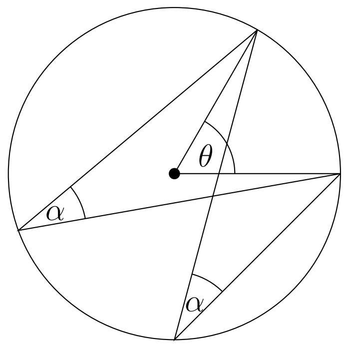
Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22, 29 de noviembre y 13 de diciembre de 2024
Geometría
Grupo: Mercurio (Soluciones)

Repaso: ángulos inscritos

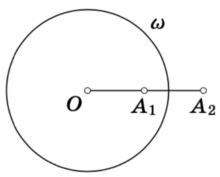
Teorema 1. *Sea α un ángulo inscrito en una circunferencia y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\alpha = \frac{\theta}{2}$.*



Problema 1. Prueba el teorema.

Inversión

Consideremos en el plano una circunferencia ω con centro en O y radio r, y un punto arbitrario A_1 distinto del punto O. Se dice que el punto A_2 es simétrico al punto A_1 con respecto al círculo ω con centro en O y radio r, si el punto A_2 está en el rayo OA_1 y $|OA_1| \cdot |OA_2| = r^2$.



De la definición se deducen directamente las siguientes afirmaciones.

a) Para cada punto del plano, excepto el centro O, existe un único punto simétrico respecto al círculo ω.

b) Para el centro O no existe ningún punto simétrico.

c) Si el punto A_2 es simétrico al punto A_1 con respecto a la circunferencia ω, entonces el punto A_1 también es simétrico al punto A_2 con respecto al círculo ω.

d) Cada punto que se encuentra en el círculo ω es simétrico consigo mismo.

e) Si A_1 y A_2 son puntos simétricos distintos, entonces uno de ellos está dentro del círculo ω, mientras que el otro está fuera.

Ahora podemos considerar una transformación del plano en sí mismo que lleva cualquier punto, excepto el centro O, a un punto simétrico a él respecto al círculo ω. Esta transformación se llama **inversión** del plano con respecto al círculo ω. Por ahora, dejaremos la pregunta sobre el destino del centro del círculo O abierta. Estudiaremos el plano con un punto excluido: la perforación en O. En este "plano perforado", la inversión está completamente y unívocamente definida para todos los puntos.

La inversión se puede visualizar como el resultado de "darle la vuelta" al plano a través del círculo ω. Todos los puntos del círculo de inversión permanecen en su lugar, todos los puntos que estaban dentro del círculo ω ahora están fuera, y todos los puntos que estaban fuera del círculo, ahora están dentro. Estos dos retratos de Hypatia están invertidos respecto de la circunferencia.

Ejemplo resuelto. Consideremos en el plano el punto A_1 que tiene coordenadas (x_1, y_1) y el círculo $\omega : x^2 + y^2 = r^2$. Encuentra las coordenadas (x_2, y_2) del punto A_2, que es simétrico al punto A_1 con respecto al círculo ω.

Solución. Las coordenadas (x_2, y_2) satisfacen dos ecuaciones

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}, (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = r^4.$$

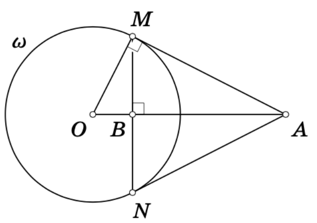
Pongamos $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$. Entonces, $\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)^2 = r^4$ y por eso $\alpha = \frac{r^2}{x_1^2+y_1^2}$. Por lo tanto concluimos que

$$x_2 = \frac{x_1 r^2}{x_1^2 + y_1^2}, \ y_2 = \frac{y_1 r^2}{x_1^2 + y_1^2}.$$

$\square$

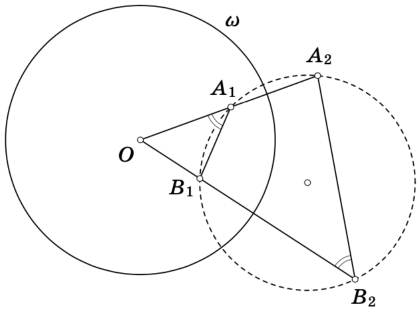
Esta fórmula tiene la siguiente interpretación geométrica en el plano complejo: si $r = 1$, entonces la inversión del punto $z \neq 0$ con respecto a la circunferencia unidad es $\frac{1}{\bar{z}}$.

Problema 2. Supongamos que el punto A está fuera de la circunferencia ω con centro en O, AM y AN son tangentes la circunferencia ω, las líneas OA y MN se cruzan en el punto B. Entonces, los puntos A y B son simétricos con respecto a la circunferencia ω.



Solución. De la semejanza de los triángulos rectángulos $\triangle OMA$ y $\triangle OVM$ se sigue la proporción $\frac{|OM|}{|OV|} = \frac{|OA|}{|OM|}$, o $|OA| \cdot |OV| = |OM|^2$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

Teorema 2. *Supongamos que A_1, A_2 y B_1, B_2 son pares de puntos diferentes, simétricos respecto a la circunferencia ω con centro en O. Entonces, $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$.*



Demostración. Sea r el radio de la circunferencia ω. Por la definición de puntos simétricos, $|OA_1| \cdot |OA_2| = r^2 = |OB_1| \cdot |OB_2|$, por lo tanto,

$$\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OB_2|}{|OA_2|}.$$

Por la proporcionalidad de los lados, se sigue la semejanza de los triángulos $\triangle OA_1B_1$ y $\triangle OA_2B_2$ por dos lados y el ángulo entre ellos. De la semejanza de los triángulos se deduce la igualdad de los ángulos: $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$. $\square$

La igualdad de estos ángulos también significa que el cuadrilátero $A_1A_2B_2B_1$ es inscrito, es decir, todas las cuatro puntos yacen en una misma circunferencia. Este hecho será útil más adelante para demostrar propiedades importantes de la inversión.

Problema 3. Decimos que un cuadrilátero es cíclico si existe una circunferencia S que contiene a los cuatro vértices del cuadrilátero.

a) Demuestra que si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180°$ y $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$.

b) Demuestra que si $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180°$ y $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Solución. a) Si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDA}$ son ángulos inscritos en una circunferencia, y sus correspondientes ángulos centrales suman $360°$. Por tanto, su suma será la mitad, es decir, $180°$. El argumento para $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$ es análogo.

b) Trazamos la circunferencia S que pasa por los vértices A, B y C (cuyo centro es la intersección de las mediatrices de los segmentos AB y BC). Asumimos que $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180$ y $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180$. El objetivo es demostrar que D está en la circunferencia S.

Sea h la altura del triángulo ACD que parte del vértice D. Hacemos una demostración por reducción al absurdo. Si D no está en S, tenemos dos posibilidades:

- D está fuera del círculo delimitado por S. En ese caso h corta a S. Llamamos D' al punto de intersección entre S y h, y observamos que $\widehat{CD'A} > \widehat{CDA}$.
- D está dentro del círculo delimitado por S. En ese caso, prolongamos el segmento h a partir de D, y llamamos D' a la intersección de esa prolongación con S. Observamos que $\widehat{CD'A} < \widehat{CDA}$.

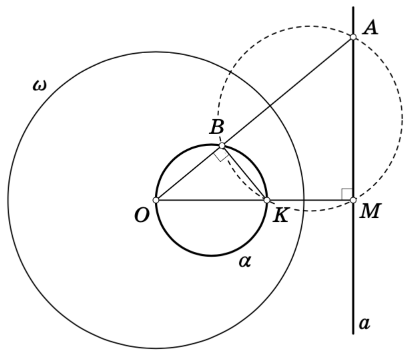
En cualquiera de estos dos casos, $ABCD'$ es cíclico, y por tanto $\widehat{ABC}+\widehat{CD'A}=180$. En particular, $\widehat{CD'A}=\widehat{CDA}$, y hemos llegado a una contradicción, que viene de asumir que D no está en S. Por tanto, D está en S.

$\square$

Problema 4. La recta que no pasa por el centro de la inversión se transforma en una circunferencia que pasa por el centro de la inversión.

Solución.

Sea ω una circunferencia, de radio r, O su centro y a una recta que no pasa por O. Dibujemos un perpendicular desde el centro O a la recta a que cruza la recta en el punto M y consideremos el punto K que es simétrico al punto M respecto a la circunferencia. Construyamos una circunferencia α con diámetro OK. Consideremos una recta arbitraria que pasa por el centro O y que no es paralela a la recta a. Supongamos que esta recta corta la circunferencia α en el punto B y la recta a en el punto A.



El ángulo en el vértice B es recto, ya que se apoya sobre el diámetro. De la semejanza de los triángulos rectángulos $\triangle OBK$ y $\triangle OMA$ obtenemos $|OA|\cdot|OB|=|OM|\cdot|OK|$. Dado que los puntos M y K son simétricos por construcción, $r^2=|OM|\cdot|OK|=|OA|\cdot|OB|$. Por lo tanto, los puntos A y B también son simétricos con respecto a la circunferencia ω. Por lo tanto, la recta a y la circunferencia α se transforman una en la otra durante la inversión.

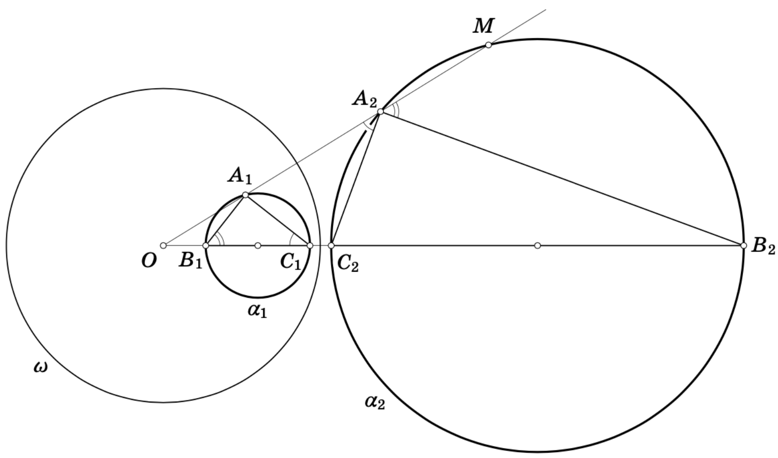
Si la recta original es tangente a la circunferencia, los puntos M y K coinciden y la demostración pierde validez. ¿Cómo se puede modificar la demostración para este caso específico? $\square$

Es especialmente fácil construir la imagen de una recta que intersecta la circunferencia de inversión. Dado que los puntos de la circunferencia de inversión permanecen fijos, es suficiente trazar una circunferencia que pase por el centro de la inversión y dos puntos de intersección de la circunferencia de inversión y la recta original.

El ejercicio anterior se puede formular de otra manera: una circunferencia que pasa por el centro de inversión se transforma en una recta que no pasa por el centro de inversión. Ahora parece natural aplicar la inversión a cualquier circunferencia.

Problema 5. La circunferencia que no pasa por el centro de la inversión se transforma en una circunferencia que tampoco pasa por el centro de la inversión.

Solución. Consideremos la inversión respecto a la circunferencia ω y una circunferencia α_1 que no pasa por el centro de la inversión O .



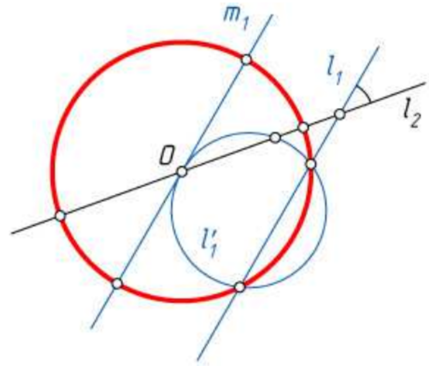
Tracemos una recta que pasa por los centros de las circunferencias α_1 y ω. Esta recta corta la circunferencia α_1 en los puntos diametralmente opuestos B_1 y C_1. Construyamos los puntos B_2 y C_2, simétricos a los puntos B_1 y C_1 respecto a la circunferencia w, y consideremos la circunferencia α_2 construida sobre el diámetro B_2C_2. Ahora, demostraremos que los puntos simétricos a los puntos de la circunferencia α_1 están ubicados en la circunferencia α_2, y viceversa.

