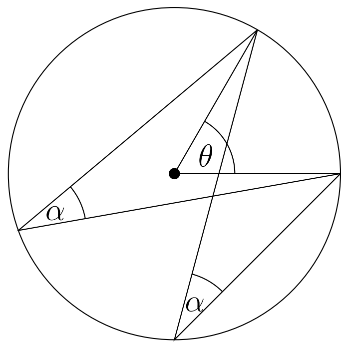
Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22, 29 de noviembre y 13 de diciembre de 2024
Geometría
Grupo: Mercurio

Repaso: ángulos inscritos

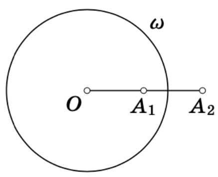
Teorema 1. *Sea α un ángulo inscrito en una circunferencia y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\alpha = \frac{\theta}{2}$.*



Problema 1. Prueba el teorema.

Inversión

Consideremos en el plano una circunferencia ω con centro en O y radio r, y un punto arbitrario A_1 distinto del punto O. Se dice que el punto A_2 es simétrico al punto A_1 con respecto al círculo ω con centro en O y radio r, si el punto A_2 está en el rayo OA_1 y $|OA_1| \cdot |OA_2| = r^2$.



De la definición se deducen directamente las siguientes afirmaciones.

a) Para cada punto del plano, excepto el centro O, existe un único punto simétrico respecto al círculo ω.

b) Para el centro O no existe ningún punto simétrico.

c) Si el punto A_2 es simétrico al punto A_1 con respecto a la circunferencia ω, entonces el punto A_1 también es simétrico al punto A_2 con respecto al círculo ω.

d) Cada punto que se encuentra en el círculo ω es simétrico consigo mismo.

e) Si A_1 y A_2 son puntos simétricos distintos, entonces uno de ellos está dentro del círculo ω, mientras que el otro está fuera.

Ahora podemos considerar una transformación del plano en sí mismo que lleva cualquier punto, excepto el centro O, a un punto simétrico a él respecto al círculo ω. Esta transformación se llama **inversión** del plano con respecto al círculo ω. Por ahora, dejaremos la pregunta sobre el destino del centro del círculo O abierta. Estudiaremos el plano con un punto excluido: la perforación en O. En este "plano perforado", la inversión está completamente y unívocamente definida para todos los puntos.

La inversión se puede visualizar como el resultado de "darle la vuelta" al plano a través del círculo ω. Todos los puntos del círculo de inversión permanecen en su lugar, todos los puntos que estaban dentro del círculo ω ahora están fuera, y todos los puntos que estaban fuera del círculo, ahora están dentro. Estos dos retratos de Hypatia están invertidos respecto de la circunferencia.

Ejemplo resuelto. Consideremos en el plano el punto A_1 que tiene coordenadas (x_1, y_1) y el círculo $\omega : x^2 + y^2 = r^2$. Encuentra las coordenadas (x_2, y_2) del punto A_2, que es simétrico al punto A_1 con respecto al círculo ω.

Solución. Las coordenadas (x_2, y_2) satisfacen dos ecuaciones

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}, (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = r^4.$$

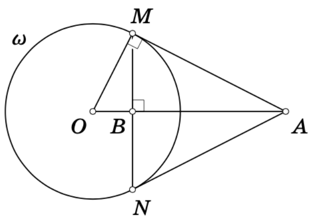
Pongamos $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$. Entonces, $\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)^2 = r^4$ y por eso $\alpha = \frac{r^2}{x_1^2+y_1^2}$. Por lo tanto concluimos que

$$x_2 = \frac{x_1 r^2}{x_1^2 + y_1^2}, \ y_2 = \frac{y_1 r^2}{x_1^2 + y_1^2}.$$

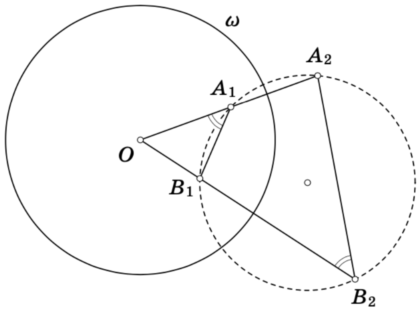
$\square$

Esta fórmula tiene la siguiente interpretación geométrica en el plano complejo: si $r = 1$, entonces la inversión del punto $z \neq 0$ con respecto a la circunferencia unidad es $\frac{1}{\bar{z}}$.

