Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22 y 29 de noviembre, 13 de diciembre de 2024
Geometría: Áreas
Grupo: Marte y Neptuno (Soluciones)

Demostrando teoremas conocidos

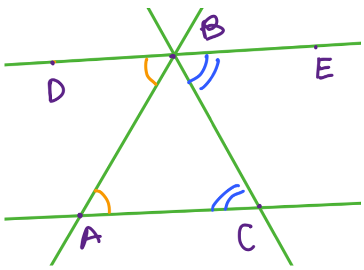
Empezamos recordando algunos teoremas importantes que has visto en clase y seguramente hayas usado muchas veces, pero que quizás aún no sabes por qué son verdad.

Teorema 1 (Suma de los ángulos de un triángulo)**.** *Los tres ángulos de cualquier triángulo suman* 180°.

Demostramos este teorema en el siguiente ejemplo resuelto. Asegúrate de entender su demostración.

Ejemplo resuelto. Demuestra el teorema anterior.

Solución. Sea ABC un triángulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.

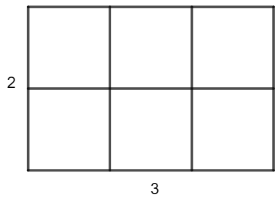


Como las rectas AC y DE son paralelas, tenemos que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°,$$

donde la última igualdad es cierta porque D, B y E están alineados. □

Ahora, vamos a hablar de **áreas**. El área más fácil de calcular es el de un rectángulo de lados enteros. Por ejemplo, si tenemos un rectángulo cuyos lados miden 2 cm y 3 cm respectivamente, su área será $2 \cdot 3 = 6$ cm^2, ya que podemos dividirlo en 6 cuadraditos de 1 cm^2 de esta manera.



Argumentando de la misma manera, podemos ver que si los lados de un rectángulo miden n y m, donde n y m son números enteros positivos, entonces su área es $n \cdot m$. Esta fórmula es cierta para todos los rectángulos, aunque sus lados no sean números enteros, es decir:

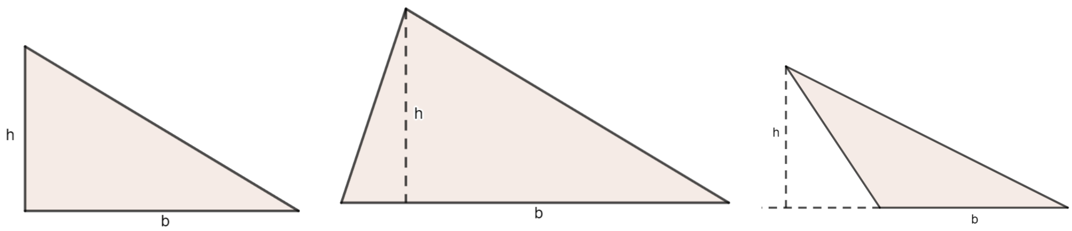
$$\boxed{\text{El área de un rectángulo de lados } a \text{ y } b \text{ es } a \cdot b.}$$

Esta fórmula la conoces de verla en clase. Nosotros vamos a usarla para demostrar otras fórmulas que ya conoces.

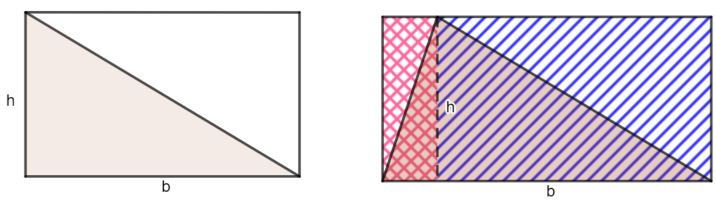
Teorema 2. *El área de un triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$, donde b es la longitud de uno de sus lados (base) y h es la longitud de la altura que sale del vértice opuesto.*

Problema 1. Demuestra el teorema anterior a partir de la fórmula del área de un rectángulo. Para ello, tendrás que considerar dos casos distintos.

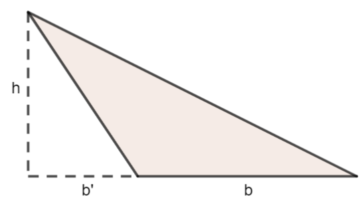
- La altura es uno de los lados del triángulo (en particular, el triángulo es rectángulo).
- La altura está dentro del triángulo.
- La altura está fuera del triángulo.



Solución. En los dos primeros casos , dibujamos un rectángulo trazando líneas perpendiculares a b por los vértices del lado b, y una paralela a b que pasa por el vértice opuesto al lado b. El área de este rectángulo es $b \cdot h$, y el dibujo muestra que es el doble del área del triángulo correspondiente.



Si la altura está fuera del triángulo, el área del triángulo es la resta del área de los dos triángulos rectángulos de la figura:

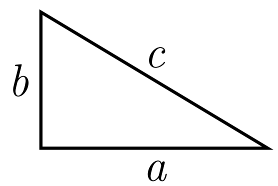


Uno de estos triángulos tiene base $b+b'$ y altura h, y otro tiene base b' y altura h. Así, por el primer caso, el área es

$$\frac{(b+b')\cdot h}{2} - \frac{b'\cdot h}{2} = \frac{b\cdot h}{2} + \frac{b'\cdot h}{2} - \frac{b'\cdot h}{2} = \frac{bh}{2}.$$

$\square$

Teorema 3 (Teorema de Pitágoras)**.** *En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden a y b, y cuya hipotenusa mide c.*

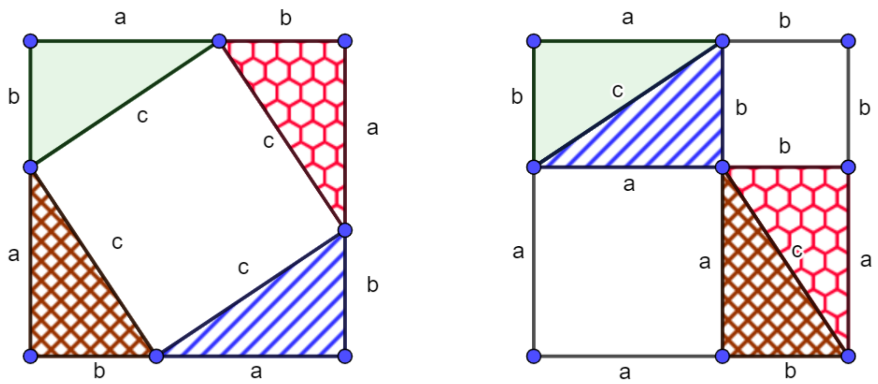


Las longitudes de los catetos y la hipotenusa se relacionan de esta manera:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Demostramos el Teorema de Pitágoras[1] en el siguiente ejercicio.

Problema 2. Consideramos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, y cuya hipotenusa mide c como el de la figura anterior. En las siguientes figuras se muestra un cuadrado de lado $a+b$, pero dividido de distintas maneras:



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué la figura blanca dentro del primer cuadrado de lado $a+b$ es un cuadrado?

b) Demuestra que las áreas de la parte blanca de los dos cuadrados miden lo mismo. Deduce que el Teorema de Pitágoras es cierto.