Tomemos un punto arbitrario A_1 en la circunferencia α_1 y construyamos el punto A_2, simétrico a A_1 respecto a la circunferencia ω. Luego, apliquemos el Teorema 2 a los dos cuartetos de puntos: A_1, A_2, B_1, B_2 y A_1, A_2, C_1, C_2. El primer cuarteto implica la igualdad de los ángulos $A_1B_1C_1$ y B_2A_2M, y el segundo cuarteto implica la igualdad de los ángulos $A_1C_1B_1$ y C_2A_2O. Como el triángulo $A_1B_1C_1$ es rectángulo (debido a que B_1C_1 es un diámetro de la circunferencia), entonces $\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 = 90°$, por lo tanto, $\angle B_2A_2M + \angle C_2A_2O = 90°$. De esta última igualdad se sigue que el ángulo $B_2A_2C_2$ es recto y, por lo tanto, el punto A_2 está ubicado en la circunferencia α_2 con diámetro B_2C_2, que era lo que se quería demostrar.

En el dibujo proporcionado, las circunferencias α_1 y a_2 no se cruzan con la circunferencia de inversión ω y no contienen su centro. La demostración, por supuesto, sigue siendo válida para cualquier disposición diferente de las circunferencias, aunque el diagrama se vuelve un poco más complicado. Intenta seguir todos los pasos de la demostración por sí mismo en los casos restantes. □

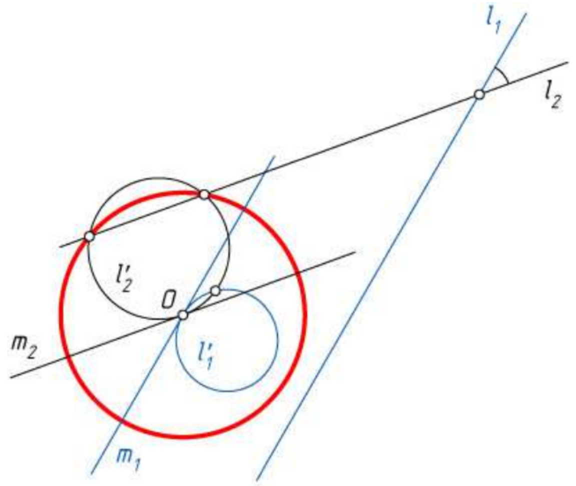
Problema 6. Demuestra que la inversión conserva el ángulo entre circunferencias (entre una circunferencia y una recta, y entre rectas).

Solución.



Sean las rectas l_1 y l_2 que se intersectan en el punto O. En una inversión respecto a una circunferencia con centro en O, cada una de estas rectas se transforma en sí misma, por lo que el ángulo entre ellas se conserva.
Si las rectas se intersectan en un punto M, distinto del centro O de la inversión, y el centro de la inversión se encuentra en una de las rectas (por ejemplo, en l_2), entonces la recta l_2 se transforma en sí misma, y la recta l_1 en una circunferencia l'_1, que pasa por el centro de la inversión.

Sea m_1 la tangente a esta circunferencia en el punto O. Si aplicamos la misma inversión nuevamente, la circunferencia l'_1 se transforma en la recta l_1, y la recta m_1 en sí misma, ya que pasa por el centro de la inversión. Al mismo tiempo, O es el punto de tangencia entre la recta m_1 y la circunferencia l'_1, lo que implica que bajo la inversión con centro en O, estas se transforman en un par de rectas paralelas, de modo que $m_1 \parallel l_1$. En consecuencia, el ángulo entre la recta l'_2 (que coincide con l_2) y la tangente m_1 a la circunferencia l'_1 es igual al ángulo entre las rectas l_1 y l_2.



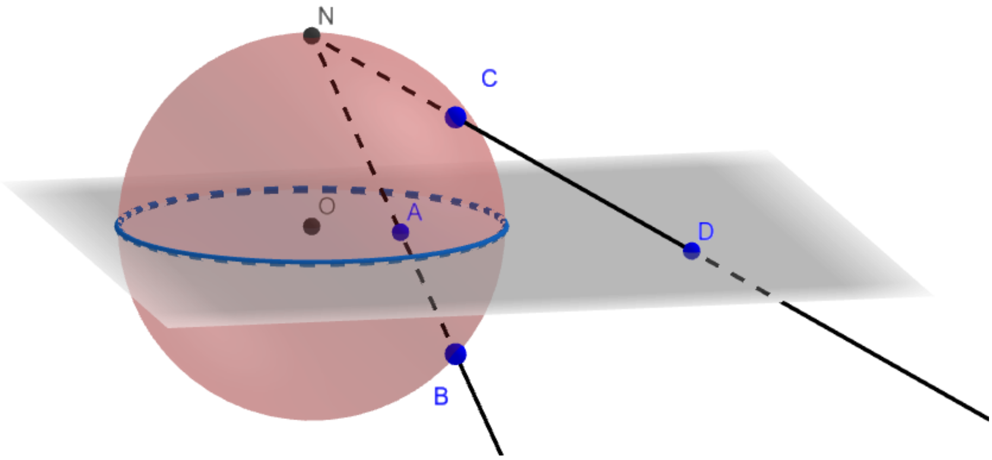
Ahora, si el centro de la inversión no está en ninguna de las rectas l_1 y l_2, entonces las imágenes de estas rectas son las circunferencias l'_1 y l'_2, que pasan por el centro de la inversión.

Sean m_1 y m_2 las tangentes a estas circunferencias en el punto O. Si aplicamos la misma inversión una vez más, la circunferencia l'_1 y su tangente m_1 se transforman en un par de rectas paralelas l_1 y m_1, mientras que la circunferencia l'_2 y su tangente m_2 se transforman en un par de rectas paralelas l_2 y m_2. Por lo tanto, el ángulo entre las circunferencias l'_1 y l'_2 es igual al ángulo entre las rectas l_1 y l_2.

De manera similar, se demuestra que la inversión conserva el ángulo entre una circunferencia y una recta.

□

Problema 7. Demuestra que la inversión se puede calcular así: Tenemos un punto A y una circunferencia $\mathcal{S}$. Consideramos la esfera que tiene a $\mathcal{S}$ como ecuador, y llamamos N al punto de la esfera más alejado del plano. Unimos A con N, e intersecamos esta recta para encontrar un punto B en la esfera. Dibujamos C, el simétrico de B respecto del plano. Entonces, unimos N con C e intersecamos esta recta con el plano para encontrar D, que es el punto simétrico de A respecto de S.



Solución. **Pistas:** Encuentra un plano que contiene todo lo relevante, y resuelve un problema plano.

Consideramos el plano que contiene al centro de la esfera, a A y a N, que es perpendicular al plano original. B está en este plano, porque está alineado con NA. C también está en el plano, porque la recta BC es perpendicular al plano original, y D también está en el plano porque NCD están alineados. En particular, esto demuestra que OAD están alineados, porque están en este nuevo plano y el original.

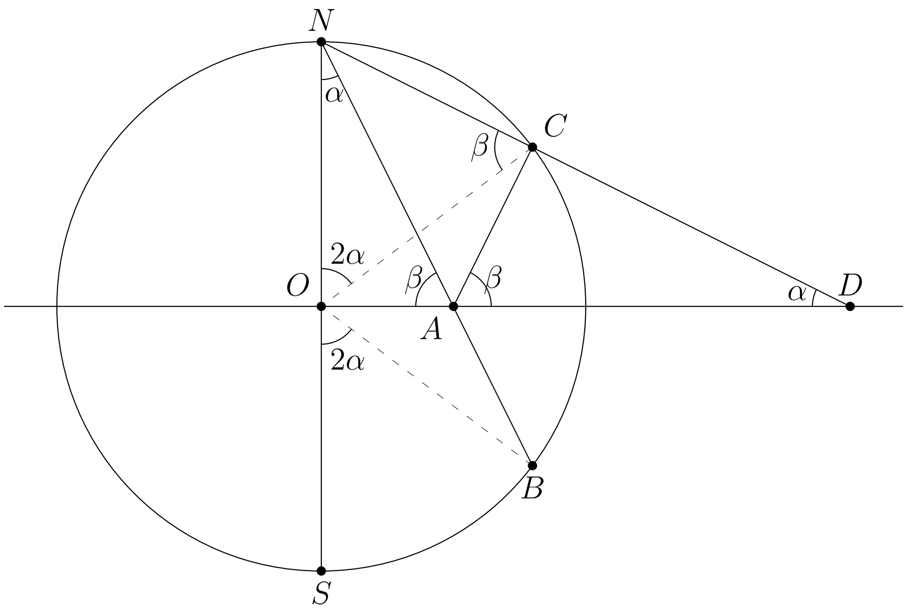
Queremos demostrar que $OA \cdot OD = ON^2$.

Llamemos $\alpha = \angle ONA$ y $\beta = \angle NAO$ (por lo que $\alpha + \beta = 90°$). Entonces, $\angle BAD = \beta$, porque es opuesto a $\angle NAO$, y $\angle DAC = \beta$, porque es simétrico de $\angle BAD$.

Ahora bien, si llamamos S al punto opuesto a N, tenemos que $\angle SAB = 2\alpha$, por ser el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito $\angle SNB = \angle ONA$. Entonces, el ángulo simétrico $\angle CON$ también es 2α. Como el triángulo ΔCON es isósceles, los otros dos ángulos miden ambos β.

Finalmente, $\angle ODN = 180° - \angle OND - \angle DON = 90° - \angle OND = 90° - \beta = \alpha$. Concluimos que $\angle ACD = 90°$, sumando los ángulos de ΔACD.

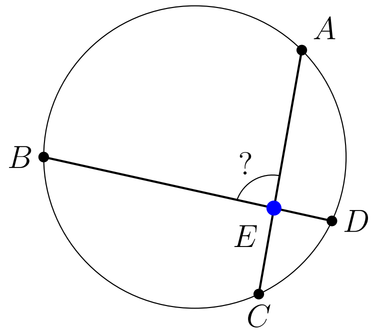
Entonces, $\Delta ONA \sim \Delta ODN$, por tener sus ángulos iguales, y por tanto $\frac{ON}{OA} = \frac{OD}{ON}$.



$\square$

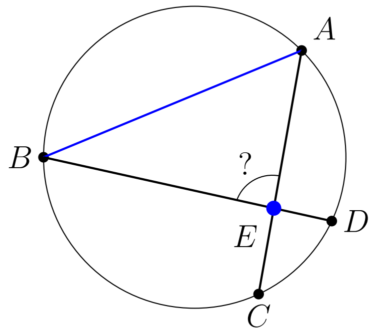
Problemas

Problema 8.



Sabiendo cuánto miden los arcos $\overset{\frown}{AD} = 64°, \overset{\frown}{BC} = 146°$, halla el ángulo $\angle AEB$.

Solución.



Tracemos el segmento AB. Por ser inscritos, $\angle ABE = 64°/2 = 32°, \angle BAE = 146°/2 = 73°$, por lo que el ángulo que buscábamos mide $\angle AEB = 180° - (32° + 73°) = 75°$. □

Problema 9. Los puntos A, B, C, D están colocados en este orden en una circunferencia. Llamemos K, L, M, N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$. Demuestra que las cuerdas MK, LN son perpendiculares.

