldots$

d) $4, 7, 12, 20, 32, \ldots$

e) $2, 6, 13, 25, 45, \ldots$

f) $0, 2, 8, 21, 46, \ldots$

Si lo has resuelto, te habrás dado cuenta de que en el problema anterior, la diferencia entre los términos consecutivos de una sucesión es la sucesión anterior. Esto es útil: nos puede servir para encontrar una fórmula para cada sucesión de las de arriba:

a) 1

b) $n + 1$

c) $\dfrac{n^2 + n + 4}{2}$

d) $\dfrac{n^3 + 11n + 12}{6}$

e) $\dfrac{n^4 - 2n^3 + 23n^2 + 26n}{24}$

f) $\dfrac{n^5 - 5n^4 + 45n^3 + 5n^2 - 46n}{120}$

La **sucesión de diferencias** d_n de la sucesión s_n se define como

$$d_n = s_{n+1} - s_n$$

Ejemplo. La sucesión de diferencias de $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ es $1, 1, 1, 1, \ldots$. La sucesión de diferencias de $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ es $1, 3, 5, 7, \ldots$

Podemos definir la **segunda sucesión de diferencias**, que es la sucesión de diferencias de la sucesión de diferencias, la tercera, etc.

Ejemplo. La segunda sucesión de diferencias de $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ es $2, 2, 2, 2, \ldots$, y la tercera sucesión de diferencias es $0, 0, 0, 0, ...$

Ahora bien, la sucesión de diferencias nos puede dar una idea acerca del comportamiento de la serie original.

Problema 15. Escribe la forma cerrada de una sucesión cuya primera sucesión de diferencias es constante. ¿Y si es la segunda sucesión de diferencias la que es constante?

Solución. En el primer caso, tenemos una progresión aritmética, es decir, $a_n = d \cdot (n-1) + a_1$, donde d es el valor constante de la primera sucesión de diferencias.

En el segundo caso, sabemos que la sucesión de diferencias de la sucesión $b_n = a_{n+1} - a_n$ es constante. Por tanto, $b_n = a_{n+1} - a_n = d \cdot n + r$, con d el valor de dicha constante y $r = a_2 - a_1 - d$. Entonces,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= r + d \cdot n \\ a_n - a_{n-1} &= r + d \cdot (n-1) \\ \cdots &= \cdots \\ a_3 - a_2 &= r + d \cdot 2 \\ a_2 - a_1 &= r + d \cdot 1 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_1 = r \cdot n + d(n + (n-1) + \cdots + 2 + 1) = r \cdot n + d\frac{n(n+1)}{2}$$

Por tanto, $a_n = a_1 + r(n-1) + d\frac{n(n-1)}{2}$. □

Teorema 1. *Si la primera sucesión de diferencias es constante, la serie original es lineal, es decir,* $s_n = an + b$.

Si la segunda sucesión de diferencias es constante, la serie original es un polinomio de grado dos de n*, es decir,* $s_n = an^2 + bn + c$.

Si la tercera sucesión de diferencias es constante, la serie original es un polinomio de grado 3, es decir, $s_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Generalizando, si la enésima sucesión de diferencias es constante, la serie es polinómica de grado n.

Para expresar el enésimo término de la serie podemos recurrir al **método de coeficientes indeterminados**, que consiste en introducir tantas incógnitas cuantos coeficientes tiene el polinomio que buscamos e ir dándole valores enteros $0, 1, 2, 3, ...$ hasta tener suficiente cantidad de ecuaciones y poder resolver el sistema.

Ejemplo resuelto. Consideremos la siguiente serie: $0, 2, 9, 21, 38, ...$ ¿Cuál es el centésimo término?

Solución. La primera sucesión de diferencias es $d_n = 2, 7, 12, 17, ...$ y la segunda, $d'_n = 5, 5, 5, ...$ Como es constante, podemos expresar la serie como polinomio de grado 2 $s_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} s_0 = 0 = c \\ s_1 = 2 = a + b + c \\ s_2 = 9 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tenemos $a = 2.5, b = -0.5$, por lo que $s_n = (5n^2 - n)/2$ y el centésimo término es $(50000 - 100)/2$. □

Problema 16. ¿Qué sucesión de diferencias coincide consigo misma?