Problema 2. Supongamos que el punto A está fuera de la circunferencia ω con centro en O, AM y AN son tangentes la circunferencia ω, las líneas OA y MN se cruzan en el punto B. Entonces, los puntos A y B son simétricos con respecto a la circunferencia ω.



Teorema 2. *Supongamos que A_1, A_2 y B_1, B_2 son pares de puntos diferentes, simétricos respecto a la circunferencia ω con centro en O. Entonces, $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$.*



Demostración. Sea r el radio de la circunferencia ω. Por la definición de puntos simétricos, $|OA_1| \cdot |OA_2| = r^2 = |OB_1| \cdot |OB_2|$, por lo tanto,

$$\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OB_2|}{|OA_2|}.$$

Por la proporcionalidad de los lados, se sigue la semejanza de los triángulos $\triangle OA_1B_1$ y $\triangle OA_2B_2$ por dos lados y el ángulo entre ellos. De la semejanza de los triángulos se deduce la igualdad de los ángulos: $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$. □

La igualdad de estos ángulos también significa que el cuadrilátero $A_1A_2B_2B_1$ es inscrito, es decir, todas las cuatro puntos yacen en una misma circunferencia. Este hecho será útil más adelante para demostrar propiedades importantes de la inversión.

Problema 3. Decimos que un cuadrilátero es cíclico si existe una circunferencia S que contiene a los cuatro vértices del cuadrilátero.

a) Demuestra que si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180°$ y $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$.

b) Demuestra que si $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180°$ y $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Problema 4. La recta que no pasa por el centro de la inversión se transforma en una circunferencia que pasa por el centro de la inversión.

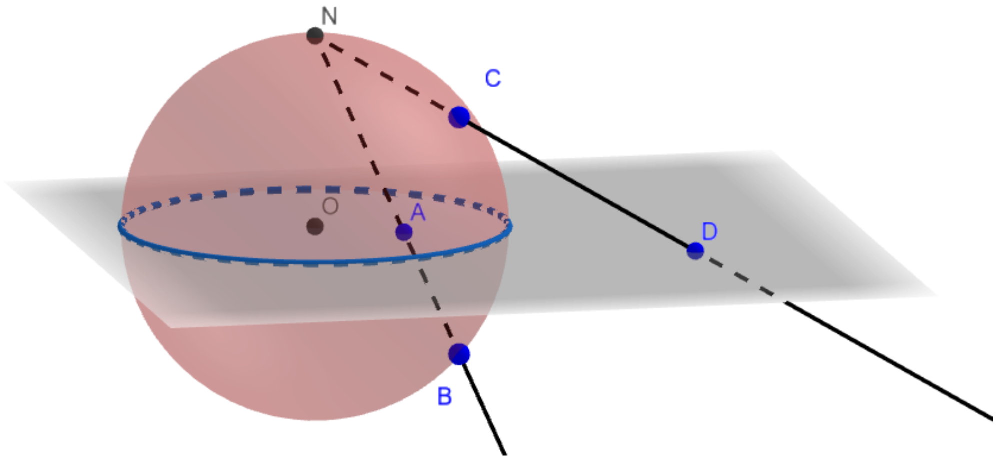
Es especialmente fácil construir la imagen de una recta que intersecta la circunferencia de inversión. Dado que los puntos de la circunferencia de inversión permanecen fijos, es suficiente trazar una circunferencia que pase por el centro de la inversión y dos puntos de intersección de la circunferencia de inversión y la recta original.

El ejercicio anterior se puede formular de otra manera: una circunferencia que pasa por el centro de inversión se transforma en una recta que no pasa por el centro de inversión. Ahora parece natural aplicar la inversión a cualquier circunferencia.

Problema 5. La circunferencia que no pasa por el centro de la inversión se transforma en una circunferencia que tampoco pasa por el centro de la inversión.

Problema 6. Demuestra que la inversión conserva el ángulo entre circunferencias (entre una circunferencia y una recta, y entre rectas).