Solución. a) El ángulo entre dos segmentos con la etiqueta c mide (en grados) 180 menos la suma del valor de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo de lados a, b y c. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, el ángulo entre dos segmentos con la etiqueta c es el valor del ángulo restante del triángulo rectángulo, es decir, el valor del ángulo recto, que es 90°. Por tanto, la figura blanca es un polígono con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales (todos rectos), es decir, es un cuadrado.

[1]Este teorema ya era conocido en la India y en Egipto aproximadamente 1000 años antes de que naciera Pitágoras

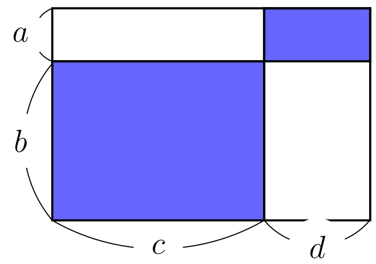
b) El área blanca en ambas figuras es el área del cuadrado grande ($(a+b)^2$) menos el área de los cuatro triángulos rectángulos del dibujo ($4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$), en particular, son iguales. El área blanca en la primera figura es c^2. El área blanca en la segunda figura es $a^2 + b^2$. Por tanto, $a^2 + b^2 = c^2$, es decir, el Teorema de Pitágoras es cierto.

$\square$

La regla de tres

Vamos a ver un teorema sencillo pero muy útil.

Teorema 4. *El producto de las áreas azules es igual al producto de las blancas.*

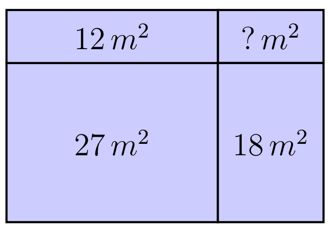


Problema 3. Demuestra el teorema anterior.

Solución. El producto de las áreas blancas es $ac \times bd = abcd$, el de las azules es $bc \times ad = abcd$. $\square$

El teorema anterior nos permite aplicar la regla de tres: sabiendo 3 de las 4 áreas siempre podremos calcular la cuarta.

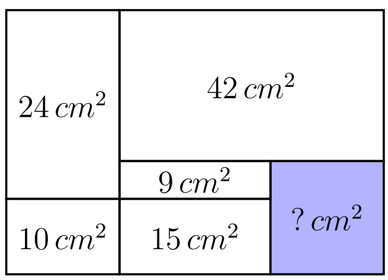
Problema 4. Halla el área de la habitación más pequeña de este piso:



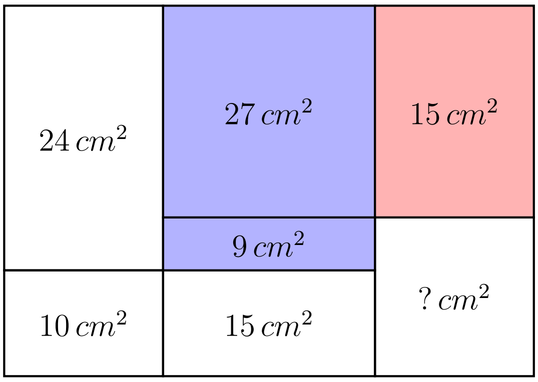
Solución. Por el teorema anterior, tenemos $27x = 12 \cdot 18$, de ahí que $x = 8$ m^2. $\square$

En algunos problemas para poder aplicar la regla de 3 tendrás que partir un área en dos.

Problema 5. Halla el área de la habitación azul (abajo a la derecha):



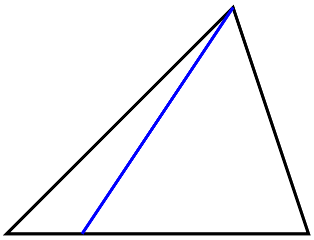
Solución. Separemos la habitación más grande en dos estancias:



El área de las dos habitaciones azules se puede encontrar como $A_{azul} = 15 \cdot 24 : 10 = 36$, ahora la azul de arriba mide $36 - 9 = 27$, por lo que la rosa mide $42 - 27 = 15$. Ahora volvamos a aplicar la regla de tres para hallar el área de la habitación de la esquina inferior derecha: $A_{esquina} = 15 \cdot (9 + 15) : 27 = 40/3$. $\square$

Partiendo áreas

Definición. Una **ceviana** en un triángulo es un segmento que une un vértice con el lado opuesto o su continuación.

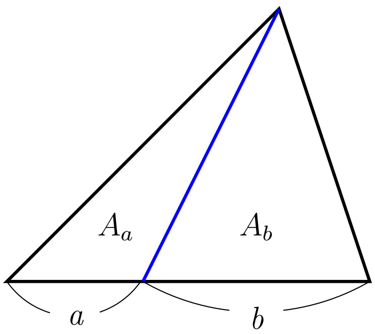


La mediana[2], la bisectiz y la altura son casos particulares de cevianas.

Cada ceviana interior divide el triángulo en dos más pequeños que comparten altura. De ahí podemos sacar un sencillo teorema que nos resultará muy útil:

Teorema 5. *La ceviana interior divide el triángulo en dos cuyas áreas A_a y A_b son proporcionales a sus bases a y b:*

$$\frac{A_a}{A_b} = \frac{a}{b}$$



Problema 6. Demuestra el teorema anterior.

[2]segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto

Solución. Llamamos h a la altura de ambos triángulos. Entonces,

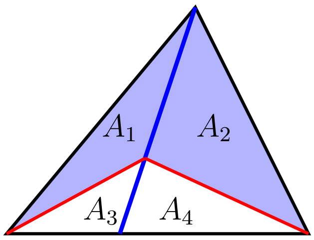
$$\frac{A_a}{A_b} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2}} = \frac{a}{b}.$$

$\square$

Otro resultado interesante surge si unimos cualquier punto de la ceviana con otros dos vértices del triángulo:

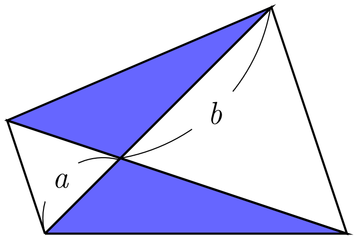
Teorema 6 (del avioncito de papel)**.** *Las áreas de arriba son proporcionales a las áreas de abajo:*

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}$$



Existe un resultado similar y muy útil aplicable a cualquier cuadrilátero:

Teorema 7 (de la cometa)**.** *En el cuadrilátero se trazan las diagonales. El producto de las áreas azules es igual al producto de las blancas.*



Problema 7. Demuestra los teoremas del avioncito de papel (Teorema 6) y de la cometa (Teorema 7) a partir del Teorema 5.

Solución. Empezamos demostrando el Teorema 6. Llamamos b a la longitud de la parte de la ceviana que separa A_3 y A_4, y a a la longitud de la parte de la ceviana que separa A_1 de A_2. Aplicando el Teorema 5 a los triángulos que se forman a ambos lados de la ceviana, obtenemos que

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{a}{b} = \frac{A_2}{A_4},$$

y esto concluye la demostración del Teorema 6.