Solución. Tenemos $s_{n+1} - s_n = s_n$, de ahí que $s_{n+1} = 2s_n, s_n = k \cdot 2^n, k \in \mathbb{R}$. □

Problema 17. Si la segunda sucesión de diferencias ha coincidido con la orignal, ¿cuál es la sucesión?

Solución. Tenemos $s_{n+2} + s_n - 2s_{n+1} = s_n$, de ahí que $s_{n+1} = 2s_n, s_n = k \cdot 2^n, k \in \mathbb{R}$. □

Problema 18. Escribe una lista de sucesiones: Escribe la sucesión $1, 1, 1, 1, \ldots$. Después de cada sucesión, escribe la sucesión que empieza por 1 y que tiene a la anterior como sucesión de diferencias (la siguiente sería $1, 2, 3, 4, \ldots$, y la siguiente $1, 3, 6, \ldots$). Escribe estas sucesiones en forma de un triángulo famoso.

Solución. Es el triángulo de Pascal, que tiene el nombre de un francés en homenaje a los persas, chinos e indios que lo estudiaron antes. También se le conoce como triángulo de Tartaglia, porque Italia está más cerca geográficamente. □

Problema 19. Encuentra una fórmula para una sucesión que tenga como sucesión de diferencias a estas ($\binom{n^2-n}{3+n}$ es una fórmula, ¿no?):

a) $d(a_n) = 1$

b) $d(b_n) = n$

c) $d(c_n) = \binom{n}{2}$

d) $d(d_n) = \binom{n}{3}$

e) $d(e_n) = \binom{n}{4}$

f) $d(f_n) = \binom{n}{m}$

Solución. a) $a_n = n$

b) $b_n = \binom{n}{2}$

c) $c_n = \binom{n}{3}$

d) $d_n = \binom{n}{4}$

e) $e_n = \binom{n}{5}$

f) $f_n = \binom{n}{m+1}$

□

Problema 20. Encuentra una fórmula para la suma de los cubos de los n primeros números naturales. Pista: su cuarta sucesión de diferencias es $6, 6, 6, \ldots$.

Solución. Vamos a calcular sus sucesiones de diferencias sucesivas.

1. La primera es $p_n = n^3$ (si empezamos por la suma de 0 cubos).
2. La segunda es $s_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.
3. La tercera es $t_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1 = 9n + 6$.
4. La cuarta es $c_n = 6$.

Sabiendo que la tercera sucesión de diferencias es $6\binom{n}{1} + 6\binom{n}{0}$, la segunda es $6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{1} + c$, donde c es algún número, que podemos encontrar si sabemos que con $n = 0$ tiene que valer 1: por tanto $c = 1$. Podemos comprobar que así es:

$$6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 6\frac{n(n-1)}{2} + 6n + 1 = 3n^2 + 3n + 1 = t_n.$$

Podemos seguir haciendo lo mismo:

$$p_n = 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 6\frac{n(n-1)}{2} + n = n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n + n = n^3.$$

Y por tanto, la suma de los cubos hasta $n-1$ es

$$6\binom{n}{4} + 6\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} =$$
$$n(n-1) \cdot \frac{(n-2)(n-3) + 4(n-2) + 2}{4} = n(n-1) \cdot \frac{n^2 - n}{4} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

□

Problemas

Problema 21. Trece pollitos estaban picoteando granos de trigo. El primero ha comido 60 granos, el segundo, 40, y cada siguiente pollito ha comido la media de los anteriores. ¿Cuántos granos ha comido el último?

Solución. Si a la media le sumamos la media, la nueva media no cambia. El último se ha comido 50 granos.

□

Problema 22. Consideremos la sucesión dada por $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Demuestra que $a_n = f_n + f_{n-2}$ para $n \geq 2$, donde f_n representa la sucesión de Fibonacci.