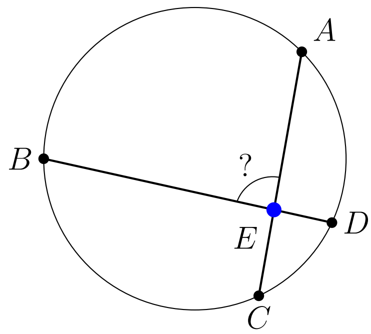
Problema 7. Demuestra que la inversión se puede calcular así: Tenemos un punto A y una circunferencia $\mathcal{S}$. Consideramos la esfera que tiene a $\mathcal{S}$ como ecuador, y llamamos N al punto de la esfera más alejado del plano. Unimos A con N, e intersecamos esta recta para encontrar un punto B en la esfera. Dibujamos C, el simétrico de B respecto del plano. Entonces, unimos N con C e intersecamos esta recta con el plano para encontrar D, que es el punto simétrico de A respecto de S.



Problemas

Problema 8.

Sabiendo cuánto miden los arcos $\overset{\frown}{AD} = 64°, \overset{\frown}{BC} = 146°$, halla el ángulo $\angle AEB$.



Problema 9. Los puntos A, B, C, D están colocados en este orden en una circunferencia. Llamemos K, L, M, N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$. Demuestra que las cuerdas MK, LN son perpendiculares.

Problema 10. A través de un punto A se traza una línea l que intersecta la circunferencia S con centro O en los puntos M y N, y no pasa por O. Sean M' y N' los puntos simétricos de M y N respecto a OA, y sea A' el punto de intersección de las líneas MN' y $M'N$. Demuestre que A' coincide con la imagen de A bajo la inversión respecto a S (y, por lo tanto, no depende de la elección de la línea l).

Problema 11. Demuestre que los círculos tangentes (un círculo y una línea) se transforman bajo una inversión en círculos tangentes o en un círculo y una línea, o en un par de líneas paralelas.

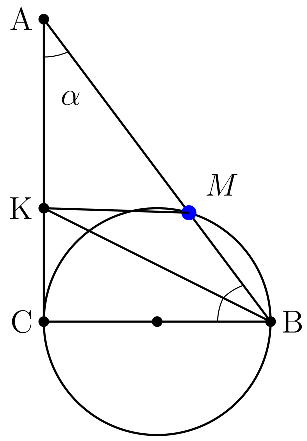
Problema 12. Construye, usando solo regla y compás, una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas y pase por un punto dado, que está situado fuera de estas circunferencias.

Problema 13. Lema de Arquímedes. Dos circunferencias son tangentes internamente en un punto M. Sea AB una cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia menor en el punto T. Demuestre que MT es la bisectriz del ángulo $\angle AMB$.

Problema 14. Supongamos que ningún conjunto de tres puntos de los cuatro puntos A, B, C, D es colineal. Demuestra que el ángulo entre las circunferencias circunscritas de los triángulos ABC y ABD es igual al ángulo entre las circunferencias circunscritas de los triángulos ACD y BCD.

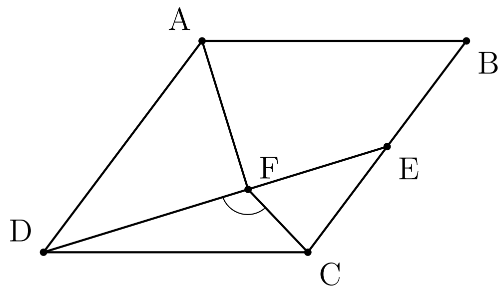
Problema 15.

En el triángulo $\triangle ABC$ sabemos que $\angle C = 90°, \angle A = \alpha$. La bisectriz del ángulo B corta AC en el punto K. BC es el diámetro de la circunferencia que corta la hipotenusa AB en el punto M. Busca $\angle AMK$.



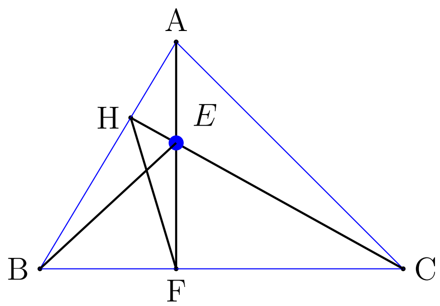
Problema 16.

En el rombo $ABCD$ han marcado E, el punto medio del lado BC. AF es perpendicular al segmento DE. Busca el ángulo $\angle DFC$ sabiendo que $\angle B = 40°$.



Problema 17.

En el triángulo ABC han trazado las alturas CH, AF que se cortan en el punto E. Sabemos que el segmento BE divide el ángulo $\angle B$ en $\angle ABE = 18°, \angle CBE = 26°$. Busca los ángulos del triángulo BHF.