Ahora, demostramos el Teorema 7. Llamamos A_1 al área blanca de la izquierda, A_2 al área azul de arriba, A_4 al área blanca de la derecha, y A_3 al área azul de abajo. Aplicando el Teorema 5 a los triángulos que se forman como unión de A_1 y A_2, y como unión de A_3 y A_4, obtenemos que

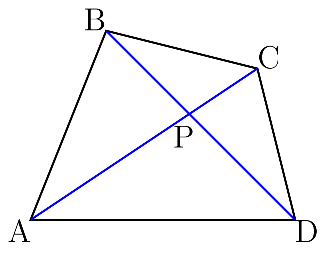
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{b} = \frac{A_3}{A_4},$$

y multiplicando la ecuación por A_2A_4 obtenemos que

$$A_1A_4 = A_2A_3,$$

es decir, el producto de las áreas blancas es igual al producto de las áreas azules. $\square$

Problema 8. Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto P.

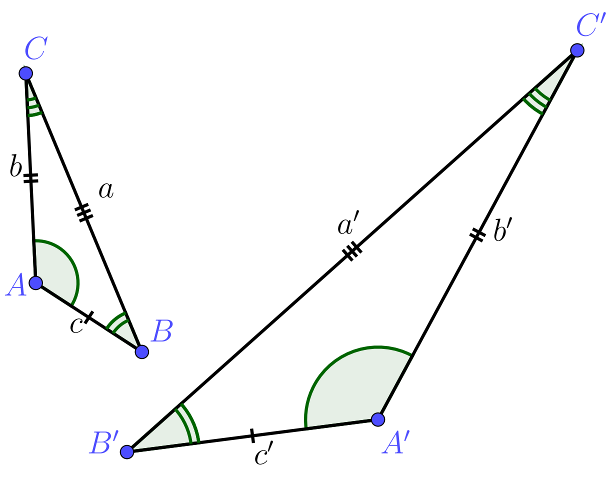


Se conocen las áreas de tres triángulos: $A_{ABP} = 12, A_{BCP} = 9, A_{CDP} = 8$. Busca el área del $\triangle ADP$.

Solución. Por el lema de la cometa $A_{ADP} \cdot A_{BCP} = A_{ABP} \cdot A_{CDP}$. Sustituyendo las cantidades que conocemos, $9A_{ADP} = 12 \cdot 8$, por lo que $A_{ADP} = \frac{32}{3}$. $\square$

Áreas usando semejanza

Definición. Decimos que dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, dos triángulos son semejantes si existe una forma de etiquetar sus vértices como ABC y $A'B'C'$ de manera que $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$, como se muestra en el siguiente dibujo:



El motivo por el que la semejanza de triángulos nos va a ser útil a la hora de calcular áreas es porque nos da una relación entre las longitudes de los lados correspondientes de triángulos semejantes, como mostramos en el siguiente recuadro:

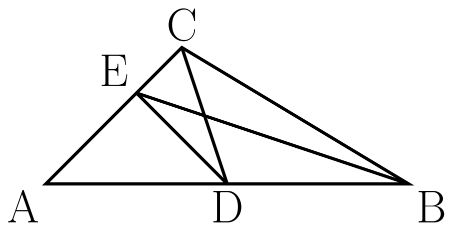
Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, entonces

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Por ejemplo, si en el dibujo anterior, $a' = |B'C'|$ es el doble de grande que $a = |BC|$, eso significará que $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{1}{2}$. Por tanto, el recuadro anterior nos dice que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{1}{2}$ (es decir, que c' es el doble de grande que c) y que $\frac{|CA|}{|C'A'|} = \frac{1}{2}$ (es decir, que b' es el doble de grande que b).

Usando el recuadro anterior (y tu imaginación para saber cómo aplicarlo), resuelve el siguiente problema.

Problema 9. En el lado AC del triángulo ABC se elige el punto E tal que $\frac{|AE|}{|EC|} = 2$. Se sabe que el área del triángulo CBD es $A_{CBD} = 12$. Halla el área A_{EBD} del triángulo EBD.



Pista: traza perpendiculares al lado AB desde E y C, y compara los dos triángulos rectángulos que te quedan dibujados.

Solución. Ambos triángulos comparten la base. Los triángulos rectángulos de base en el lado AB e hipotenusas AE y AC respectivamente son semejantes. Como $\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{1}{2}$, tenemos que $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AE|+|EC|}{|AE|} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Sea h la altura del triángulo EBD con base BD, y sea h' la altura del triángulo CBD con base BD. La relación de semejanza de los triángulos rectángulos anteriores nos dice que

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{h'}{h} = \frac{3}{2},$$

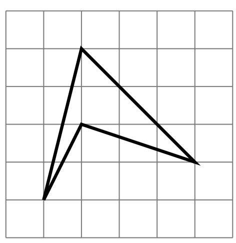
y en particular $h = \frac{2h'}{3}$ Por tanto,

$$A_{EBD} = \frac{h \cdot |BD|}{2} = \frac{2}{3}\frac{h' \cdot |BD|}{2} = \frac{2}{3}A_{CBD} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

□

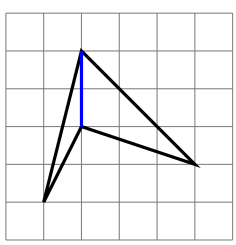
Problemas

Problema 10. Busca el área de esta figura:



donde cada lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm.

Solución. Dividamos la figura en dos:

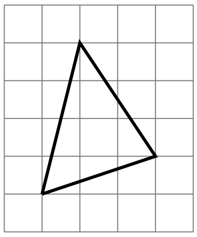


Ahora ambos triángulos tienen la base 2 y las alturas, 1 y 3 correspondientemente.

$$A_{total} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 2$$

□

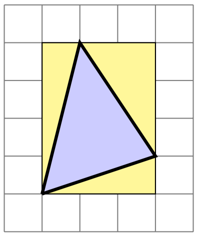
Problema 11. Halla el área del siguiente triángulo,



donde cada lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm.

Solución. Claramente, podríamos intentar calcular la base aplicando el Teorema de Pitágoras, pero ¿cómo podemos hallar la altura?

En vez de recurrir a las fórmulas, inscribiremos el triángulo en un rectángulo, como en el dibujo siguiente:

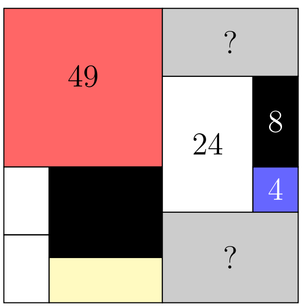


El área del rectángulo es 12 cm^2, y calcular el área de los triángulos rectángulos amarillos es muy sencillo: es igual al producto de los catetos (lados pequeños) entre dos. Por tanto, nuestra área mide

$$A = 12 - (\frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2}) = 5,5cm^2$$

□

Problema 12. Martín Ondrián ha dibujado un cuadro abstracto hecho de rectángulos en un lienzo cuadrado:



Los números que aparecen son las áreas de los rectángulos en las que se encuentran. Sabiendo que el rectángulo rojo (el de área 49) y el azul (el de área 4) son cuadrados, busca la suma de las áreas grises.