Solución. Llamemos O el punto de intersección de MK, LN. Sabemos que (véase un problema similar)

$$\angle KOL = \frac{\overset{\frown}{KL} + \overset{\frown}{MN}}{2} = \frac{\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}}{2}}{2} = 360° : 4 = 90°$$

□

Problema 10. A través de un punto A se traza una línea l que intersecta la circunferencia S con centro O en los puntos M y N, y no pasa por O. Sean M' y N' los puntos simétricos de M y N respecto a OA, y sea A' el punto de intersección de las líneas MN' y $M'N$. Demuestre que A' coincide con la imagen de A bajo la inversión respecto a S (y, por lo tanto, no depende de la elección de la línea l).

Solución. Supongamos que el punto A está fuera de S. Entonces, A' se encuentra dentro de S y

$$\angle MA'N = \frac{\smile MN + \smile M'N'}{2} = \smile MN = \angle MON,$$

es decir, el cuadrilátero $MNOA'$ está en una circunferencia. Sin embargo, bajo la inversión respecto a S, la línea MN se transforma en una circunferencia que pasa por los puntos M, N y O. Por lo tanto, el punto A^* (imagen de A bajo la inversión) se encuentra en la circunferencia circunscrita del cuadrilátero $MNOA'$. Por las mismas razones, los puntos A' y A^* también pertenecen a la circunferencia que pasa por M', N' y O. Pero estas dos circunferencias no pueden tener otros puntos en común más allá de O y A'. Por lo tanto, $A^* = A'$.

En el caso en que A se encuentra dentro de S, aplicamos el argumento anterior a la línea MN' y al punto A' (que ahora está fuera de S). Obtenemos entonces que $A = (A')^*$, y por lo tanto, $A' = A^*$. □

Problema 11. Demuestre que los círculos tangentes (un círculo y una línea) se transforman bajo una inversión en círculos tangentes o en un círculo y una línea, o en un par de líneas paralelas.

Solución. Si el punto de tangencia no coincide con el centro de inversión, después de la inversión estos círculos (círculo y línea) seguirán teniendo un punto en común, es decir, la tangencia se conservará.

Si los círculos con centros en A y B son tangentes en el punto O, entonces, bajo la inversión con centro en O, se transformarán en un par de líneas perpendiculares a AB. Finalmente, si la línea l es tangente en el punto O al círculo con centro en A, bajo la inversión con centro en O la línea l se transformará en sí misma, mientras que el círculo se convertirá en una línea perpendicular a OA. En cada uno de estos casos obtenemos un par de líneas paralelas. $\square$

Problema 12. Construye, usando solo regla y compás, una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas y pase por un punto dado, que está situado fuera de estas circunferencias.

Solución. Supongamos que la circunferencia buscada S ha sido construida, es decir, que la circunferencia S es tangente a las circunferencias dadas S_1 y S_2 y pasa por el punto dado O, que está fuera de las circunferencias S_1 y S_2.

Al aplicar una inversión respecto a una circunferencia de radio arbitrario con centro en O, la circunferencia S, que pasa por el centro de inversión, se transformará en una recta S' tangente a las circunferencias S_1' y S_2', que son las imágenes de las circunferencias S_1 y S_2 bajo esta inversión y que no pasan por el centro de inversión. De aquí se deriva el siguiente método de construcción.

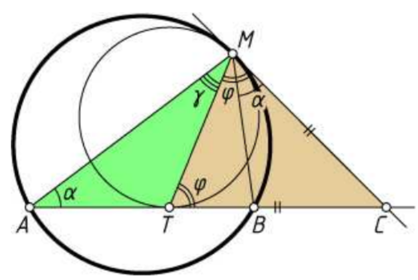
Construimos las circunferencias S_1' y S_2', que son las imágenes de S_1 y S_2 bajo la inversión con respecto a una circunferencia con centro O. Luego, trazamos las tangentes comunes a las circunferencias construidas y aplicamos nuevamente la misma inversión. Así, cada una de las tangentes comunes construidas se transformará en una circunferencia que pasa por el centro de inversión O y es tangente a las circunferencias S_1 y S_2.

El problema tiene cuatro soluciones (según el número de tangentes comunes que se pueden trazar entre dos circunferencias, siempre que una de ellas esté fuera de la otra).

$\square$

Problema 13. Lema de Arquímedes. Dos circunferencias son tangentes internamente en un punto M. Sea AB una cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia menor en el punto T. Demuestre que MT es la bisectriz del ángulo $\angle AMB$.

Solución. **Pistas:** Extiende el rayo AB hasta que cruce la tangente común en el punto C; $\angle CTM = \angle MAT + \angle AMT$ (o considera la homotecia con centro en M que transforma la circunferencia menor en la mayor).



Primer método. Sea el rayo AB que corta la tangente común a las circunferencias en el punto C (con B entre A y C). Denotemos

$$\angle CMT = \varphi, \quad \angle CMB = \alpha, \quad \angle AMT = \gamma.$$

Entonces, $CM = CT$ como segmentos de tangentes desde el punto C a la circunferencia. Por lo tanto, el triángulo MCT es isósceles. Según el teorema del ángulo entre la tangente y la cuerda, tenemos que

$$\angle MAT = \angle CMB = \alpha.$$

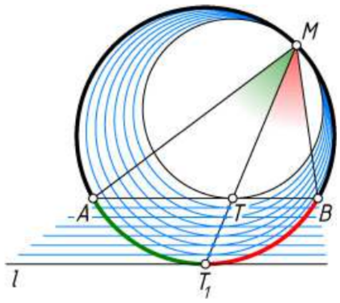
Por lo tanto,

$$\angle CTM = \angle CMT = \varphi, \quad \angle MTB = \alpha + \gamma = \varphi$$

(ángulo externo del triángulo AMT). Entonces,

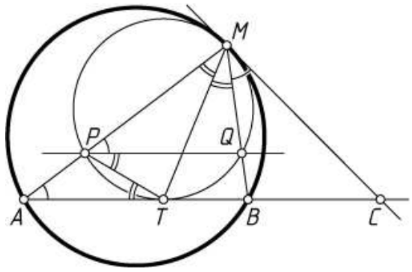
$$\angle TMB = \varphi - \alpha = \gamma.$$

Segundo método. Consideremos la homotecia con centro en M que transforma la circunferencia menor en la mayor. La tangente AB a la circunferencia menor se transforma en una tangente paralela l a la circunferencia mayor.



El punto de tangencia T se transforma en el punto de tangencia T_1 de la recta l con la circunferencia mayor. Como l es tangente, es perpendicular al radio que pasa por T_1. Como AB es paralela a l, también es perpendicular al radio, y por tanto $AT_1 = BT_1$. Así, los puntos M, T y T_1 están alineados, y T_1 biseca el arco AB que no contiene a M. Por lo tanto, los ángulos inscritos $\angle AMT_1$ y $\angle BMT_1$ son iguales, ya que se apoyan en arcos iguales. Así, MT es la bisectriz del ángulo $\angle AMB$.

Tercer método. Supongamos que el rayo AB corta la tangente común a las circunferencias en el punto C (con B entre A y C), y que los rayos MA y MB intersectan la circunferencia menor en los puntos P y Q respectivamente. Según el teorema del ángulo entre la tangente y la cuerda, tenemos que



$$\angle MAB = \angle MAT = \angle CMB = \angle CMQ = \angle MPQ,$$

lo que implica que $PQ \parallel AB$. Por lo tanto,

$$\angle BMT = \angle QPT = \angle ATP = \angle PMT = \angle AMT.$$

Esto es lo que se quería demostrar.

□

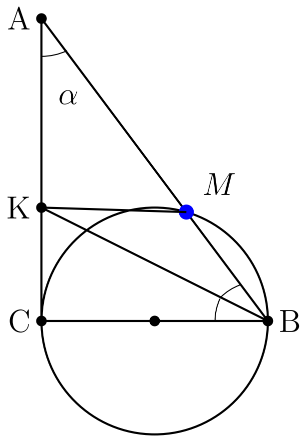
Problema 14. Supongamos que ningún conjunto de tres puntos de los cuatro puntos A, B, C, D es colineal. Demuestra que el ángulo entre las circunferencias circunscritas de los triángulos ABC y ABD es igual al ángulo entre las circunferencias circunscritas de los triángulos ACD y BCD.

Solución. Realicemos una inversión con centro en A. Los ángulos que nos interesan serán entonces iguales al ángulo entre las rectas B^*C^* y B^*D^*, y al ángulo entre la recta C^*D^* y la circunferencia circunscrita del triángulo $B^*C^*D^*$. Ambos ángulos son iguales a la mitad del arco C^*D^*.

□

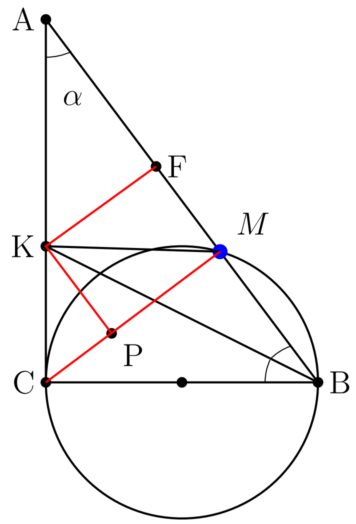
Problema 15.

En el triángulo $\triangle ABC$ sabemos que $\angle C = 90°, \angle A = \alpha$. La bisectriz del ángulo B corta AC en el punto K. BC es el diámetro de la circunferencia que corta la hipotenusa AB en el punto M. Busca $\angle AMK$.



Solución.

Pista: Sean F, P las proyecciones del punto K sobre AB, CM. Demuestra y usa el hecho de que $KF = KC, KP = FM$.

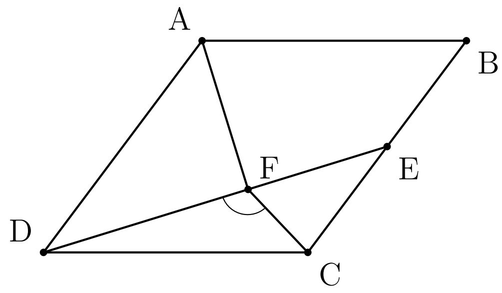


Sean F, P las proyecciones del punto K sobre AB, CM. Como el ángulo $\angle CMB$ es inscrito sobre el diámetro, es recto. Ahora $KFMP$ es un rectángulo y $KP = FM$. $\triangle KFB = \triangle KCB$ ya que comparten la hipotenusa y los ángulos $\angle CBK = \angle FBK$, de ahí que $KF = KC$. Busquemos tangente del ángulo $\angle AMK$:

$$\tan \angle AMK = \frac{KF}{FM} = \frac{KC}{KP} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

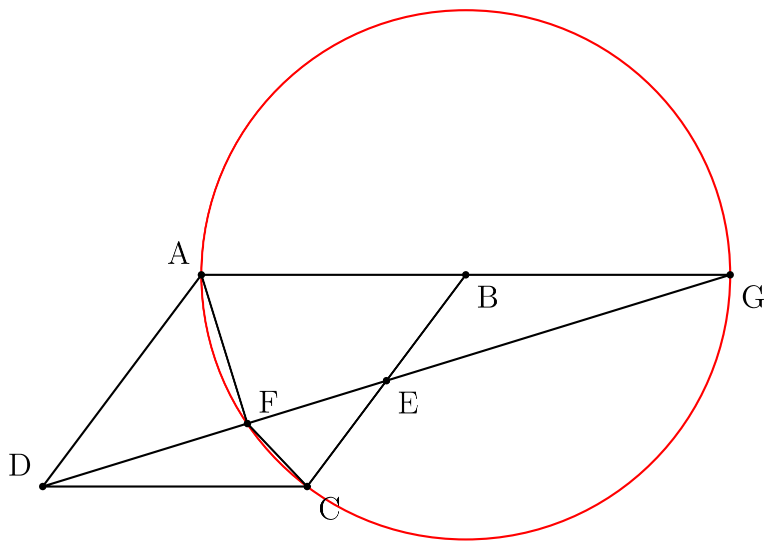
□

Problema 16.



En el rombo $ABCD$ han marcado E, el punto medio del lado BC. AF es perpendicular al segmento DE. Busca el ángulo $\angle DFC$ sabiendo que $\angle B = 40°$.