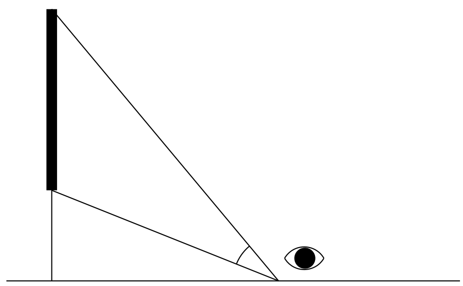
Problema 18. Encuentra el conjunto de puntos de tangencia de un par de circunferencias que tocan los lados de un ángulo dado en los puntos A y B.

Problema 19. Dado el ángulo $\angle A$ y un punto N traza una recta que recorta del ángulo un triángulo de perímetro p.

Problema 20. En el triángulo $\triangle ABC$ traza el segmento AM que lo divide en dos triángulos de igual perímetro.

Problema 21.

Hay una pantalla vertical de 100m de alto, pero su borde inferior está a 50m de altura, con lo que apenas se ve sin alejarse. ¿A qué distancia hay que alejarse para que ocupe el máximo ángulo en nuestro campo de visión?



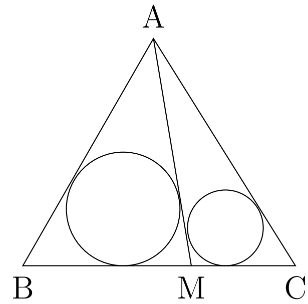
Problema 22. El triángulo ABC tiene un ángulo recto en A. Si AM es su mediana, demuestra que $|AM| = |BM| = |CM|$.

Problema 23. Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. AC es un diámetro de la primera circunferencia y AD es un diámetro de la segunda circunferencia. Demuestra que B, C y D están alineados.

Problema 24. Dado un círculo y un punto A fuera de él trazamos dos tangente AB y AC al círculo (B y C son puntos tangentes). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se encuentra en la circunferencia dada.

Problema 25.

El punto M está en el lado BC del $\triangle ABC$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABM$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACM$. ¿Puede ser mediana el segmento AM?



Problema 26. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

Problema 27. Tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que ningún par de lados son paralelos. Llamamos E al punto en el que se intersecan la prolongación de los lados AD y BC, y llamamos F al punto en el que se intersecan la prolongación de AB y DC. Demuestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE, ADF, DCE, y BCF pasan por un mismo punto.

Problema 28. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Problema 29. Sea ABC un triángulo con ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, circuncentro[1] O, incentro[2] I y ortocentro[3] H. Supongamos que $\angle A = 60°$.

a) Demuestra que hay una circunferencia que pasa por B, H, O, I y C.

b) Demuestra que $|OI| = |HI|$

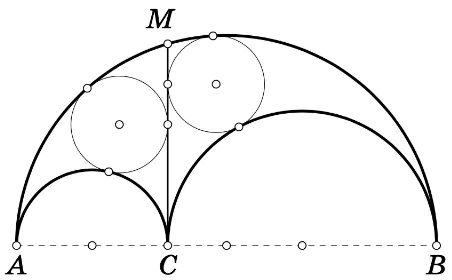
Problema 30. Tenemos un triángulo ABC en el plano. En cada uno de sus lados, dibujamos un triángulo equilátero en el exterior del triángulo ABC, creando los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF. Sean G, H e I los centros de los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF respectivamente. Demuestra que el triángulo GHI es equilátero.

Problema 31. Supongamos que un punto C está en un segmento AB. Construyamos en una dirección tres semicírculos sobre los diámetros AB, BC y AC (esto es un arbelos). El perpendicular MC al segmento AB divide el arbelos en dos partes. Demuestra que los radios de las circunferencias inscritas en estas partes del arbelos son iguales entre sí.

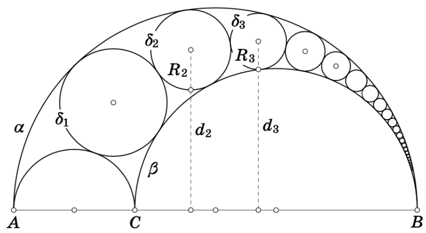
[1] El circuncentro de un triángulo es el centro de su circunferencia circunscrita, o equivalentemente, la intersección de las mediatrices de los tres lados del triángulo.

[2] El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia inscrita, o equivalentemente, la intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo.

[3] El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.