Solución. Como el lado azul es igual a 2, el lado largo del rectángulo negro vertical es igual a 4. Como las áreas blanca-negra-azul suman 36 y su lado vertical es 6, se trata de un cuadrado de lado horizontal 6 también. Entonces el lado horizontal del lienzo es $\sqrt{49} + 6 = 13$, pero como es cuadrado, lo es también su lado vertical. Entonces la suma de las alturas de los rectángulos grises es $13 - 6 = 7$, su ancho es 6 y su área, por tanto, 42.

□

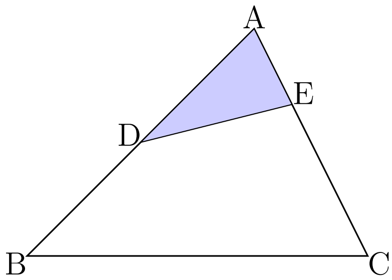
Problema 13. Demuestra que el área de un paralelogramo de altura a y base b es ab

Solución. Cortemos del paralelogramo un triángulo rectángulo por la izquierda y añadámoslo por la derecha:

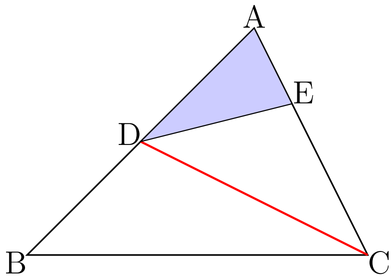
El resultado es un rectángulo de tamaño ab

□

Problema 14. El área del triángulo grande es 90. $|AD| = |DB|$, $2|AE| = |EC|$ Busca el área sombreada.

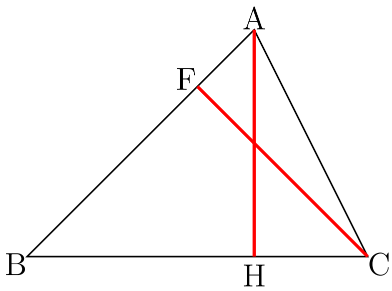


Solución. Tracemos DC. Ahora $A_{BDC} = A_{ADC}$, $3A_{ADE} = A_{ADC}$. Respuesta: $A_{ADE} = (90 : 2) : 3 = 15$



□

Problema 15. AH, CF son alturas del triángulo ABC. $|AH| = 9, |CF| = 8, |BC| = 24$. Halla $|AB|$.



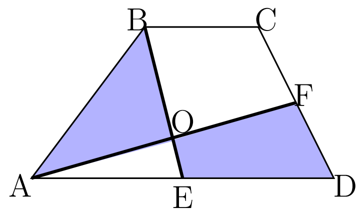
Solución. Lo interesante de este problema es que, aunque a primera vista no tiene nada que ver con las áreas, se resuelve recurriendo a ellas.

El área de ABC se puede expresar de dos maneras distintas:

$$A_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{AB \times CF}{2}$$

Como $BC \times AH = AB \times CF$, $AB = 27$. □

Problema 16. En el trapecio $ABCD$, $|AE| = |ED|$, $|CF| = |FD|$. Demuestra que $A_{ABO} = A_{OFDE}$.

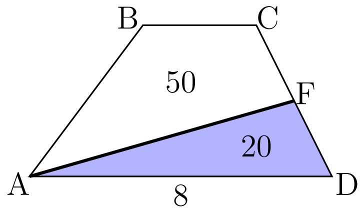


Solución. Demostraremos primero que $A_{ABE} = A_{AFD}$. Efectivamente, $A_{ABE} = \frac{AE \times h}{2}$, donde h es la altura del trapecio. $A_{AFD} = \frac{A_{ACD}}{2} = \frac{2AE \times h}{2 \cdot 2}$ porque AF es la mediana del $\triangle ACD$. Ahora las áreas sombreadas son iguales porque

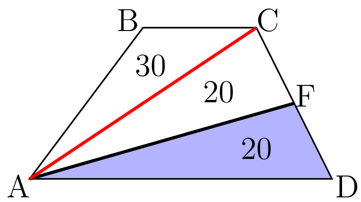
$$A_{ABO} = A_{ABE} - A_{AOE} = A_{AFD} - A_{AOE} = A_{OFDE}$$

□

Problema 17. En el trapecio $ABCD$, $|CF| = |FD|$ y lado $|AD| = 8$. Además, $A_{AFD} = 20$ y $A_{ABCF} = 50$ ¿Cuánto mide el lado BC?



Solución. Tracemos la diagonal AC, como AF es la mediana del $\triangle ACD$, dividirá el cuadrilátero $ABCF$ en triángulos de áreas 30 y 20:

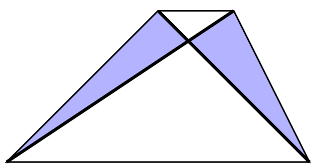


Comparemos ahora los triángulos ABC, ACD. Como comparten altura, sus áreas se relacionan como las bases del trapecio: $A_{ABC} : A_{ACD} = 30 : 40 = |BC| : |AD|$. Así que $|BC| = 6$.

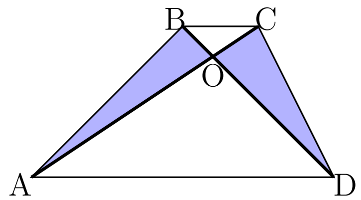
□

Problema 18. Demuestra el siguiente resultado:

Teorema 8 (de la mariposa)**.** *En un trapecio se trazan las diagonales. Los triángulos laterales que se forman (sombreados en el dibujo) tienen la misma área.*



Solución. Considera los triángulos ABD y ACD. Comparten base y altura, por tanto, tienen la misma área.

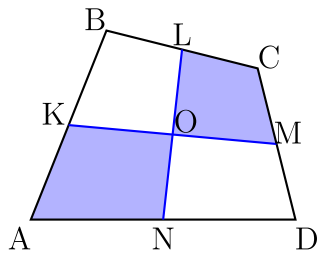


Por otro lado, cada uno de estos triángulos está compuesto por el triángulo AOD más un ala de la mariposa:

$$A_{ABO} = A_{ABD} - A_{AOD} = A_{ACD} - A_{AOD} = A_{COD}$$

$\square$

Problema 19. Sean K, L, M, N centros de los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero convexo $ABCD$; y sea O el punto de intersección de KM y LN.



Demuestra que la suma de áreas sombreadas es igual a la de las blancas:

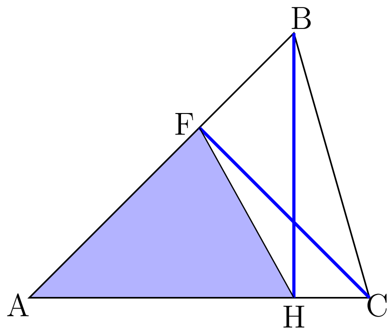
$$A_{AKON} + A_{CLOM} = A_{BKOL} + A_{DNOM}$$

Solución. **Pistas:** Traza los segmentos AO, OB, OC, OD y considera los 4 triángulos grandes que se han formado

Como N y K son los puntos medios de AD y AB respectivamente, tenemos que $A_{AKON} = A_{AKO} + A_{AON} = (A_{AOB} + A_{AOD})/2$. Análogamente, $A_{CLOM} = (A_{BCO} + A_{COD})/2$. Por esto, $A_{AKON} + A_{CLOM} = A_{ABCD}/2$.