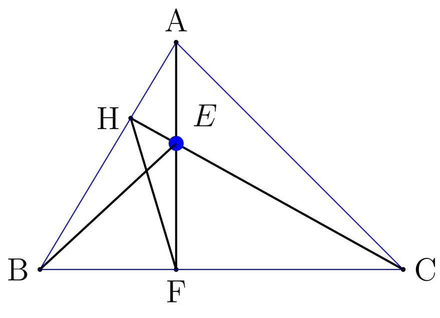
Solución.



Sea G el punto de intersección de las rectas AB, DE. $\triangle BEG = \triangle CED$ ya que $BE = EC, \angle BEC = \angle CED, \angle BGE = \angle CDE$. Ahora es fácil ver que los puntos B, G, C están en la misma circunferencia con el centro en B, además, el punto F también porque el ángulo $AFC = 90°$ y se apoya en el diámetro. Entonces el ángulo inscrito $\angle GFC = \angle GBC : 2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$, por lo que el ángulo que buscábamos mide $110°$.

□

Problema 17.



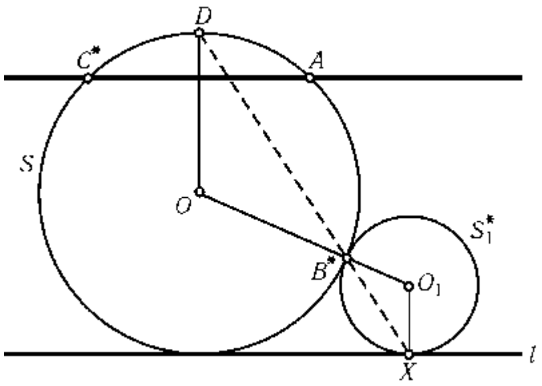
En el triángulo ABC han trazado las alturas CH, AF que se cortan en el punto E. Sabemos que el segmento BE divide el ángulo $\angle B$ en $\angle ABE = 18°, \angle CBE = 26°$. Busca los ángulos del triángulo BHF.

Solución. Como $\angle BHE + \angle BFE = 90° + 90°$, el cuadrilátero $BHEF$ es inscrito. Los ángulos apoyados en $\overset{\frown}{HE}$ son iguales, $\angle HFE = \angle HBE = 18°$. Análogamente, los ángulos apoyados en $\overset{\frown}{EF}$ también son iguales, $\angle FHE = \angle FBE = 26°$. Por eso $\angle BHF = 90° - \angle FHE = 64°$ y $\angle BFH = 90° - 18° = 72°$

□

Problema 18. Encuentra el conjunto de puntos de tangencia de un par de circunferencias que tocan los lados de un ángulo dado en los puntos A y B.

Solución. Sea C el vértice del ángulo dado. Al invertir con centro en el punto A, la línea CB se transformará en una circunferencia S, y las circunferencias S_1 y S_2 se transformarán en la circunferencia S_1^* con centro en O_1, tangente a S en el punto B^*, y la línea l, paralela a CA, tangente a S_1^* en el punto X (como en la figura).



Tracemos el radio OD perpendicular a CA en la circunferencia S. Los puntos O, B^* y O_1 están en una línea recta, y OD es perpendicular a O_1X. Por lo tanto,

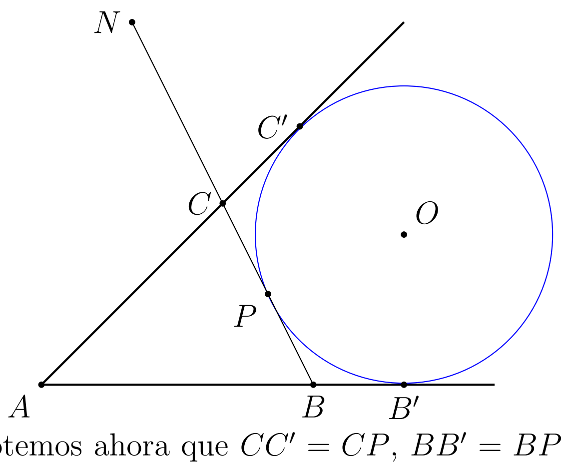
$$\angle OB^*D = 90^\circ - \frac{\angle DOB^*}{2} = 90^\circ - \frac{\angle XO_1B^*}{2} = \angle O_1B^*X.$$

Como resultado, el punto X está en la línea DB^*. Al aplicar la inversión nuevamente, obtenemos que el conjunto de puntos de tangencia buscados es el arco AB de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y D^*. □

Problema 19. Dado el ángulo $\angle A$ y un punto N traza una recta que recorta del ángulo un triángulo de perímetro p.

Solución.

Primero marquemos en los lados del ángulo los puntos B', C' tal que $AB' = AC' = p/2$. Luego tracemos una circunferencia tangente al ángulo en estos puntos (su centro está en la intersección de los perpendiculares a los lados desde los puntos B', C'). Por último, tracemos una tangente desde el punto N a la circunferencia que corte los segmentos AB', AC' en los puntos B, C respectivamente.



Sea P el punto tangente de la recta BC a la circunferencia. Notemos ahora que $CC' = CP$, $BB' = BP$ por ser tangentes a la circunferencia desde el mismo punto. De esta manera el perímetro del triángulo ABC es

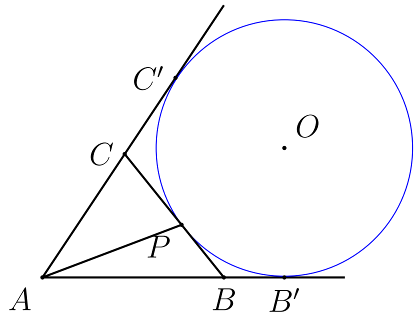
$$AC + (CP + PB) + BA = AC + CC' + AB + BB' = AC' + AB' = p$$

Es importante ver que si el punto N se encuentra en el interior del triángulo curvilíneo formado por $AC', AB', \overset{\frown}{B'C'}$ el problema tiene dos soluciones ya que hay dos tangentes posibles. En cambio, si está fuera de este triángulo pero dentro del ángulo, no tiene solución.

□

Problema 20. En el triángulo $\triangle ABC$ traza el segmento AM que lo divide en dos triángulos de igual perímetro.

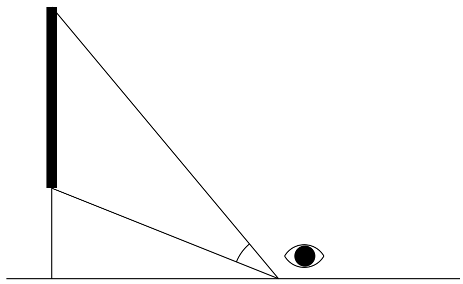
Solución.



Pista: Considera una circunferencia exinscrita como en el dibujo.
Claramente, $PC = CC', PB = BB'$, además, dos tangentes trazadas del mismo punto son iguales, por lo que $AB' = AC'$. Ahora $P_{ACP} = AC + CP + AP = AC' + AP = AB' + AP = P_{ABP}$

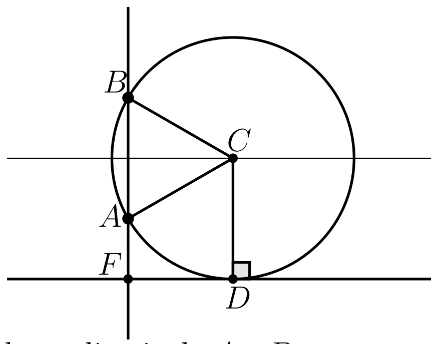
□

Problema 21.



Hay una pantalla vertical de 100m de alto, pero su borde inferior está a 50m de altura, con lo que apenas se ve sin alejarse. ¿A qué distancia hay que alejarse para que ocupe el máximo ángulo en nuestro campo de visión?

Solución.



Si dibujamos la circunferencia que pasa por los dos bordes de la pantalla y por el punto donde estamos, vemos que el ángulo de visión está inscrito en ella, por lo que sólo depende de la circunferencia y no de dónde estemos nosotros en ella. Buscamos entonces la circunferencia más pequeña posible en la que podamos estar: tendrá que ser tangente al suelo.

Si llamamos C al centro de esta circunferencia, tiene que estar en la mediatriz de A y B, que es paralela al suelo y está a altura 100m. Si llamamos D al punto de tangencia, donde nos colocamos, tendremos que CD es perpendicular al suelo y que los radios son iguales: $|AC| = |BC| = |CD| = 100m$. Sabiendo esto, sabemos que ABC es un triángulo equilátero. Por tanto, el ángulo central que abarcan A y B es de 60°, y el ángulo inscrito que buscamos es la mitad, 30°. Además, la distancia FD a la que tenemos que alejarnos es la altura de este triángulo, que usando el Teorema de Pitágoras es $50\sqrt{3}$ metros.

□

Problema 22. El triángulo ABC tiene un ángulo recto en A. Si AM es su mediana, demuestra que $|AM| = |BM| = |CM|$.

Solución. Como M es el punto medio de BC, hay una circunferencia que tiene centro en M y pasa por B y C. Entonces, el ángulo $\widehat{BAC}$ mide 90°, y por el recíproco del ángulo inscrito en una semicircunferencia, tiene que estar en la semicircunferencia.

□

Problema 23. Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. AC es un diámetro de la primera circunferencia y AD es un diámetro de la segunda circunferencia. Demuestra que B, C y D están alineados.

Solución. El ángulo $\widehat{ABC}$ está inscrito en una semicircunferencia, por lo que es un ángulo recto. Lo mismo ocurre con el ángulo ABD.

□

Problema 24. Dado un círculo y un punto A fuera de él trazamos dos tangente AB y AC al círculo (B y C son puntos tangentes). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se encuentra en la circunferencia dada.

Solución. Sea O el centro de la circunferencia y M la intersección de AO con la circunferencia (el punto medio del arco menor BC). Probemos que M es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

Observemos que AM es la bisectriz del ángulo BAC. Ahora queremos ver que BM es la bisectriz del ángulo ABC. De la misma form se prueba que CM es la bisectriz del ángulo ACB.

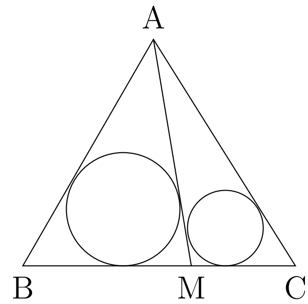
Sea $\alpha = \angle MBC = \angle MCB$. Entonces $\angle MOB = 2\alpha$. Por lo tanto $\angle OBC = 90° - 2\alpha$ y por eso $\angle ABM = 90 - (90 - 2\alpha + \alpha) = \alpha$. Por tanto, BM es también la bisectriz del triángulo ABC.

Concluimos que M es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC, es decir el centro de su circunferencia inscrita.

□

Problema 25.

El punto M está en el lado BC del $\triangle ABC$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABM$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACM$. ¿Puede ser mediana el segmento AM?



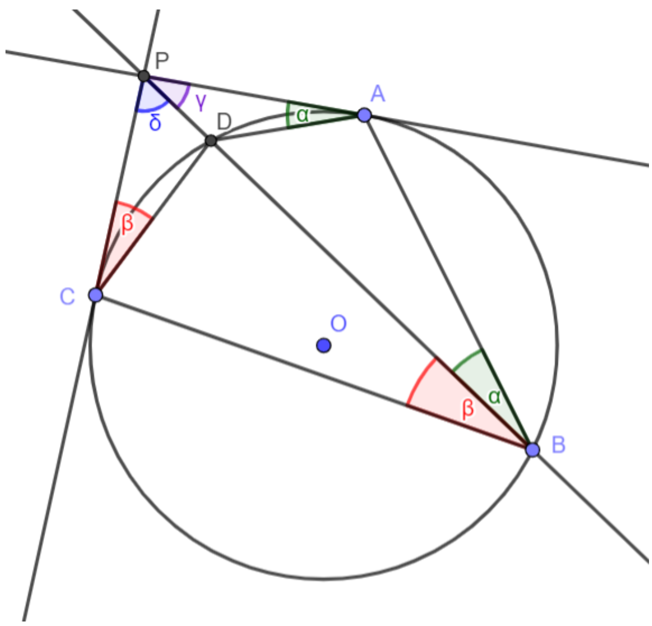
Solución. Supongamos que AM es mediana, $BM = MC$. Entonces $A_{ABM} = A_{ACM}$. Por otro lado, $A_{ABM} = \frac{AB+BM+AM}{2} \times 2r, A_{ACM} = \frac{AC+BM+AM}{2} \times r$. Esto significa que $AC = AM + 2AB + CM > AM + CM$. Esto contradice la desigualdad triangular.