Solución. Demostrémoslo por inducción. Si $n = 2$, $a_2 = 2 + 1 = 3 = f_2 + f_0 = 2 + 1$. Ahora asumamos que el resultado se cumple para $1, 2, \ldots, n$. Entonces también se cumple para $n + 1$ ya que

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = f_n + f_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-3} = (f_n + f_{n-1}) + (f_{n-2} + f_{n-3}) = f_{n+1} + f_{n-1}.$$

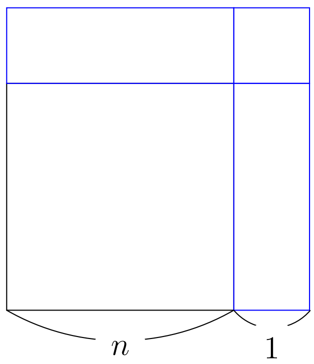
□

Problema 23. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2n + 1, s_1 = 1$. Demuéstralo.

Solución. Es $s_n = n^2$. La demostración es sencilla, pero para que sea correcta hay que hacerlo por inducción. Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, $s_k = k^2$. Entonces

$$s_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

y el centésimo número es el 10000. También se puede hacer una demostración gráfica:



□

Problema 24. Busca el vigésimo término de la serie $-2, -4, 0, -8, 2, 28$...

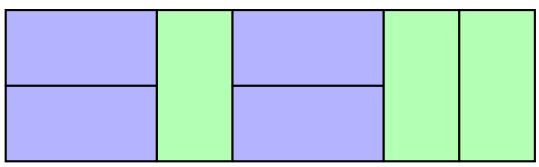
Solución. En este caso es constante la tercera sucesión de diferencias, así que podemos expresar la serie como polinomio de grado 3 $s_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

$$\left\{\begin{aligned} s_0 = -2 &= d \\ s_1 = -4 &= a + b + c + d \\ s_2 = 0 &= 8a + 4b + 2c + d \\ s_3 = -8 &= 27a + 9b + 3c + d \end{aligned}\right.$$

Resolviendo el sistema tenemos $s_n = n^3 - 4n^2 + n - 2, s_{20} = 6418$

□

Problema 25. Tenemos un pasillo de 2×7 metros cuadrados que queremos cubrir con baldosas de 1×2. Podemos colocar las baldosas en horizontal o en vertical, como en el dibujo:



¿Cuántas maneras de cubrir el pasillo hay?

Solución. Si colocamos una baldosa en horizontal debajo, no nos queda otro remedio que colocar otra horizontal encima de la primera, y viceversa. Por tanto, el problema de las baldosas es completamente isomorfo al de buscar maneras de bajar la escalera de uno en uno o de dos en dos. Colocar dos baldosas en horizontal equivale a bajar dos peldaños de la escalera, y colocar una vertical equivale a bajar uno. Vemos que la recurrencia es la misma: $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, y $s_7 = 21$.

□

Problema 26. Tenemos una sucesión infinita de números enteros positivos $s_1, s_2, s_3, \ldots$ que satisfacen que $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ para todo entero positivo n. Demuestra que existe un entero r tal que $s_n - r$ no es divisible por 8 para ningún $n \geq 1$.

Solución. $s_1, s_2, s_3 = s_1+s_2, s_4 = s_1+2s_2, s_5 = 2s_1+3s_2, s_6 = 3s_1+5s_2, s_7 = 5s_1+8s_2, s_8 = 8s_1+13s_2, s_9 = 13s_1+21s_2...$, así que módulo 8, tenemos $s_1, s_2, s_3 = s_1+s_2, s_4 = s_1+2s_2, s_5 = 2s_1+3s_2, s_6 = 3s_1+5s_2, s_7 = 5s_1, s_8 = 5s_2, s_9 = 5(s_1 + s_2), \ldots$ Vemos que $s_7, s_8, \ldots, s_{12}$ es 5 veces $s_1, s_2, \ldots, s_6$ (módulo 8). Por tanto, si escribimos la sucesión módulo 8 en filas de 6 elementos ($s_1, \ldots, s_6$ en la primera fila, $s_7, \ldots, s_{12}$ en la segunda,...), tenemos que cada fila es la anterior multiplicada por 5. Como $5^2 \equiv 1 \mod 8$, tenemos que la sucesión módulo 8 se repite con periodo 12.

$$\begin{array}{cccccc}
s_1 & s_2 & s_1+s_2 & s_1+2s_2 & 2s_1+3s_2 & 3s_1+5s_2 \\
5s_1 & 5s_2 & 5(s_1+s_2) & 5(s_1+2s_2) & 5(2s_1+3s_2) & 5(3s_1+5s_2) \\
s_1 & s_2 & s_1+s_2 & s_1+2s_2 & 2s_1+3s_2 & 3s_1+5s_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Por tanto, solamente tenemos que demostrar que entre los 12 primeros términos de la sucesión, hay a lo sumo 7 diferentes módulo 8, y escoger como r un entero entre 0 y 7 que no aparezca en nuestra tabla.