$\square$

Problema 20. En el triángulo ABC se han trazado las alturas BH, CF. El área del triángulo AFH es 18. Sabemos que $|AF| = 8$ y que $|FC| = 6$. Halla el área del triángulo ABC.



Solución. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo AFC, obtenemos que

$$|AC| = \sqrt{|AF|^2 + |FC|^2} = 10.$$

Sea h el valor de la altura del triángulo AHF que sale del vértice F. Tenemos que

$$A_{AFH} = 18 = \frac{h \cdot |AH|}{2},$$

por lo que $h = \frac{36}{|AH|}$.

Ahora, calculamos el área del triángulo AFC de dos maneras, una considerando como base AF, y otra considerando como base AC.

$$A_{AFC} = \frac{|AF| \cdot |FC|}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 = \frac{|AC| \cdot h}{2} == \frac{10 \cdot h}{2} = 5h,$$

por lo que $h = \frac{24}{5}$. Igualando los dos valores de h obtenidos, sacamos que $\frac{36}{|AH|} = \frac{24}{5}$, por lo que

$$|AH| = \frac{15}{2}.$$

Los triángulos AHB y AFC son semejantes (con ese orden de los vértices): La semejanza se debe a que el $\angle A$ es común, y otra pareja de ángulos son rectos por ser CF, BH alturas. Por tanto,

$$\frac{|AH|}{|AF|} = \frac{|HB|}{|FC|},$$

y sustituyendo los valores que conocemos de $|AF|$, $|FC|$ y $|AH|$ en la ecuación anterior, obtenemos que

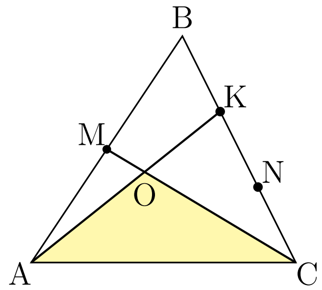
$$|HB| = \frac{3}{4}\frac{15}{2} = \frac{45}{8}.$$

Finalmente,

$$A_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |HB|}{2} = \frac{10 \cdot \frac{45}{8}}{2} = \frac{225}{8}.$$

□

Problema 21. En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado AB y los puntos K, N dividen el lado BC en 3 partes iguales. La mediana CM corta la ceviana AK en el punto O. Sabiendo que $A_{\triangle ABC} = 40$ busca el área sombreada $A_{\triangle AOC}$.



Pista: Dibuja el segmento BO y usa los Teoremas 5 y 6 para establecer relaciones entre los distintos triángulos que aparecen dentro del triángulo inicial.

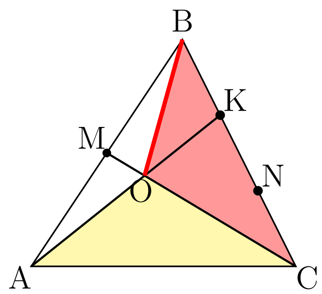
Solución. Vamos a trazar el segmento BO. Tenemos que $A_{\triangle AMO} = A_{\triangle BMO}$ porque son dos triángulos con base de la misma longitud, y la misma altura. Usando eso, vemos que las áreas rosa y amarilla son iguales por el Teorema del avioncito de papel (Teorema 6). Usando el Teorema 5 aplicado al triángulo COB y la ceviana OK, obtenemos que $A_{\triangle COK} = 2A_{\triangle BOK}$, y por tanto $A_{\triangle COK} = \frac{2}{3}A_{\triangle BOC} = \frac{2}{3}A_{\triangle AOC}$. Fijándonos en la ceviana AK vemos que $A_{\triangle ACK} = \frac{2}{3}A_{\triangle ABC}$. Por otro lado, esta área es la suma de la amarilla y dos tercios de la rosa, lo que nos da

$$A_{\triangle ACK} = \frac{2}{3}A_{\triangle AOC} + A_{\triangle AOC}$$

Por lo que

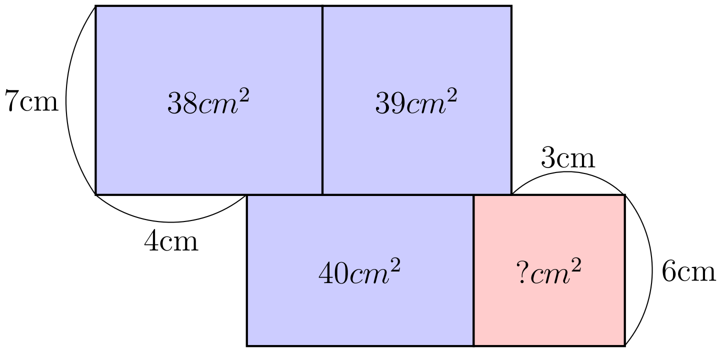
$$\frac{5}{3}A_{\triangle AOC} = \frac{2}{3}A_{\triangle ABC}$$

De ahí es fácil despejar el área que buscamos, vale 2/5 del área total. $A_{\triangle AOC} = 12$.

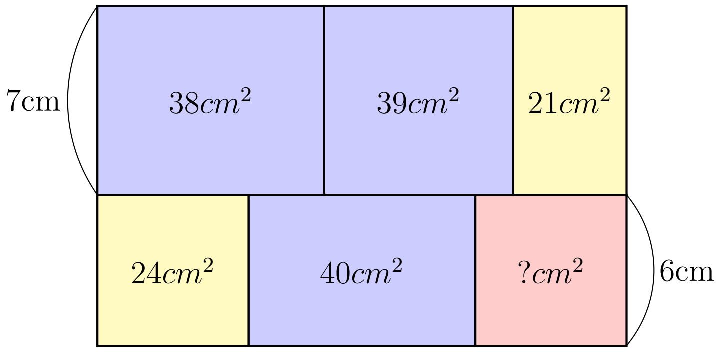


□

Problema 22. Busca el área del cuarto de baño rosa (derecha abajo):



Solución. Rellenemos los rectángulos invisibles y pintémoslos de amarillo:



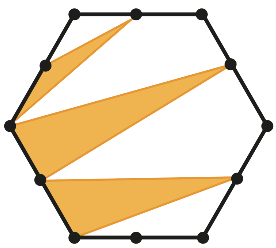
Ahora vemos que la suma de las áreas de arriba es mayor que la suma de las de abajo en proporción $7:6$, de modo que

$$\frac{38+39+21}{24+40+x} = \frac{7}{6}$$

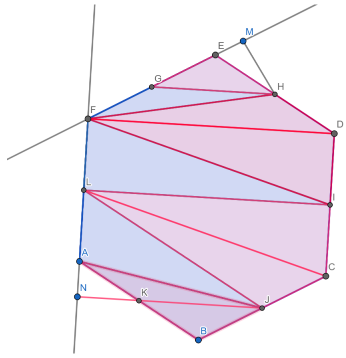
De ahí que $x = 20m^2$

□

Problema 23. En un hexágono regular se marcan los puntos medios de los lados. ¿Qué parte del área total está sombreada?



Solución. Es fácil ver que todos los triángulos del dibujo tienen la misma base, y sus alturas son proporcionales a la altura MH.