□

Problema 26. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

Solución.



Hacemos el dibujo en el caso en el que B está en la cuerda más larga entre A y C de la circunferencia. Aquí, O es el centro de la circunferencia. El razonamiento es análogo cambiando los papeles de B y D.

Los dos ángulos denotados por α en el dibujo son iguales porque son ángulos inscritos (en el caso de $\angle ABD$) y semiinscritos (en el caso de $\angle DAP$) abarcando la misma cuerda de la circunferencia (AD). El mismo argumento nos dice que los dos ángulos denotados por β en el dibujo son iguales.

Observamos que los triángulos PAD y PBA son semejantes, al tener dos ángulos iguales (α y γ). Por tanto,

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PA|}.$$

También observamos que los triángulos PCD y PBC son semejantes, al tener dos ángulos iguales (β y δ). Por tanto,

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

Además, tenemos que los triángulos PAO y PCO son congruentes, ya que ambos son ángulos rectos en los que la hipotenusa mide lo mismo ($|PO|$) y uno de sus catetos también ($|CO| = |AO|$ porque ambos son el radio de la circunferencia), así que el teorema de Pitágoras nos especifica que los catetos restantes también miden lo mismo. Por tanto, $|PA| = |PC|$. Esto nos dice que la última y la penúltima fracción de las dos igualdades de fracciones anteriores son iguales. Por tanto, todas las fracciones que hemos escrito hasta ahora son iguales. En particular,

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|CD||}{|BC|},$$

por lo que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

□

Problema 27. Tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que ningún par de lados son paralelos. Llamamos E al punto en el que se intersecan la prolongación de los lados AD y BC, y llamamos F al punto en el que se intersecan la prolongación de AB y DC. Demuestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE, ADF, DCE, y BCF pasan por un mismo punto.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los vértices de $ABCD$ de manera que siguen el orden contrario a las agujas del reloj y el interior de los triángulos DCE y ADF no interseca al interior del cuadrilátero $ABCD$. A partir de ahora, asumiremos esto.

La solución completa de este problema es muy técnica. De hecho, el enunciado es cierto también si quitamos la condición de que el cuadrilátero $ABCD$ sea convexo, pero la demostración aún se vuelve más técnica. Los siguientes enunciados no son obvios, pero se usan implícitamente en la demostración:

a) Las circunferencias circunscritas a los triángulos ADF y DCE no son tangentes, es decir, además de cortarse en el punto D se cortan en otro punto distinto, que llamamos H.

b) Los puntos E, F, A, B, C, D son todos distintos.

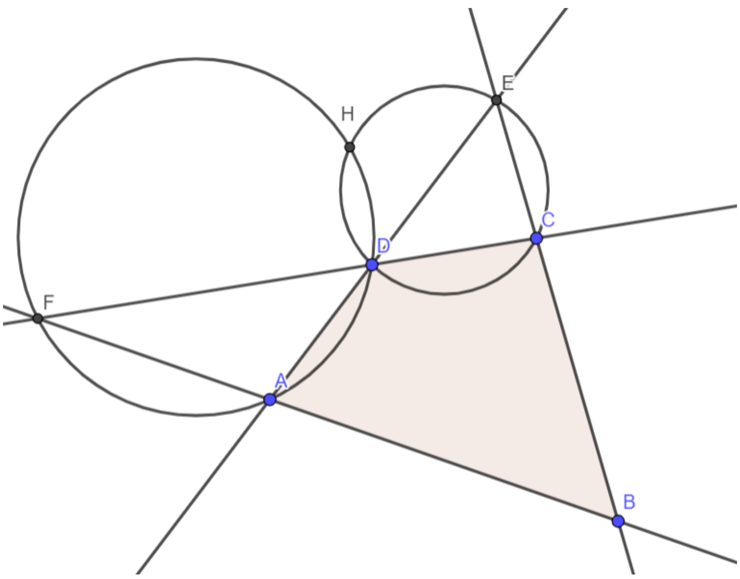
c) El punto H es distinto de los puntos A, B, C, D, E, F.

d) $EHDC$ y $ADHF$ son cuadriláteros (con los vértices en ese orden siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj).

e) $ABEH$ y $BCHF$ son cuadriláteros (con los vértices en ese orden siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj).

f) Los puntos E y A están en lados distintos de la recta DH. Los puntos F y C también.

Por ahora, vamos a asumir que estas afirmaciones son ciertas, y a partir de ellas, acabar la demostración del ejercicio. Después demostraremos que todas estas afirmaciones eran ciertas.



Nuestro objetivo es ver que H también se encuentra en las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE y BCF. Para ver que H se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo ABE basta ver que el cuadrilátero $ABEH$ es cíclico.

Como $EHDC$ es un cuadrilátero cíclico tenemos que $\angle EHD = 180° - \angle DCE = \angle BCD$. Como H y F están en la circunferencia circunscrita a ADF y al mismo lado de la cuerda AD (ya que $ADHF$ es un cuadrilátero), tenemos que $\angle AFD = \angle AHD$. En particular,

$$\angle AHE = \angle AHD + \angle DHE = \angle AFD + \angle BCD,$$

(aquí estamos usando implícitamente la afirmación 6) y como $\angle AFD = \angle BFC$ y $\angle BCD = \angle BCF$, mirando al triángulo BCF obtenemos que

$$\angle AHE = \angle BFC + \angle BCF = 180° - \angle FBC = 180° - \angle ABE,$$

y esto implica que $ABEH$ es un cuadrilátero cíclico.

Similarmente se puede demostrar que $HFBC$ es cíclico, lo que implica que H está en la circunferencia circunscrita al triángulo BCF. Esto concluye la demostración si asumimos que las 6 afirmaciones del principio son ciertas.

Ahora, para concluir la solución, vamos a demostrar las afirmaciones del principio una a una.

a) Veamos que las circunferencias circunscritas a los triángulos ADF y DCE no pueden ser tangentes, por reducción al absurdo: Sea r_1 el radio de la circunferencia circunscrita a ADF y r_2 el radio de la circunferencia circunscrita a DCE. Sea O_1 el centro de la circunferencia circunscrita a ADF y O_2 el centro+++ de la circunferencia circunscrita a DCE. Si las dos circunferencias fueran tangentes, D estaría en la recta O_1O_2. Los triángulos FO_2D y CO_1D son dos triángulos isósceles tales que $\angle CDO_2 = \angle O_1DF$, ya que las rectas O_1O_2 y CF se cortan en el punto D. En particular, tenemos que
$$\frac{|CD|}{|DF|} = \frac{r_2}{r_1}.$$
Argumentando de manera similar, obtenemos que
$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{r_2}{r_1},$$
y como $\angle ADF = \angle CDE$ (por ser ángulos opuestos a las rectas CF y AE), obtenemos que los triángulos ADF y EDC son semejantes. Esto implica que las rectas CE y AF son paralelas. El punto B está en estas dos rectas, por lo que tendrían que ser la misma, pero eso implicaría que A, B, y C están alineados, contradiciendo que $ABCD$ sea un cuadrilátero. Por tanto, queda demostrado que las circunferencias circunscritas a los triándulos ADF y DCE no son tangentes. En particular, se cortan también en un punto H distinto de D.

b) Argumentamos por reducción al absurdo. Si alguno de estos pares de puntos fueran iguales, habría tres puntos de entre A, B, C y D alineados, y esto es imposible porque $ABCD$ es un cuadrilátero.

c) Ya sabemos que $H \neq D$, veamos que $H \neq E$, y por la simetría del problema, esto nos dirá también que $H \neq F$. Lo vemos por reducción al absurdo. Si H fuera igual a E, la circunferencia circunscrita al triángulo ADF contendría a tres puntos alineados (A, D y H) y esto sólo es posible si dos de esos puntos son iguales, es decir, si $A = H = E$, que ya sabemos que es imposible. Por tanto deducimos que $H \neq E$ (y $H \neq F$). Ahora, veamos que $H \neq A$, y por la simetría del problema, esto nos dirá que $H \neq C$. Si H fuera igual a A, los puntos alineados A, D, E estarían en una misma circunferencia, y esto es posible sólo si dos de ellos son iguales, que sabemos que no lo son por el punto 2. Por tanto, deducimos que $H \neq A$ (y $H \neq C$). Nos queda demostrar que $H \neq B$, y lo hacemos otra vez por reducción al absurdo. Si H fuera igual a B, los puntos alineados $B = H$, C y E estarían en una misma circunferencia, y esto es posible sólo si dos de ellos son iguales, que sabemos que no lo son por el punto 2.

d) Por la simetría del problema basta ver que $EHDC$ es un cuadrilátero. Sabemos por los puntos 2 y 3 que E, H, D, C son puntos distintos que además están en una circunferencia, por lo que no hay tres alineados. Sólo tenemos que demostrar que los vértices E, H, D, C aparecen en ese orden al recorrer la circunferencia en alguno de los dos sentidos. Para ello, basta ver que H y C están en lados distintos de la recta DE. Las rectas AD y DC dividen el plano en cuatro regiones. Como el cuadrilátero $ABCD$ es convexo, y por lo que hemos asumido en el primer párrafo de esta solución, tenemos que una de las regiones (R_1) contiene al cuadrilátero $ABCD$, otra (R_2) al triángulo DCE, otra (R_3)al triángulo ADF, y queremos ver que H está en la región restante, a la que llamamos R_4. Observamos que H no puede estar en las rectas DC o AD, ya que la circunferencia circunscrita al triángulo DCE ya tiene dos puntos distintos de H en esas rectas. Para ver que H no está en el interior de la región R_3 basta ver que la circunferencia circunscrita al triángulo DCE no tiene ningún punto en el interior de R_3. Esta circunferencia ya corta a las recta DC y AD (y a todas las rectas entre estas dos que dan lugar a las regiones R_2 y R_3) en dos puntos de la región R_2 (incluido el borde), por lo que no puede cortarlas en más. Por tanto, H no puede estar en el interior de la región R_3, y argumentando de manera análoga con la circunferencia circunscrita al triángulo ADF, concluimos que H no puede estar en el interior de la región R_2 En particular, H sólo puede estar en el interior de R_1 o de R_4. Veamos ahora que H no puede estar en el interior de R_1 por reducción al absurdo. Si H estuviera en R_1, $EDFH$ sería un cuadrilátero, por lo que la suma de sus ángulos interiores sería 360°. Por tanto, ocurriría que

$$360^\circ = \angle HED + \angle EDF + \angle DFH + \angle FHE = \angle HED + \angle EDF + \angle DFH + \angle FHD + \angle DHE.$$

Como H estaría al otro lado de la recta DC que E, $EDHC$ sería un cuadrilátero cíclico y $\angle DHE = 180^\circ - \angle CED$. Por el mismo motivo, pero argumentando con el cuadrilátero $AHDF$ en la circunferencia c_2, obtendríamos que $\angle FHD = 180^\circ - \angle DFA$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior, obtenemos que

$$\angle HED + \angle EDF + \angle DFH = \angle CED + \angle DFA.$$

Notamos que el ángulo $\angle EDF$ del cuadrilátero $EDFH$ es mayor que 180°. Por tanto, basta demostrar que $\angle CED + \angle DFA \leq 180^\circ$. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos interiores al cuadrilátero convexo $ABCD$. Usando que la suma de los ángulos en los triángulo AFD y EDC es 180°, obtenemos que

$$\angle DFA + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \delta) = 180^\circ, \quad \angle CED + (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \delta) = 180^\circ,$$

por lo que, usando que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, obtenemos que

$$\angle CED + \angle DFA + 360^\circ = (\alpha + \gamma + \delta) + \delta = 360^\circ + \delta - \beta,$$

es decir

$$\angle CED + \angle DFA = \delta - \beta < \delta,$$

y como $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, $\delta < 180^\circ$ y llegamos a una contradicción. Esto concluye nuestra demostración de que H está en el interior de R_1, y en particular H y C están a lados distintos de la recta DE, y $EHDC$ es un cuadrilátero.

e) Por la simetría del problema basta ver que $ABEH$ es un cuadrilátero. Ya hemos visto que H y C están a lados distintos de la recta DE (que es la misma que la recta AD). También, como $ABCD$, B y C están en el mismo lado de la recta AD. Por tanto H y B están a lados distintos de la recta AD. Combinando esto con los puntos 2 y 3 concluimos que $ABEH$ es un cuadrilátero.

f) Esto es consecuencia de que D está en el segmento AE y en el segmento FC, que a su vez es consecuencia de lo que hemos asumido en el primer párrafo de esta solución.