Si ninguno de los elementos de las dos primeras filas es 0, ya está. Si hay uno que es 0, los dos siguientes términos en la sucesión son iguales, y tenemos $0, c, c, 2c, 3c, 5c, 8c \equiv 0, 5c, 5c, 10c \equiv 2c, 7c, c, 8c \equiv 0$, como ya se empiezan a repetir, y sólo han aparecido $0, c, 2c, 3c, 5c, 7c$ (a lo sumo 6 valores distintos módulo 8), concluimos el resultado.

□

Problema 27. Se considera la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. ¿Existe una progresión aritmética

a) de longitud 5;

b) de longitud arbitrariamente grande,

compuesta por términos de esta secuencia?.

Solución. Consideremos una progresión descendente de n números naturales (por ejemplo, n, n–1, …, 1). Dividiendo todos sus términos por su mínimo común múltiplo, obtenemos una progresión de las fracciones que buscamos.

Por ejemplo para $n = 5$ obtendremos $\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}$.

□

Problema 28. Una sucesión de números que comienza con un número real positivo tiene la propiedad de que el número en el puesto $n+1$ es la longitud del perímetro del cuadrado cuya área es el número en el puesto n para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por ejemplo, si la secuencia empieza por 1, los primeros términos de la secuencia serían $1, 4, 8, 8\sqrt{2}, \ldots$

Si sabemos que los tres primeros términos están en progresión aritmética, ¿cuáles son los valores posibles para el primer término?

Solución. Sea a el primer término de la sucesión, el segundo es $4\sqrt{a}$, y el tercero es $8\sqrt[4]{a}$. Además, si están en progresión aritmética, se cumple que

$$4\sqrt{a} - a = 8\sqrt[4]{a} - 4\sqrt{a}.$$

Sea $x = \sqrt[4]{a}$. La ecuación anterior es equivalente a

$$x^4 - 8x^2 + 8x = 0$$

Factorizamos este polinomio y obtenemos que

$$x(x^3 - 8x + 8) = x(x-2)(x^2 + 2x - 4) = x(x-2)\left(x - (-1+\sqrt{5})\right)\left(x - (-1-\sqrt{5})\right) = 0$$

Como $\sqrt[4]{a} > 0$, las únicas posibilidades son $\sqrt[4]{a} = 2$ y $\sqrt[4]{a} = \sqrt{5} - 1$. Por tanto, los valores posibles para a son 16 y $(\sqrt{5} - 1)^4$.

Si el primer término es 16, todos los términos son 16, pero eso también es una progresión aritmética (de razón 0).

□

Problema 29. Isabel quiere aprovisionarse para una sesión larga de cine. En la tienda venden bolsas de palomitas por 2€, gusanitos por 1€ y chuches también por 2€. Isabel quiere gastar 11€ y va a hacer una lista con todas las combinaciones posibles... ¿cuántas son?

Solución. Claramente, necesitará comprar al menos una bolsa de gusanitos por 1€ porque las demás cantidades son pares. Ahora llamemos c_n la cantidad de maneras de gastar $2n$ euros. Claramente, $c_1 = 3$ porque puede comprar dos bolsas de gusanitos, o bien una de chuches o bien una de palomitas. Para hallar c_{n+1} notemos que de cualquier manera de gastar $2n$ euros podemos crear una de gastar $2n + 2$ comprando dos bolsas de gusanitos. Además, están las maneras de no comprar ninguna bolsa de gusanitos, que son $n+1$ (podemos comprar de 0 a n bolsas de palomitas, lo que determina la cantidad de bolsas de chuches). Nuestra recurrencia, por tanto, es $c_{n+1} = c_n + n + 1$, lo que nos genera números triángulares "movidos" una posición, $c_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$. Así que $c_5 = 21$.