De esta manera vemos que

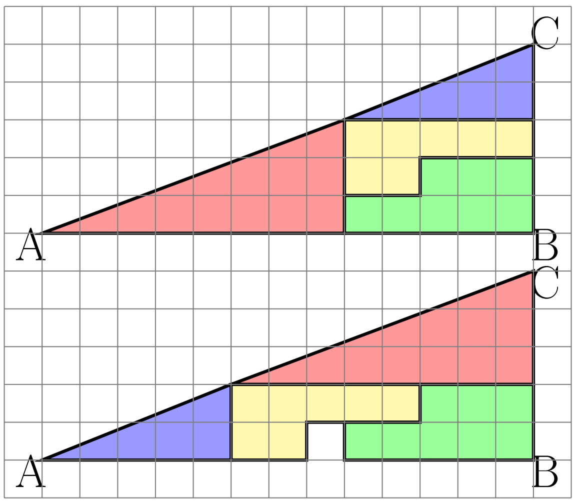
$$A_{FGH} = A_{GEH}, A_{FHD} = A_{ABJ} = 2A_{FGH}, A_{AJL} = A_{CJL} = 3A_{FGH}$$

$$A_{DFI} = A_{FLI} = A_{CLI} = 4A_{FGH}$$

El área que buscamos es $\frac{8}{8+16} = \frac{1}{3}$ del total.

□

Problema 24. Hemos formado un triángulo con 4 trozos de 4 colores distintos. Luego hemos recompuesto el mismo triángulo usando las mismas piezas, pero ahora ¡nos ha faltado un cuadradito! ¿Dónde y cómo se ha escondido?



Solución. Estas dos figuras no son triángulos sino cuadriláteros. Si fueran triángulos, los triángulos azul y rojo serían semejantes, pero no lo son: sus lados verticales están a razón $2 : 3$, y sus lados horizontales están a razón $5 : 8$. Por tanto el área de arriba es un poco menor que el área del triángulo ABC y la de abajo, algo mayor.

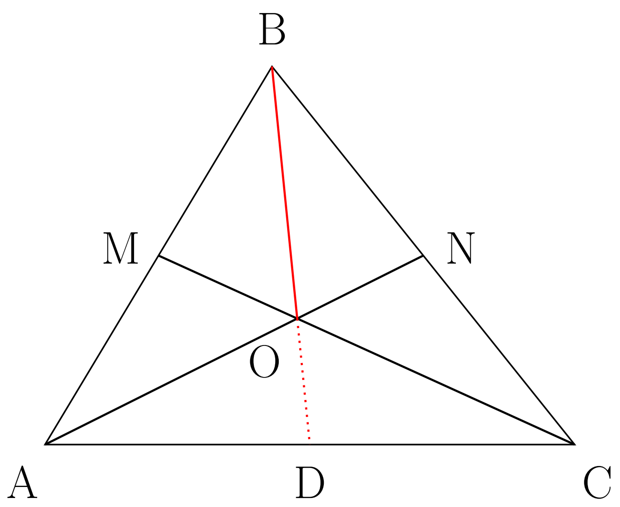
□

Problema 25. Demuestra que las tres medianas[3] de cualquier triángulo se cortan en el mismo punto.

Solución. **Pistas:** Usa las áreas y el lema del avioncito

Trazaremos las medianas CM, AN, llamemos O el punto de su intersección y trazaremos BO y su continuación OD (sin saber que es parte de la tercera mediana):

[3]segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto



Como OM es mediana en $\triangle AOB$, $A_{AOM} = A_{BOM}$. Como CM es mediana, $A_{ACM} = A_{BCM}$. Vemos que $A_{AOC} = A_{BOC}$ como resta de estas áreas.

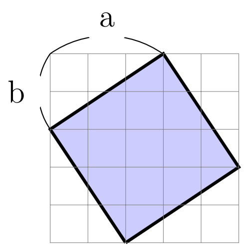
Análogamente, analizando la mediana AN llegamos a que $A_{AOC} = A_{AOB}$, por lo que $A_{AOB} = A_{BOC}$. Ahora usando el lema del avioncito vemos que

$$\frac{A_{AOB}}{A_{AOD}} = \frac{A_{BOC}}{A_{COD}}$$

de donde sacamos que las áreas $A_{AOD} = A_{COD}$ son iguales, lo mismo que $A_{ABD} = A_{CBD}$. Como los triángulos AOD y COD tienen la misma altura y la misma área, tienen que tener la misma base, es decir $|AD| = |DC|$. Pero esto significa que BD es una mediana. $\square$

Problema 26. Dibuja en la cuadrícula cuadrados con vértices en los nodos de la cuadrícula de área $2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 20$. En realidad, te estoy engañando un poco. Hay dos que no podrás construir. ¿Cuáles son?

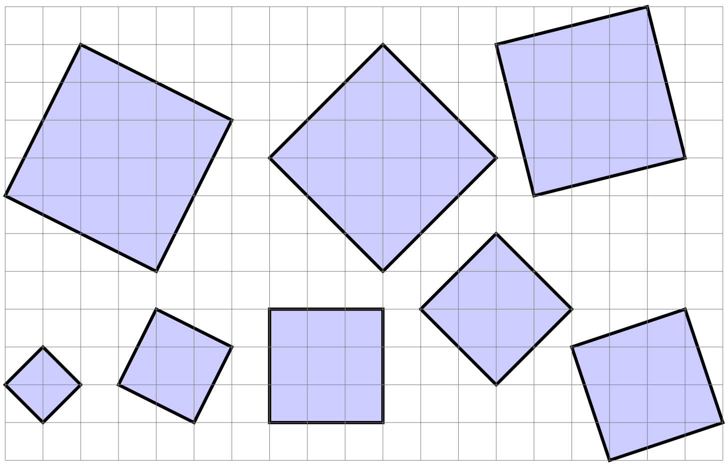
Solución. Los que no podrás construir serán los cuadrados de área $11, 19$. Llamemos a, b los catetos de los pequeños triángulos que completan nuestro cuadrado inclinado hasta uno más grande:



Es fácil ver que el área del cuadrado sombreado se puede expresar como

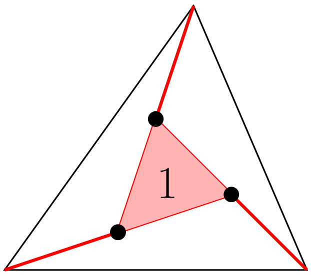
$$A = (a+b)^2 - 4 \times \frac{ab}{2} = a^2 + b^2$$

(¡de paso hemos demostrado el Pitágoras!). No hay ninguna pareja de enteros cuyos cuadrados sumen 11 ni 19. Otras soluciones están en el dibujo:

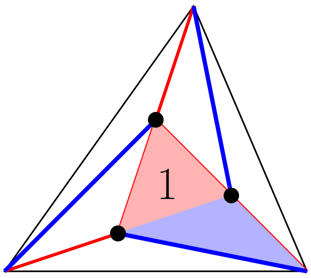


□

Problema 27. Los puntos negros dividen los segmentos interiores rojos en 2 partes iguales. El área del triángulo interior es 1. ¿Cuál es el área del triángulo grande?