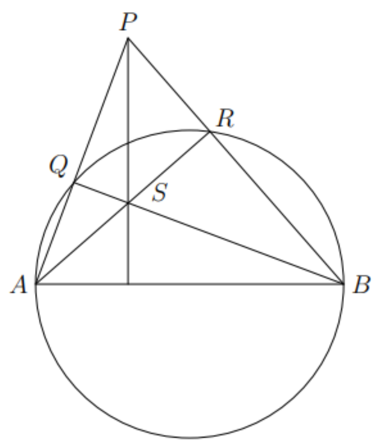
□

Problema 28. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Solución.

Sea Q (respectivamente R) el punto de la circunferencia distinto de A (respectivamente B) situados también en la recta AP (respectivamente BP). Sea S el punto de intersección de los segmentos AR y QB. Veamos que la recta que pasa por P y S es perpendicular a AB.

Tenemos que $\angle AQB$ y $\angle ARB$ son rectos, por lo que S es el ortocentro del triángulo APB. Como las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro, tenemos que la recta PS contiene a la altura del triángulo ABP que sale de P, y por tanto es perpendicular a AB.



$\square$

Problema 29. Sea ABC un triángulo con ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, circuncentro[1] O, incentro[2] I y ortocentro[3] H. Supongamos que $\angle A = 60°$.

a) Demuestra que hay una circunferencia que pasa por B, H, O, I y C.

b) Demuestra que $|OI| = |HI|$

Solución. a) Tenemos que demostrar que $\angle BIC = \angle BOC = \angle BHC$. Mirando el triángulo BIC, observamos que

$$\angle BIC = 180° - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180° - \frac{120°}{2} = 120°.$$

Sean B' y C' los pies de las altura que salen de B y C respectivamente. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es $360°$, así que mirando al cuadrilátero $AC'HB'$ deducimos que $\angle B'HC' = 120°$. Además, observamos que $\angle BHC = \angle B'HC'$, por lo que

$$\angle BHC = 120°.$$

Mirando la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y la relación entre ángulos inscritos y centrales, obtenemos que $\angle A = \frac{\angle BOC}{2}$, por lo que

$$\angle BOC = 120°,$$

y esto concluye nuestra demostración.

b) Si $I = H$, la bisectriz que sale del vértice A coincide con la altura que sale del vértice A, por lo que, como $\angle A = 60°$, necesariamente ABC es equilátero. En este caso $O = I = H$, por lo que el resultado es cierto.

Si $I = O$, la unión de cada uno de los vértices con O es una bisectriz del triángulo, y el pie de la perpendicular de O a cada uno de sus lados es la mediatriz. Dibujando todas las bisectrices y las mediatrices, el triángulo ABC nos queda dividido en 6 triángulos rectángulos congruentes, lo que fuerza a que el triángulo ABC sea equilátero.

Si $H = O$, todas las mediatrices de los lados del triángulo ABC son alturas, y eso también fuerza a que el triángulo sea equilátero.

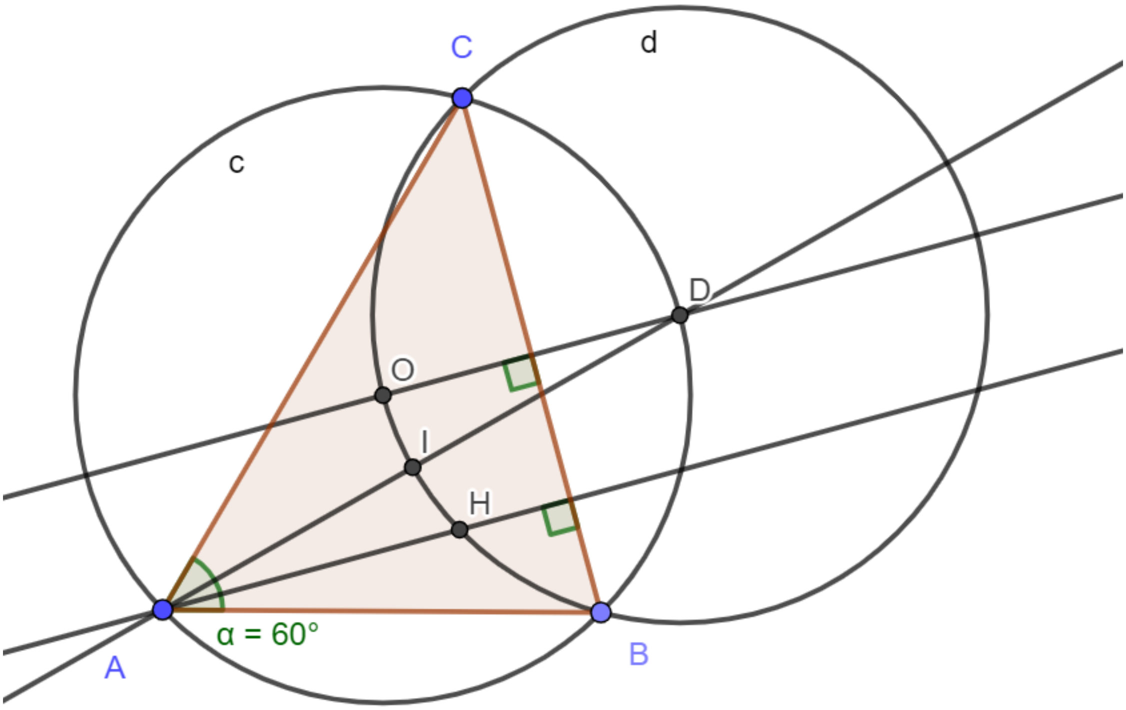
Por tanto, a partir de ahora asumiremos que el triángulo ABC no es equilátero, y por tanto O, I y H son tres puntos distintos.

[1] El circuncentro de un triángulo es el centro de su circunferencia circunscrita, o equivalentemente, la intersección de las mediatrices de los tres lados del triángulo.

[2] El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia inscrita, o equivalentemente, la intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo.

[3] El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

Sea c la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, d la circunferencia que contiene los puntos B, C, O, I, H, y D el centro de d.



Observamos ciertas cosas

i) La circunferencia d es el resultado de reflejar la circunferencia c por el lado BC: En efecto, sea O' el resultado de reflejar O a través del lado BC. Tenemos que $|OB| = |0'B|$ y $|OC| = |O'C|$. Además $\angle O'OC = \angle O'OB = \frac{1}{2}\angle COB$, y como $\angle COB$ es un ángulo central en la circunferencia c, obtenemos que $60° = \angle A = \frac{1}{2}\angle COB$. Por tanto, $\angle O'OC = \angle O'OB = 60°$. Miramos el triángulo $OO'C$ y vemos que los lados OC y $O'C$ miden lo mismo, y $\angle O'OC = 60°$, por lo que $OO'C$ es un triángulo equilátero. Similarmente, $OO'B$ también es equilátero. Por tanto, O' equidista de O, B y C, y por tanto es el centro de la circunferencia que contiene a esos tres puntos, que necesariamente tiene el mismo radio que c. En particular, $O' = D$, y d es el resultado de reflejar c por el lado BC.

ii) D está en c: Esto es consecuencia de que O está en d y la observación i).

iii) La altura del triángulo ABC que parte de A es paralela a la recta que une O y D: En efecto, por i) sabemos que la recta que une O y D es perpendicular a BC, como la altura del triángulo ABC que parte de A.

iv) La bisectriz de $\angle A$ pasa por D: En efecto, sea D' el punto de corte distinto de A de la bisectriz de $\angle A$ con la circunferencia c. Como $30° = \angle BAD'$ es un ángulo inscrito en c, tenemos que $\angle BOD' = 60°$. Como D es un punto en c por ii) tal que $\angle BOD = 60°$ por nuestra demostración de i), necesariamente $D' = D$.

v) $|AH| = |HD|$: Como D es el centro de d, y H y O están en d, $|HD| = |OD|$. Por ii), y como O es el centro de c, y c contiene a A, $|OD| = |OA|$. El cuadrilátero $ODHA$ tiene dos lados paralelos (OD y HA) por la observación iii), y otros dos lados miden lo mismo. Esto implica que $ODHA$ es un paralelogramo, y por tanto $|OD| = |HA|$.

Nuestro objetivo es demostrar que los ángulos centrales (menores de 180°) de la circunferencia d $\angle IDO$ y $\angle HDI$ son iguales, ya que un mismo valor de ángulo central abarca una misma longitud de arco, que abarca una misma longitud de cuerda.

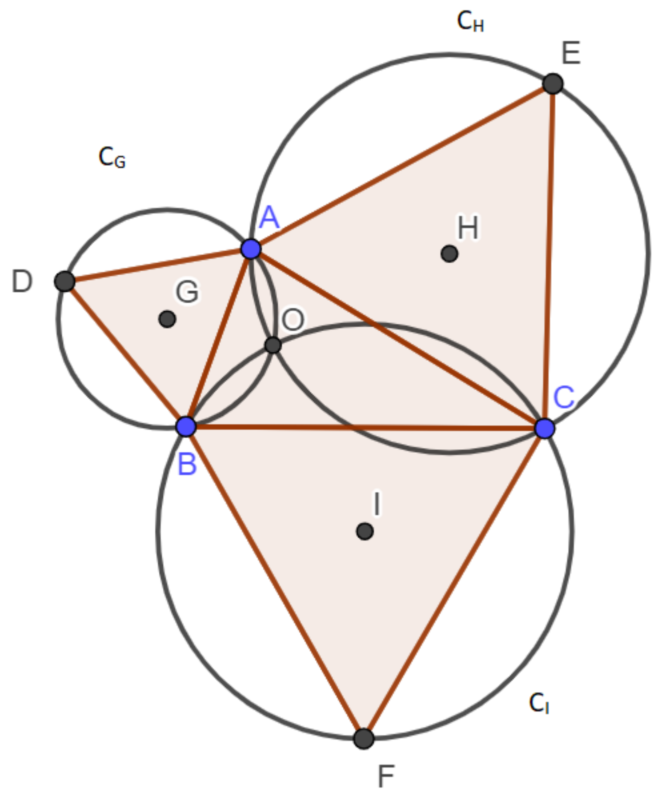
El ángulo central $\angle IDO$ de la circunferencia d (de los dos ángulos centrales, el menor de 180°) coincide con el ángulo $\angle DAH$. Por la observación v), $\angle ADH = \angle HAA$. Finalmente, como I está en AD por la observación iv), $\angle HDA = \angle HDI$.