□

Problema 30. Consideramos las sucesiones $a_1, \ldots, a_k$ que se forman a partir de k números naturales a_k (k es un número arbitrario positivo) y en las que para todo $1 \leq i \leq k - 1$ se cumple que $a_{i+1} > a_i^2$. Demuestra que hay menos de 2022 sucesiones de este tipo en las que el último término es igual a 2022.

Por ejemplo, todas las sucesiones de este tipo que terminan en 5 son:

$$1, 2, 5; \quad 2, 5; \quad 1, 5; \quad 5.$$

Solución. Probemos por inducción sobre n que para $n \geq 3$ el número de sucesiones que terminan en n es menor que n. La base de inducción $n = 3$ está claro. Supongamos ahora que $n \geq 4$.

(Para $n = 1$ y 2, el número de tales secuencias es n). Consideremos una secuencia $a_1, \ldots, a_k$ que termine en n y descartemos su último miembro $a_k = n$. Para todas las sucesiones con $k \geq 2$, obtenemos sucesiones que terminan en $1, 2, \ldots, m$, donde m es la parte entera de $\sqrt{n}$. Por lo tanto, por la hipótesis de inducción, el número de todas las secuencias que terminan en n no excede

$$1 + \sum_{i=1}^{m} i = 1 + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m^2 - m + 2}{2}$$

Para $n \geq 4$, este número es menor que $m^2 \leq n$.

□

Problema 31. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n,$$

para todo $n \geq 1$. Probar que a_n es un cuadrado perfecto para todo $n \geq 0$.

Solución. Recordemos que la sucesión de Fibonacci viene dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 1$. Probaremos que $a_n = F_n^2$ usando inducción. Para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ el resultado es cierto. Supongamos que se cumple para algún $n \geq 2$ y veamos que también se cumple para $n + 1$. En efecto, tenemos que

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} + \frac{a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}}{2} = (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0.$$

Luego $a_{n+1} = 2a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2}$ y basta probar que

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2,$$

lo cual es inmediato.

□

Problema 32. Una sucesión de números naturales a_n se construye de la siguiente manera: a_0 es algún número natural; $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$, si a_n es divisible por 5; $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor$, si a_n no es divisible por 5. Demostrar que a partir de algún término, la secuencia a_n es creciente, es decir, $a_{n+1} > a_n$ a partir de algún momento.

Solución. La condición es equivalente a que a partir de algún n, el número a_n no sea divisible por 5. Demostremos esto.

Mostremos que existen dos términos consecutivos de la secuencia que no son múltiplos de 5. Supongamos lo contrario. Entonces, para cualquier n, o bien a_{n+1} se obtiene dividiendo a_n entre 5, o bien a_{n+2} se obtiene dividiendo a_{n+1} entre 5. Notemos que siempre se cumple $a_{k+1} \leq \sqrt{5}a_k$, por lo tanto, $a_{n+2} \leq \frac{1}{5}\sqrt{5}a_n < a_n$. Esto significa que la secuencia de números naturales $a_1, a_3, a_5, \ldots$ decrece estrictamente. Esto es una contradicción.

Por lo tanto, existen a_k y a_{k+1} que no son divisibles por 5. Demostremos que a_{k+2} tampoco es múltiplo de 5. De manera similar, se puede deducir que $a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots$ no son divisibles por 5, que es lo que se requiere.

Sabemos que $a_{k+1} = \lfloor \sqrt{5}a_k \rfloor$ y $a_{k+2} = \lfloor \sqrt{5}a_{k+1} \rfloor$. Supongamos que $a_k = m$, entonces $a_{k+1} = \sqrt{5}m - \alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. De aquí, $a_{k+2} = \lfloor \sqrt{5}(\sqrt{5}m - \alpha) \rfloor = 5m + \lfloor -\sqrt{5}\alpha \rfloor$. Pero dado que $0 < \sqrt{5}\alpha < 3$, se tiene que $5m - 3 \leq a_{k+2} < 5m$, es decir, a_{k+2} no es divisible por 5.

□

Problema 33. Un empresario promete pagar a su trabajador un promedio de $\sqrt{x}$ euros por día. Para ello, cada día le paga 1 o 2 euros de tal manera que, para cualquier número natural n, la cantidad pagada en los primeros n días sea un número natural lo más cercano posible a $n \cdot \sqrt{x}$. Aquí están los valores de los primeros cinco pagos: 1, 2, 1, 2, 1. Demostrar que la secuencia de pagos no es periódica.