Problema 32. Dadas las circunferencias α, β y γ con diámetros AB, BC y AC respectivamente, que forman un arbelos, δ_1 es la circunferencia inscrita en el arbelos, la circunferencia δ_2 toca las circunferencias α, β y δ_1, la circunferencia δ_3 toca las circunferencias α, β y δ_2, $\ldots$, la circunferencia δ_{n+1} toca las circunferencias α, β y δ_n.

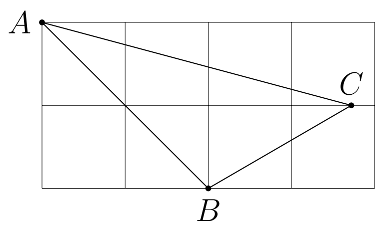


Sea R_n el radio de la circunferencia δ_n, d_n la distancia desde el centro de la circunferencia δ_n hasta la recta AB. Demuestra que entonces $\frac{d_1}{R_1} = 2$, $\frac{d_2}{R_2} = 4$, $\frac{d_3}{R_3} = 6$, $\ldots$, $\frac{d_n}{R_n} = 2n$, es decir, la distancia desde el centro de la n-ésima circunferencia hasta el diámetro del arbelos es $2n$ veces su radio.

Problemas para hacer en casa

22 de noviembre

Problema 33.



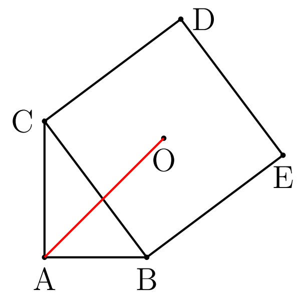
En una cuadrícula han dibujado el siguiente triángulo:
Sabiendo que el ángulo $\angle ACB = 45°$, encuentra los otros dos ángulos.

Problema 34. Demuestra que si en la inversión respecto a una circunferencia con centro O, la circunferencia S se transforma en la circunferencia S', entonces O es uno de los centros de homotecia de las circunferencias S y S'.

Problema 35. Con una regla y un compás, construye una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas que pasan por un mismo punto.

29 de noviembre

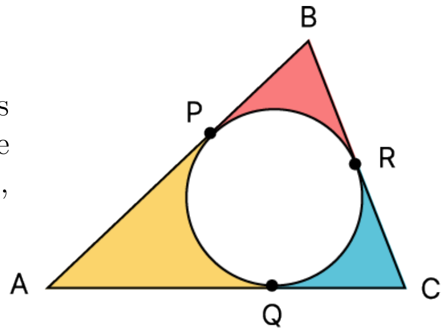
Problema 36.



En la hipotenusa de un triángulo rectángulo $ABC, \angle A = 90°$ se construye el cuadrado $BCDE$. Sea O el centro de este cuadrado, halla $\angle BAO$.

Problema 37.

Dado el ángulo A y la circunferencia inscrita que toca los lados en los puntos P, Q, demuestra que podemos trazar una única tangente BC de modo que el área amarilla sea el resto entre la azul y la rosa, es decir, $Area_{APQ} = Area_{CQR} - Area_{BPR}$



Problema 38. Demuestra que dos circunferencias S_1 y S_2 (o una circunferencia y una recta) que no se intersecan pueden transformarse mediante una inversión en un par de circunferencias con el mismo centro.

13 de diciembre

Problema 39. El radio de la circunferencia circunscrita sobre los puntos medios de los lados del triángulo ABC es igual a 3. $\angle A = 60°, \angle B = 45°$. Busca el área del triángulo ABC.

Problema 40. En el triángulo ABC se traza la bisectriz AD. Las puntos M y N son las proyecciones de los vértices B y C sobre AD. La circunferencia con diámetro MN corta a BC en los puntos X e Y. Demuestre que $\angle BAX = \angle CAY$.

Problema 41. Sea $ABCDE$ un pentágono cuyos vértices están en una circunferencia. Además, sabemos que $|AB| = |BC|$ y que $|CD| = |DE|$. Llamamos P al punto de intersección de las diagonales AD y BE, Q al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y R al punto de intersección de las diagonales BD y CE.

a) Demuestra que $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

b) Usa la parte anterior para demostrar que el cuadrilátero $ABQP$ es cíclico, es decir, que existe una circunferencia que contiene a sus cuatro vértices.

c) Demuestra que el cuadrilátero $EDRP$ también es cíclico.

d) Usa las partes b) y c) para demostrar que el triángulo PQR es isósceles.