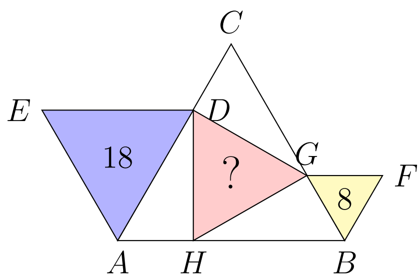
Solución. Tracemos medianas azules de los triángulos blancos:



Ahora se ve que el triángulo sombreado azul tiene la misma área que el triángulo rosa central, además, el triángulo sombreado azul tiene la misma área que el blanco de abajo, es decir, las 7 áreas interiores son iguales. Respuesta: 7.

□

Problema 28. Los triángulos ABC, ADE, BGF, DGH son equilateros. $A_{ADE} = 18, A_{BGF} = 8$. Busca A_{DGH}.



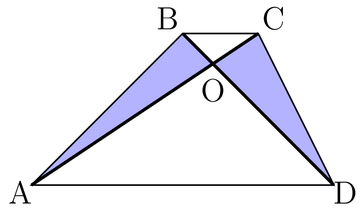
Solución. Para empezar, vamos a demostrar que los triángulos CDG, BGH, ABD son iguales. Lo son los ángulos $\angle C = \angle B = \angle A = 60°$ del equilátero grande. Si llamamos $\angle AHD = \alpha$, entonces $\angle BHG = 180° - \alpha - 60°$ y $\angle HGB = 180° - 60° - (180° - \alpha - 60°) = \alpha$. Además, estos triángulos tienen un lado igual porque $\triangle DGH$ es equilátero.

Recordando que la relación de las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la relación entre sus lados, y aplicándolo a los triángulos azul y amarillo, vemos que $AD : DC = AD : BG = \sqrt{18} : \sqrt{8} = 3 : 2$. De ahí que el área de cada triángulo blanco sea $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ del triángulo ABC. Por otro lado, el área $A_{BGF} = \frac{4}{25} A_{ABC} = 8$. Finalmente,

$$A_{ABC} = 50,\ A_{BGH} + A_{CDG} + A_{ADH} = 3 \cdot 12 = 36, A_{DGH} = 50 - 36 = 14$$

□

Problema 29. En el trapecio $ABCD$ el punto O es la intersección de las diagonales. $A_{\triangle BOC} = 1, A_{\triangle AOD} = 9$. Busca el área del trapecio.



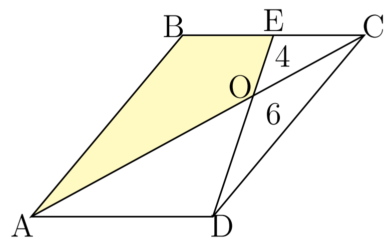
Solución. Por el Teorema de la cometa (Teorema 7) $A_{BOC} \cdot A_{AOD} = A_{BOA} \cdot A_{COD}$. Por el Teorema de la mariposa (Teorema 8), $A_{AOB} = A_{COD} = x$. Ahora tenemos

$$x^2 = A_{BOC} \cdot A_{AOD} = 9$$

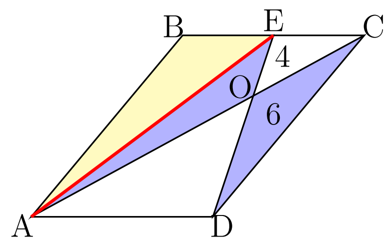
por lo que $x = 3$ y el área total del trapecio es igual a $A = 1 + 9 + 3 + 3 = 16$

□

Problema 30. En el paralelogramo $ABCD$ se traza la diagonal AC y el segmento DE tal que el área $A_{DOC} = 6, A_{EOC} = 4$. Busca el área sombreada del cuadrilátero $ABEO$.



Solución. Tracemos el segmento AE:



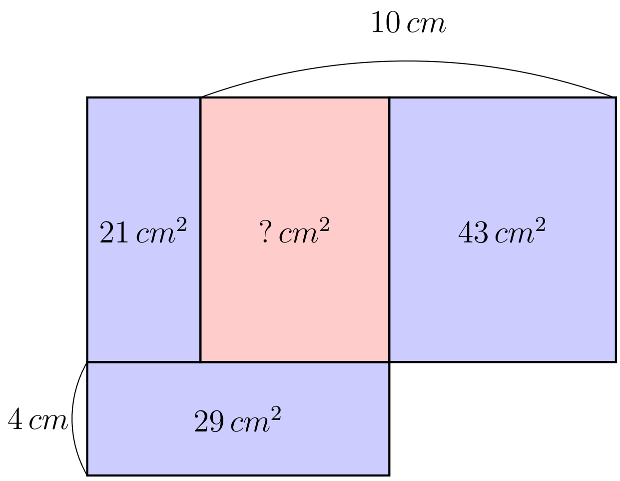
Las áreas azules son iguales por el Teorema de la mariposa (Teorema 8), $A_{AOE} = A_{COD}$. Por el Teorema de la cometa (Teorema 7) podemos hallar el área A_{AOD}:

$$A_{AOD} \cdot 4 = 6^2$$

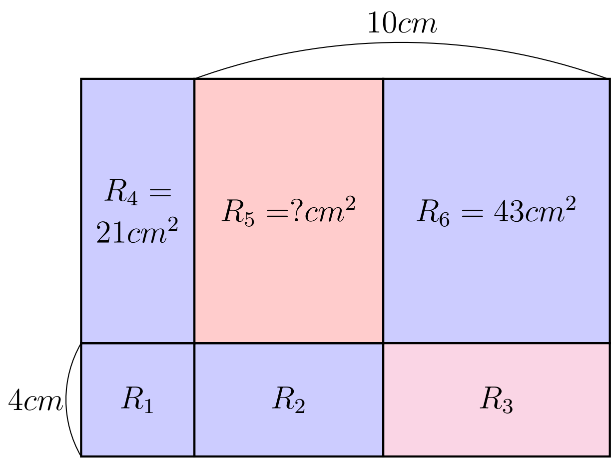
Ahora tenemos $A_{AOD} = 9, A_{ACD} = 9 + 6 = 15$. Como la diagonal AC divide el paralelogramo en dos triángulos iguales, podemos hallar el área amarilla $A_{ABE} = 15 - 4 - 6 = 5$, por lo que el área del cuadrilátero $A_{ABEO} = 5 + 6 = 11$.

□

Problema 31. Busca el área del rectángulo medio de arriba (en rojo):



Solución. Completemos, como siempre, el rectángulo invisible derecho de abajo y partamos el izquierdo de abajo en dos:



Ahora sabemos que

$$R_1 + R_2 = 29, R_2 + R_3 = 4 \times 10 = 40, R_6 - R_4 = 22$$

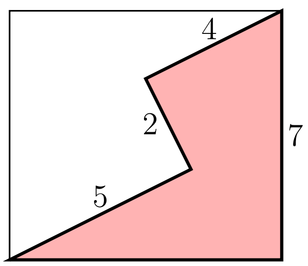
Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos que $R_3 - R_1 = 11$. De esta ecuación y de $R_6 - R_4 = 22$, obtenemos que la altura de los rectángulos de arriba es 8, el doble que la altura de los de abajo. Encontrar R_5 ahora es sencillo:

$$R_5 + R_6 = 10 \times 8cm^2 \Rightarrow R_5 = 37cm^2$$

También se puede resolver llamando x el área R_1 y haciendo regla de tres para los espacios 1,3,4,6.