Solución. Sea S_n la cantidad pagada en los primeros n días. Según la condición, se tiene que $|S_n - n \cdot \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto $\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Supongamos que para $n > N$, la secuencia de pagos es periódica con periodo T. Entonces, por cada T días siguientes, el trabajador recibiría la misma cantidad entera de c pesetas, en particular,

$$S_{N+mT} = S_N + mc$$

para cualquier número natural m. Por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{S_{N+mT}}{N+mT} = \frac{S_N + mc}{N + mT} = \frac{c}{T}$$

lo que implica que $\sqrt{2} = \frac{c}{T}$, es decir, $\sqrt{2}$ es un número racional. Esto es una contradicción.

□

Problema 34. Sea $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ un conjunto que consiste en 30 números positivos distintos, y sea A_n (para $1 \leq n \leq 30$) la suma de todos los productos posibles de n elementos distintos del conjunto M. Demostrar que si $A_{15} > A_{10}$, entonces $A_1 > 1$.

Solución. Supongamos que $A_1 \leq 1$. Es suficiente demostrar que $A_{n+1} \leq A_n$ para cualquier $1 \leq n \leq 29$. Tenemos que $A_n \geq A_1 A_n$. Al multiplicar A_1 y A_n y al expandir los paréntesis, vemos que:

$$A_1 A_n = A_{n+1} + S_n,$$

donde S_n es la suma de todos los términos de la suma obtenida en los que aparece el cuadrado de uno de los x_i. Entonces, $S_n > 0$, de lo que se sigue lo requerido. □

Problema 35. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una secuencia creciente de números naturales. Se sabe que $a_{a_k} = 3k$ para cualquier k. Encontrar:

a) a_{100}

b) a_{2025}

Solución. a) Observamos de inmediato que la secuencia a_k es estrictamente creciente. En efecto, la suposición $a_k = a_{k+1} = n$ conduce a una contradicción: $a_n = 3k = 3(k+1)$.

Además, $a_1 > 1$ (de lo contrario, $a_{a_1} = a_1 = 1 \neq 3$). De aquí se sigue que $a_k > k$ para todos k. Por otro lado, $a_1 < a_{a_1} = 3$, por lo que $a_1 = 2$.

Calculamos los siguientes términos:

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 6, \quad a_6 = 9, \quad a_9 = 18, \quad a_{18} = 27, \quad a_{27} = 54, \quad a_{54} = 81, \quad a_{81} = 162, \quad a_{162} = 243.$$

Dado que $162 - 81 = 243 - 162$, tenemos que $a_k = 81 + k$ para todos los k desde 81 hasta 162. En particular, $a_{100} = 181$.

b) Sabemos que $a_{162} = 243$, $a_{243} = 486$, $a_{486} = 729$. Dado que $729 - 486 = 486 - 243$, tenemos que $a_k = 243 + k$ para todos los k desde 243 hasta 486. En particular, $a_{432} = 675$, por lo tanto $a_{675} = 1296$, $a_{1296} = 2025$, $a_{2025} = 3888$.

De manera análoga, se puede obtener la fórmula general:

$$a_n = \begin{cases} n + 3^m, 3^m \leq n \leq 2 \cdot 3^m, \\ 3(n - 3^m), 2^m \leq n \leq \cdot 3^{m+1}. \end{cases}$$

□

Problema 36. ¿Existe una sucesión estrictamente creciente de naturales a_n que cumpla que $a_{nm} = a_n + a_m$ para todos n y m?

Solución. **Pistas:** $n = 2$

No. Con $n = 2$, tenemos que $a_{2n} = a_n + a_2$, y si la sucesión es creciente, esto es imposible para $n > a_2$.

□

Problema 37. Tenemos la sucesión dada por $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}$. Demuestra que todos los términos son enteros.

Solución. **Pistas:** Esta sucesión cumple una recurrencia lineal.