□

Problema 30. Tenemos un triángulo ABC en el plano. En cada uno de sus lados, dibujamos un triángulo equilátero en el exterior del triángulo ABC, creando los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF. Sean G, H e I los centros de los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF respectivamente. Demuestra que el triángulo GHI es equilátero.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los ángulos $\angle A, \angle B$ del triángulo ABC son ambos distintos de 120°.

Sea c_G la circunferencia de centro G que pasa por los puntos A, B, D, c_H la circunferencia de centro H que pasa por los puntos A, C, E, y c_I la circunferencia de centro I que pasa por los puntos B, C, F. Como $\angle A \neq 120°$, c_G y c_H se cortan en otro punto O aparte de A. Veamos que c_I también pasa por O.



Tenemos varios casos:

- $O \neq B$ y $O \neq C$: El cuadrilátero $ADBO$ está inscrito en una circunferencia, por lo que sus ángulos opuestos han de sumar 180°. En particular, $\angle AOB = 180° - \angle BDA = 180° - 60° = 120°$. Similarmente, el cuadrilátero $AOCE$ está inscrito en una circunferencia, por lo que $\angle COA = 180° - \angle AEC = 180° - 60° = 120°$.

  Como $\angle COA + \angle BOC + \angle AOB = 360°$, tenemos que $\angle BOC = 120°$. En particular, O también está en la circunferencia c_I.

- $B \neq O = C$: c_I también pasa por O. La intersección de c_I y c_G son dos puntos, B y O.

- $C \neq O = B$: c_H también pasa por B. El cuadrilátero $ABCE$ está inscrito en una circunferencia, por lo que $\angle B$ en el triángulo ABC tiene que tener 120°, y ya hemos asumido que no estábamos en este caso. Por tanto, esto es imposible

En cualquiera de los dos casos posibles (los dos primeros), la intersección de las tres circunferencias c_G c_H y c_I es un único punto, O que es distinto de A y de B.

Como A y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_G y c_H, tenemos que GH es perpendicular a AO. Similarmente, como B y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_G y c_I, tenemos que GI es perpendicular a BO. Como AO y BO forman un ángulo de $120°$, GH y GI forman un ángulo de $60°/120°$.

Para ver que GHI es un triángulo equilátero, nos falta ver que HI y GH forman un ángulo de $60°/120°$ también, porque la única manera en que la suma de tres ángulos que toman valores o $60°$ o $120°$ sea $180°$ es si los tres miden $60°$.

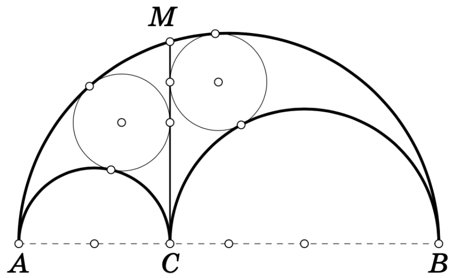
Analizamos cada caso de los dos anteriores que eran posibles por separado:

- Caso $O \neq C$: Como C y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_H y c_I, tenemos que HI es perpendicular a CO. Como AO y CO forman un ángulo de $120°$, GH y HI forman un ángulo de $60°/120°$.

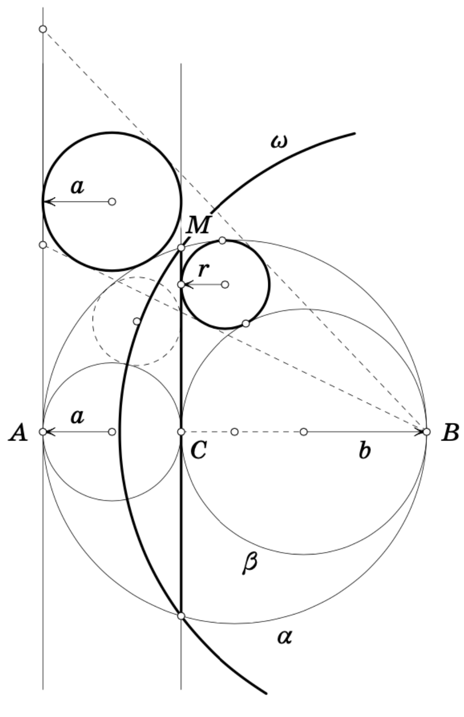
- Caso $O = C$: Argumentando como en el tercer caso de los distinguidos anteriormente, podemos ver que $\angle C$ en el triángulo ABC tiene que tener $120°$. En ese caso, la bisectriz de $\angle C$ es perpendicular a IH. La bisectriz de $\angle C$ forma un ángulo de $60°$ con OA, por lo que IH y GH forman un ángulo de $60°/120°$.

□

Problema 31. Supongamos que un punto C está en un segmento AB. Construyamos en una dirección tres semicírculos sobre los diámetros AB, BC y AC (esto es un arbelos). El perpendicular MC al segmento AB divide el arbelos en dos partes. Demuestra que los radios de las circunferencias inscritas en estas partes del arbelos son iguales entre sí.



Solución. Denotemos $|AC| = 2a$ y $|BC| = 2b$. Ahora consideramos una inversión con respecto a la circunferencia ω con centro en el punto B y radio $|BM|$.



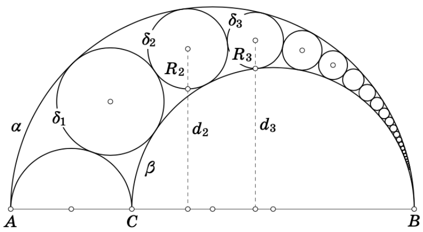
Bajo esta inversión, la circunferencia α con diámetro AB se transforma en la recta CM, y la circunferencia β con diámetro BC se transforma en una recta paralela a CM que pasa por el punto A. De esta manera, la circunferencia inscrita con radio r, tangente a las circunferencias α y β, se transforma en una circunferencia tangente a sus imágenes, es decir, dos rectas paralelas. El radio de esta nueva circunferencia es igual a a (el radio de la circunferencia con diámetro AC).

Ahora consideramos una homotecia con centro en B, en la cual la circunferencia de radio r se transforma en una circunferencia de radio a, y el punto C se transforma en el punto A. Entonces obtendremos $\frac{r}{a} = \frac{|BC|}{|BA|} = \frac{2b}{2(a+b)}$ y por lo tanto $r = \frac{ab}{a+b}$.

La simetría de la fórmula obtenida en relación con a y b implica la afirmación del problema.

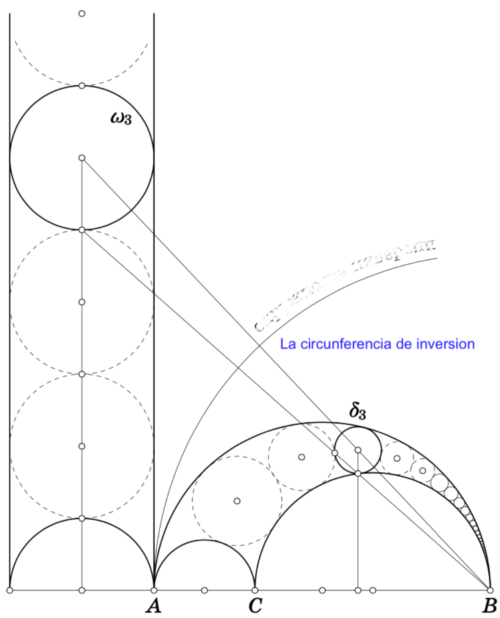
□

Problema 32. Dadas las circunferencias α, β y γ con diámetros AB, BC y AC respectivamente, que forman un arbelos, δ_1 es la circunferencia inscrita en el arbelos, la circunferencia δ_2 toca las circunferencias α, β y δ_1, la circunferencia δ_3 toca las circunferencias α, β y δ_2, ..., la circunferencia δ_{n+1} toca las circunferencias α, β y δ_n.



Sea R_n el radio de la circunferencia δ_n, d_n la distancia desde el centro de la circunferencia δ_n hasta la recta AB. Demuestra que entonces $\frac{d_1}{R_1} = 2$, $\frac{d_2}{R_2} = 4$, $\frac{d_3}{R_3} = 6$, ..., $\frac{d_n}{R_n} = 2n$, es decir, la distancia desde el centro de la n-ésima circunferencia hasta el diámetro del arbelos es $2n$ veces su radio.

Solución. Realizaremos una inversión con respecto a alguna circunferencia con centro en el punto B. En la figura esta circunferencia pasa por el punto A.



Bajo esta inversión, las circunferencias α y β se transforman en dos rectas paralelas, y la cadena de circunferencias δ_1, δ_2, δ_3, ... se transforma en una cadena de circunferencias iguales ω_1, ω_2, ω_3, ... encerradas entre las rectas paralelas. Los centros de las circunferencias ω_n y δ_n yacen en una línea recta con el punto B. Para la circunferencia ω_n, la afirmación del problema se cumple de manera obvia. Pero la circunferencia δ_n se transforma en la circunferencia ω_n bajo la homotecia con centro en B, de donde se sigue la afirmación del problema.

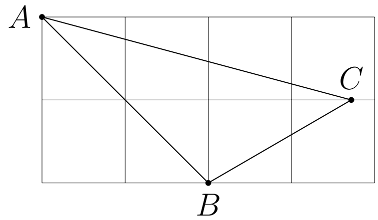
□

Problemas para hacer en casa

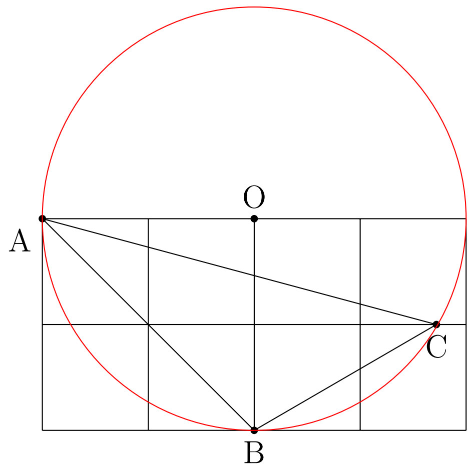
22 de noviembre

Problema 33.

En una cuadrícula han dibujado el siguiente triángulo:
Sabiendo que el ángulo $\angle ACB = 45°$, encuentra los otros dos ángulos.



Solución.
Pista: Traza una circunferencia sobre el triángulo ABC.
Coloquemos el punto O como en el dibujo y tracemos una circunferencia de radio 2.
Como $OA = OB = 2$, ambos puntos están en la circunferencia. El ángulo $\angle AOB = 90° = 2 \cdot \angle ACB$, es decir, el ángulo central es el doble del ángulo $\angle ACB$, por eso es inscrito y el punto C está en la circunferencia. Esto significa que $OB = OC$. Por otro lado, C está en la mediatriz del segmento OB y $OC = BC$. Entonces $\triangle OBC$ es equilátero, y $\angle B = 45° + 60° = 105°$, $\angle A = 30°$.



□

Problema 34. Demuestra que si en la inversión respecto a una circunferencia con centro O, la circunferencia S se transforma en la circunferencia S', entonces O es uno de los centros de homotecia de las circunferencias S y S'.

Solución. Supongamos que en la inversión respecto a la circunferencia ω con centro O, el punto A que yace sobre la circunferencia S se transforma en el punto A' sobre la circunferencia S' con centro Q. Sean MN el diámetro de la circunferencia S que yace sobre la recta OQ, y M' y N' las imágenes de los puntos M y N, respectivamente. Sea K el punto de intersección de la línea OA con la circunferencia S', distinto de A'.

Por semejanza de los triángulos OAN y $ON'A'$, tenemos que

$$\angle OKM' = 180° - \angle A'N'M' = \angle ON'A' = \angle OAN.$$

Por lo tanto, $M'K \parallel NA$. En consecuencia, el punto O es el centro de homotecia que transforma la circunferencia S en la circunferencia S'.

□

Problema 35. Con una regla y un compás, construye una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas que pasan por un mismo punto.