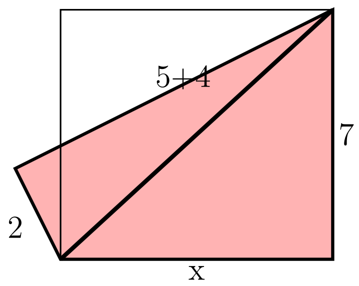
$\square$

Problema 32. Busca el área coloreada. Los ángulos entre los segmentos que miden $5, 2, 4$ son rectos.



Solución. **Pistas:** Junta los segmentos que miden 5 y 4. Gira la figura

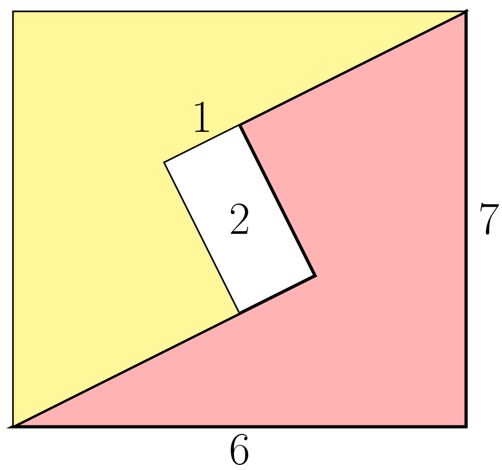
Para empezar, calcularemos el largo del rectángulo grande:



Vemos que la diagonal del rectángulo al cuadrado es igual a

$$d^2 = x^2 + 7^2 = 2^2 + (5+4)^2$$

De ahí que $x = 6$, y el área del rectángulo es $6 \cdot 7 = 42$. Ahora giremos la figura 180° respecto al centro del rectángulo:



Se ve claramente que se ha formado un rectángulo blanco de área 2 en el medio. Por tanto, el área coloreada es $(42-2) : 2 = 20$

$\square$

Problemas para hacer en casa

22 de noviembre

Problema 33. Busca el área de todas las habitaciones de este piso:

$21m^2$		$35m^2$
$30m^2$		
	$8m^2$	$10m^2$

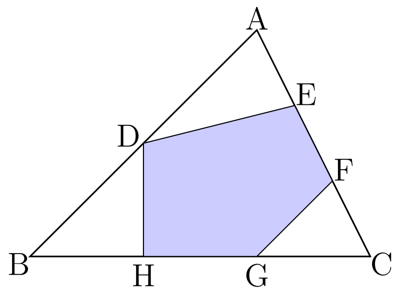
Solución. Consideramos el rectángulo formado por las dos últimas columnas y la primera y última fila. Aplicando el Teorema 4, obtenemos que la habitación de en medio en la fila de arriba tiene un área de $\frac{8 \cdot 35}{10} = 28m^2$. Ahora, consideramos el rectángulo formado por las dos primeras columnas y las dos primeras filas, y aplicando el Teorema 4, obtenemos que la habitación de en medio en la fila de en medio tiene un área de $\frac{30 \cdot 28}{21} = 40m^2$. Aplicando el Teorema 4 a los rectángulos formados por las dos últimas filas, la columna del medio y una de las otras dos columnas, obtenemos el área de las dos habitaciones que faltan.

$21m^2$	$28m^2$	$35m^2$
$30m^2$	$40m^2$	$50m^2$
$6m^2$	$8m^2$	$10m^2$

□

29 de noviembre

Problema 34. El área del triángulo grande es 90. Además, $|AD| = |DB|$, $|AE| = |EF| = |FC|$ y $|BH| = |HG| = |GC|$. Busca el área sombreada.



Solución. Trazamos líneas perpendiculares al lado BC desde A y F, que cortan lado BC en los puntos A' y F'. Los triángulos rectos $AA'C$ y $FF'C$ son semejantes por tener sus tres ángulos iguales, y por tanto

$$\frac{|AA'|}{|FF'|} = \frac{|AC|}{|FC|} = 3.$$

Usando esto, vemos que

$$90 = A_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AA'|}{2} = \frac{3|GC| \cdot 3|FF'|}{2} = 9 \cdot A_{GFC},$$

por lo que $A_{GFC} = 10$.

Los triángulos ADE, EDF y FDC tienen base de la misma longitud $|AE| = |EF| = |FC|$, y la misma altura, por lo que tienen la misma área. Así,

$$A_{EDF} = A_{ADE} = A_{FDC}.$$

Los triángulos BHD, HGD y GCD tienen base de la misma longitud $|BH| = |HG| = |GC|$, y la misma altura, por lo que tienen la misma área. Así,

$$A_{BHD} = A_{HGD} = A_{GCD}.$$

El área total es

$$90 = A_{BHD} + A_{HGD} + A_{GCD} + A_{EDF} + A_{ADE} + A_{FDC} = 3 \cdot (A_{HGD} + A_{EDF}),$$

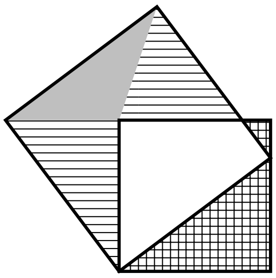
por lo que $A_{HGD} + A_{EDF} = 30$. Por otra parte, el área sombreada es

$$A_{HGD} + A_{EDF} + A_{DGF} = A_{HGD} + A_{EDF} + (A_{GCD} + A_{FDC} - A_{GFC}) = 2 \cdot (A_{HGD} + A_{EDF}) - 10 = 50.$$

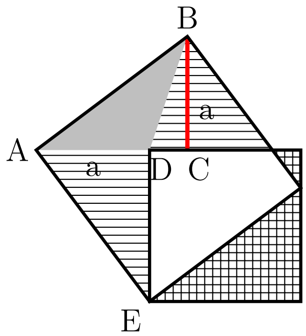
□

13 de diciembre

Problema 35. En la figura se muestran dos cuadrados. El área del triángulo sombreado (arriba a la izquierda) es igual a 5. Además, triángulo a rayas debajo del triángulo sombreado es recto. ¿Cuál es la diferencia entre el área a rayas y el área a cuadros?



Solución. En el triángulo recto a rayas ADE se cumple el Pitágoras, $|AD|^2 + |DE|^2 = |AE|^2$. Ahora si trazamos la altura del triángulo sombreado ABD por el vértice B y llamamos a a su longitud, a será igual a $|AD|$ porque los triángulos ABC y ADE son iguales (ambos son triángulos rectángulos, sus hipotenusas miden lo mismo, y también uno de sus catetos mide lo mismo):



De esta manera, el área del triángulo sombreado ADB es igual a $a^2/2 = 5$. Ahora, la diferencia entre las áreas a rayas+sombreada y la que está a cuadros es la misma que la de las áreas de los cuadrados, $|AE|^2 - |DE|^2 = |AD|^2 = a^2 = 10$. Volviendo a restar el área del triángulo sombreado ABD, llegamos a la respuesta: 5.

□