Hay que demostrar que

$$a_{n+2} = 4a_n - a_{n-2}.$$

Por inducción, vemos que se cumple para $n = 2$ ($a_4 = 3$). Suponiendo que se cumple para $n - 1$,

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_{n-2} &= \frac{1 + a_{n+1}a_n}{a_{n-1}} + a_{n-2} && \text{(Recurrencia)} \\ &= \frac{1 + a_{n+1}a_n + a_{n-2}a_{n-1}}{a_{n-1}} \\ &= \frac{1 + a_{n+1}a_n + a_n a_{n-3} - 1}{a_{n-1}} && \text{(Recurrencia)} \\ &= \frac{a_n}{a_{n-1}}(a_{n+1} + a_{n-3}) \\ &= \frac{a_n}{a_{n-1}} 4a_{n-1} = 4a_n && \text{(Hipótesis de inducción)} \end{aligned}$$

□

Problema 38. Tenemos $s_0 =$ 🐔. Para conseguir s_{i+1}, reemplazamos cada 🐔 por 🐔🐔🥚 y cada 🥚 por 🐔. Es decir,

🐔, 🐔🐔🥚, 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔, ...

Combinamos toda la sucesión en una ristra larga:

🐔🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 ...

1. ¿Cuál es el elemento 2024?

2. ¿En qué posición está el huevo nº 2024?

3. ¿En algún momento se vuelve periódica?

Solución. **Pistas:** Cuenta los pollos, los huevos, y calcula el límite de la proporción de huevos.

Llamemos sub a la operación sub(🐔) = 🐔🐔🥚 y sub(🥚) = 🐔. Llamemos $s_0 =$ 🥚, $s_1 =$ 🐔 y s_i a la i-ésima palabra de la lista. Demostramos por inducción que $s_{i+2} = s_{i+1}s_{i+1}s_i$: se cumple para $i = 0$. Si se cumple para i e $i-1$, entonces

$$s_{i+3} = \operatorname{sub}(s_{i+2}) \overset{\text{Hipótesis de inducción}}{=} \operatorname{sub}(s_{i+1}s_{i+1}s_i) = \operatorname{sub}(s_{i+1})\operatorname{sub}(s_{i+1})\operatorname{sub}(s_i) = s_{i+2}s_{i+2}s_{i+1}.$$

Es decir, que si p_i es el número de pollos en s_i y h_i el número de huevos,

$$p_{i+1} = 2p_i + p_{i-1}$$
$$h_{i+1} = 2h_i + h_{i-1}$$

Como la sucesión p_i empieza por $0, 1$ y h_i empieza por $1, 0, 1$, por inducción vemos que $h_{i+1} = p_i$.

Sabemos resolver una recurrencia, usando las raíces de $x^2 - 2x - 1$. Son $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Por tanto,

$$p_i = \frac{(1+\sqrt{2})^i - (1-\sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}; \quad h_i = p_{i-1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{i-1} - (1-\sqrt{2})^{i-1}}{2\sqrt{2}}.$$

Con la recurrencia podemos hacer una tabla hasta 2024:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
h_i	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985
$h_i + p_i$	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
$\sum_{j \le i} h_j + p_j$	1	4	11	28	69	168	407	984	2377	

Entonces, el elemento 2024 está en la novena palabra, en la posición $2024 - 984 = 1040$ de $s_8s_8s_7$.

$$1040 \text{ de } s_9 = \overbrace{s_8}^{577}\overbrace{s_8}^{577}\overbrace{s_7}^{239}$$

$$463 \text{ de } s_8 = \overbrace{s_7}^{239}\overbrace{s_7}^{239}\overbrace{s_6}^{99}$$

$$224 \text{ de } s_7 = \overbrace{s_6}^{99}\overbrace{s_6}^{99}\overbrace{s_5}^{41}$$

$$26 \text{ de } s_5 = \overbrace{s_4}^{17}\overbrace{s_4}^{17}s_3$$

$$9 \text{ de } s_4 = \overbrace{s_3}^{7}\overbrace{s_3}^{7}\overbrace{s_2}^{3}$$

2 de 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 = 🐔

Para el 2024º pollo, vemos que es el pollo número $2024 - 985 = 1039$ en s_{10}. Podemos hacer el mismo razonamiento, ahora contando pollos en vez de elementos

2377 puestos...	🐔 1039 de $s_{10} = \overbrace{s_9}^{985}\ \overbrace{s_9}^{985}\ \overbrace{s_8}^{408}$
+1393	🐔 54 de $s_9 = \overbrace{s_8}^{408}\ \overbrace{s_8}^{408}\ \overbrace{s_7}^{169}$
	🐔 54 de $s_6 = \overbrace{s_5}^{29}\ \overbrace{s_5}^{29}\ \overbrace{s_4}^{12}$
+29	🐔 25 de $s_5 = \overbrace{s_4}^{12}\ \overbrace{s_4}^{12}\ \overbrace{s_3}^{5}$
+24	🐔 1 de $s_4 =$ 🐔 $\cdots$

En total, es el puesto 3824.