Solución. Sean las circunferencias S_1, S_2 y S_3, que pasan por el punto O y se intersectan en pares en los puntos A, B y C, distintos de O. Supongamos que se ha construido una circunferencia S que es tangente a cada una de estas tres circunferencias.

Consideremos una inversión con respecto a una circunferencia arbitraria con centro en O. Bajo esta inversión, las circunferencias S_1, S_2 y S_3, que pasan por el centro de inversión O, se transformarán en rectas S_1', S_2' y S_3' que se intersectan en pares. Los puntos A, B y C se transformarán en los puntos de intersección A', B' y C' de estas rectas. La circunferencia S, que no pasa por el centro de inversión, se transformará en una circunferencia S' que es tangente a las rectas $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$.

Esto lleva al siguiente método de construcción. Construimos las imágenes A', B' y C' de los puntos A, B y C bajo la inversión respecto a una circunferencia con centro O. Luego, construimos las circunferencias que son tangentes a las rectas $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$, es decir, la circunferencia inscrita y las tres circunferencias exinscritas del triángulo $A'B'C'$.

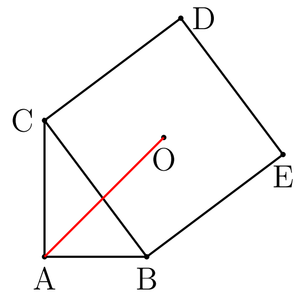
Si aplicamos de nuevo la inversión, cada una de las circunferencias construidas se transformará en una circunferencia que es tangente a las circunferencias dadas S_1, S_2 y S_3.

□

29 de noviembre

Problema 36.

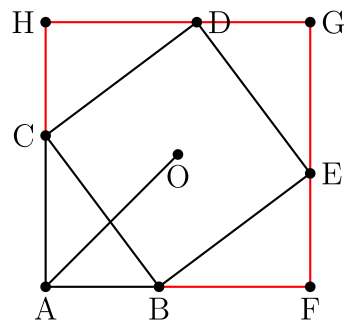
En la hipotenusa de un triángulo rectángulo $ABC, \angle A = 90°$ se construye el cuadrado $BCDE$. Sea O el centro de este cuadrado, halla $\angle BAO$.



Solución. **Solución 1**. En el cuadrilátero $ABOC$ los ángulos opuestos $\angle BAC + \angle BOC = 180°$, por eso es inscrito y los ángulos que se apoyan en el arco $\overset{\frown}{OB}$ son iguales, por lo que $\angle OAB = \angle OCB = 45°$.

Solución 2.

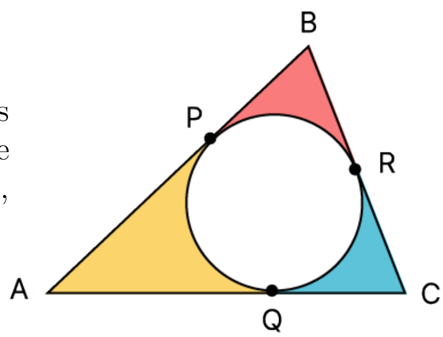
Dibujemos triángulos iguales al $\triangle ABC$ en todos los lados del cuadrado de modo que se forme un cuadrado grande. OA será la mitad de su diagonal.



□

Problema 37.

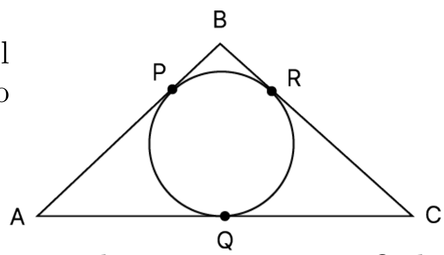
Dado el ángulo A y la circunferencia inscrita que toca los lados en los puntos P, Q, demuestra que podemos trazar una única tangente BC de modo que el área amarilla sea el resto entre la azul y la rosa, es decir, $Area_{APQ} = Area_{CQR} - Area_{BPR}$



Solución.

La posición de la recta tangente BC depende únicamente de la posición del punto R, que puede variar entre Q', el punto opuesto a Q y P',el opuesto a P. Definamos la función

$$f(R) = Area_{CQR} - Area_{BPR}$$



Claramente, si $\angle B = \angle C$, $f(R) = 0$. Por otro lado, cuando R tiene al punto opuesto a Q, la función tiende a infinito. Es evidente también que f es estrictamente monótona, porque al mover el punto R en dirección a Q' el nuevo triángulo curvilíneo $B'PR'$ está contenido en BPR por tanto su área es estrictamente menor, mientras que el área $C'QR' > CQR$. Como cada función continua estrictamente monótona toma cada valor una única vez, y su rango son todos los números reales, en algún punto de su recorrido será igual al área de APQ.

$\square$

Problema 38. Demuestra que dos circunferencias S_1 y S_2 (o una circunferencia y una recta) que no se intersecan pueden transformarse mediante una inversión en un par de circunferencias con el mismo centro.

Solución. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias no intersectantes S_1 y S_2, respectivamente. Construimos en la línea O_1O_2 un punto C desde el cual las tangentes trazadas a las circunferencias S_1 y S_2 son iguales.

Sea l la longitud de estas tangentes, y O y Q los puntos de intersección de la circunferencia con centro en C y radio l con la línea O_1O_2. Es claro que esta circunferencia es ortogonal a las circunferencias S_1 y S_2.

Consideremos la inversión respecto a una circunferencia arbitraria con centro en O. En esta inversión, la línea O_1O_2, que pasa por el centro de la inversión, se transforma en sí misma, y la circunferencia con diámetro OQ, que pasa por el centro O de la inversión, se transforma en una línea a, que no pasa por el centro de la inversión. Las líneas O_1O_2 y a tienen un único punto en común Q', que es la imagen del punto Q bajo la inversión.

Dado que la inversión conserva los ángulos entre circunferencias, la línea a es ortogonal a las imágenes S_1' y S_2' de las circunferencias S_1 y S_2, por lo que pasa por los centros de las circunferencias S_1' y S_2', situados en la línea O_1O_2. Además, como las líneas O_1O_2 y a tienen exactamente un punto en común Q', los centros de las circunferencias S_1' y S_2' coinciden en este punto. Esto es lo que se quería demostrar.

$\square$

13 de diciembre

Problema 39. El radio de la circunferencia circunscrita sobre los puntos medios de los lados del triángulo ABC es igual a 3. $\angle A = 60°, \angle B = 45°$. Busca el área del triángulo ABC.

Solución. Llamemos los puntos medios K, L, M. Está claro que $\triangle ABC \overset{2}{\cong} KLM$, por lo que su área es el cuádruple. El área del triángulo KLM se puede hallar con la siguiente fórmula (piensa que tiene los mismos ángulos que $\triangle ABC$ por ser semejantes):

$$A_{KLM} = 2 \cdot 3^2 \sin 45° \sin 60° \sin 75° = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = 9\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

Recuerda el seno de 105° se puede calcular como

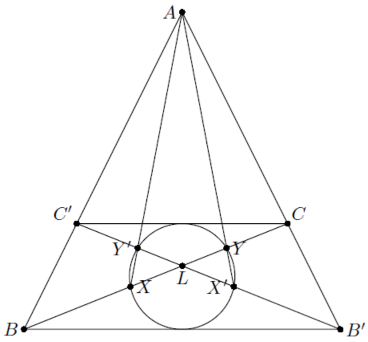
$$\sin 75° = \sin 30° + 45° = \sin 45° \cos 30° + \sin 30° \cos 45°$$

De ahí que $A_{ABC} = 9(3 + \sqrt{3})$

$\square$

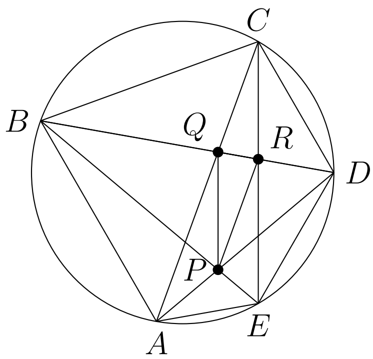
Problema 40. En el triángulo ABC se traza la bisectriz AD. Las puntos M y N son las proyecciones de los vértices B y C sobre AD. La circunferencia con diámetro MN corta a BC en los puntos X e Y. Demuestre que $\angle BAX = \angle CAY$.

Solución. Sean B', C', X' e Y' los puntos simétricos de B, C, X, Y respecto a la bisectriz MN. Entonces, el cuadrilátero $BB'CC'$ es un trapecio isósceles, cuyas diagonales se intersectan en el punto L, el cual es el inverso de A respecto a la circunferencia con diámetro MN. En este mismo punto L también se intersecan las diagonales del trapecio isósceles $XX'YY'$, inscrito en esta circunferencia. Por lo tanto, por ser A el inverso de L respecto a la circunferencia con diámetro MN, XY' y $X'Y$ se intersecan en A. Esto implica el resultado.



□

Problema 41. Sea $ABCDE$ un pentágono cuyos vértices están en una circunferencia. Además, sabemos que $|AB| = |BC|$ y que $|CD| = |DE|$. Llamamos P al punto de intersección de las diagonales AD y BE, Q al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y R al punto de intersección de las diagonales BD y CE.



a) Demuestra que $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

b) Usa la parte anterior para demostrar que el cuadrilátero $ABQP$ es cíclico, es decir, que existe una circunferencia que contiene a sus cuatro vértices.

c) Demuestra que el cuadrilátero $EDRP$ también es cíclico.

d) Usa las partes b) y c) para demostrar que el triángulo PQR es isósceles.

Solución. a) Mirando el triángulos AEP, y teniendo en cuenta que $\widehat{APB} + \widehat{EPA} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{APB} = \widehat{DAE} + \widehat{AEB}.$$

Mirando el triángulos BQC, y teniendo en cuenta que $\widehat{AQB} + \widehat{CQB} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{AQB} = \widehat{CBD} + \widehat{ACB}.$$

Los ángulos interiores $\widehat{CBD}$ y $\widehat{DAE}$ son iguales, ya que ambos abarcan un arco de circunferencia de igual longitud (ED y DC respectivamente). Similarmente, los ángulos interiores $\widehat{AEB}$ y $\widehat{ACB}$ son iguales, ya que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia (BA). Por tanto, $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

b) Sea S la circunferencia que pasa por A, B, y Q, y sea P' la intersección de la recta BE con S que no es B. El objetivo es ver que $P' = P$. Tenemos que $\widehat{AP'B} = \widehat{AQB}$, porque ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo ángulo. Usando la parte a) obtenemos que $\widehat{AP'B} = \widehat{APB}$, y esto solo es posible si $P = P'$.

c) Hay que empezar demostrando que $\widehat{EPD} = \widehat{ERD}$ (análogo a la parte a)): Mirando el triángulos AEP, y teniendo en cuenta que $\widehat{EPD} + \widehat{EPA} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{EPD} = \widehat{DAE} + \widehat{AEB}.$$

Mirando el triángulos CRD, y teniendo en cuenta que $\widehat{ERD} + \widehat{CRD} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{ERD} = \widehat{ECD} + \widehat{BDC}.$$

Los ángulos interiores $\widehat{AEB}$ y $\widehat{BDC}$ son iguales, ya que ambos abarcan un arco de circunferencia de igual longitud (BA y CB respectivamente). Similarmente, los ángulos interiores $\widehat{DAE}$ y $\widehat{ECD}$ son iguales, ya que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia (ED). Por tanto, $\widehat{EPD} = \widehat{ERD}$.

Ahora, el mismo argumento usado en la parte b) sirve para demostrar que $EDRP$ es cíclico.

d) Basta ver que $\widehat{DRP} = \widehat{PQB}$. Como $EDRP$ es cíclico, $\widehat{DRP} = 180^\circ - \widehat{PED} = 180^\circ - \widehat{BED}$. Como $APQB$ es cíclico, $\widehat{PQB} = 180^\circ - \widehat{BAP} = 180^\circ - \widehat{BAD}$. Finalmente, $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ porque ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco.

$\square$