Para ver que la sucesión no es periódica, calculemos el límite de la proporción de pollos a huevos. Vamos a escribir $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ y $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Entonces,

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} p_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j - \beta^j}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha^j - \sum_{j=0}^{n} \beta^j \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} + \frac{\beta^{n+1} - 1}{\beta - 1} \right)$$

$$H_n = \sum_{j=0}^{n} h_i = \sum_{j=0}^{n-1} p_i = P_{n-1}$$

Entonces,

$$\frac{P_n}{H_n} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} + \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}}{\frac{\alpha^{n}-1}{\alpha-1} + \frac{\beta^{n}-1}{\beta-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = 1 + \sqrt{2}$$

Si la sucesión se volviera periódica, el límite sería racional. ☐

Problemas para hacer en casa

18 de octubre

Problema 39. Todas las mañanas Julia baja la escalera de su portal. La escalera tiene 10 peldaños, y Julia baja de uno en uno o de dos en dos. Procura inventar una nueva manera de bajar la escalera cada día. ¿Cuántos días puede variar las maneras de bajar la escalera sin repetir ninguna?

Solución. Llamemos s_n la cantidad de maneras de bajar una escalera de n peldaños. Fijémonos en el primer paso que da Julia. Puede ser de uno en uno o de dos en dos. En el primer caso, le quedan $n-1$ peldaños, que puede bajar de s_{n-1} maneras, en el segundo, le quedan $n-2$ y s_{n-2} maneras. Por tanto, la recurrencia que buscamos es la de Fibonacci: $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. Son 89 maneras.

☐

Problema 40. El primer término de la sucesión es 934. Cada siguiente término es 13 multiplicado por la suma de las cifras del número anterior. Busca el término número 2025.

Solución. $a_n = 934, 208, 130, 52, 91, 130, ...$ A partir del sexto término los números se repiten en bucle de 3. Como $2025 \equiv 1(mod\ 3)$ el término $a_{2025} = 52$

☐

25 de octubre

Problema 41. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}, s_1 = 1, s_2 = 3$. Indica el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo. ¿Se puede cambiar las condiciones iniciales para que esta sucesión sea constante?

Solución. Es $s_n = 2n - 1$. Vamos a demostrarlo por inducción. Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, $s_k = 2k - 1$. Entonces

$$s_{k+1} = 2(2k-1) - (2(k-1)-1)) = 2k+1 = 2(k+1) - 1$$

El centésimo número de la sucesión es, por tanto, 199. Para que esta sucesión sea constante, los dos primeros términos tienen que ser constantes.

□

8 de noviembre

Problema 42. Demuestra que para todo número entero positivo a existe algún término en la sucesión de Fibonacci que es divisible por a.

Solución. Consideramos la sucesión de Fibonacci módulo a, en la que sólo pueden aparecer números enteros del 0 al $a - 1$, ambos inclusive.

Veamos que esta sucesión es periódica. Como cada término sólo puede tomar a valores, necesariamente uno de estos valores tendrá que aparecer infinitas veces, y los valores de los términos siguientes no podrán ser todos distintos. Por tanto, habrá dos términos consecutivos que volverán a aparecer como términos consecutivos más adelante, y esto dará lugar a un periodo. Además, si se conocen los elementos F_k y F_{k+1} de la sucesión (los de la posición k y $k+1$ respectivamente, entonces $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ módulo a. Como la sucesión empieza por $1, 1$ y se repite con un cierto periodo, sea $k \geq 3$ tal que $F_k = F_{k+1} = 1$ (módulo a). Entonces, $F_{k-1} = 0$ módulo a, es decir, el elemento en la posición $k - 1$ de la sucesión de Fibonacci es divisible por a.

□