Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22 y 29 de noviembre, 13 de diciembre de 2024
Geometría: Áreas
Grupo: Marte y Neptuno

Demostrando teoremas conocidos

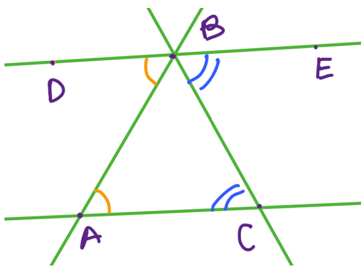
Empezamos recordando algunos teoremas importantes que has visto en clase y seguramente hayas usado muchas veces, pero que quizás aún no sabes por qué son verdad.

Teorema 1 (Suma de los ángulos de un triángulo)**.** *Los tres ángulos de cualquier triángulo suman* 180°.

Demostramos este teorema en el siguiente ejemplo resuelto. Asegúrate de entender su demostración.

Ejemplo resuelto. Demuestra el teorema anterior.

Solución. Sea ABC un triángulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.

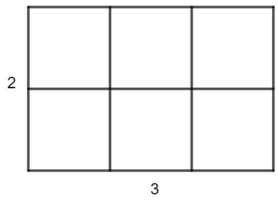


Como las rectas AC y DE son paralelas, tenemos que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°,$$

donde la última igualdad es cierta porque D, B y E están alineados. □

Ahora, vamos a hablar de **áreas**. El área más fácil de calcular es el de un rectángulo de lados enteros. Por ejemplo, si tenemos un rectángulo cuyos lados miden 2 cm y 3 cm respectivamente, su área será $2 \cdot 3 = 6$ cm^2, ya que podemos dividirlo en 6 cuadraditos de 1 cm^2 de esta manera.



Argumentando de la misma manera, podemos ver que si los lados de un rectángulo miden n y m, donde n y m son números enteros positivos, entonces su área es $n \cdot m$. Esta fórmula es cierta para todos los rectángulos, aunque sus lados no sean números enteros, es decir:

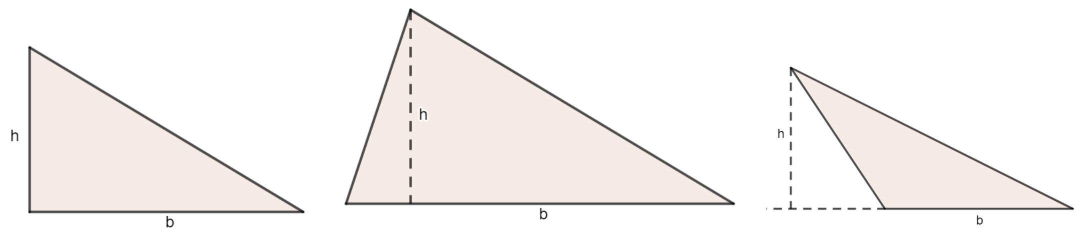
$$\boxed{\text{El área de un rectángulo de lados } a \text{ y } b \text{ es } a \cdot b.}$$

Esta fórmula la conoces de verla en clase. Nosotros vamos a usarla para demostrar otras fórmulas que ya conoces.

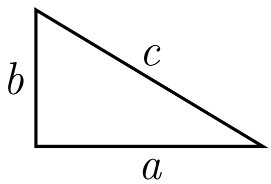
Teorema 2. *El área de un triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$, donde b es la longitud de uno de sus lados (base) y h es la longitud de la altura que sale del vértice opuesto.*

Problema 1. Demuestra el teorema anterior a partir de la fórmula del área de un rectángulo. Para ello, tendrás que considerar dos casos distintos.

- La altura es uno de los lados del triángulo (en particular, el triángulo es rectángulo).
- La altura está dentro del triángulo.
- La altura está fuera del triángulo.



Teorema 3 (Teorema de Pitágoras)**.** *En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden a y b, y cuya hipotenusa mide c.*



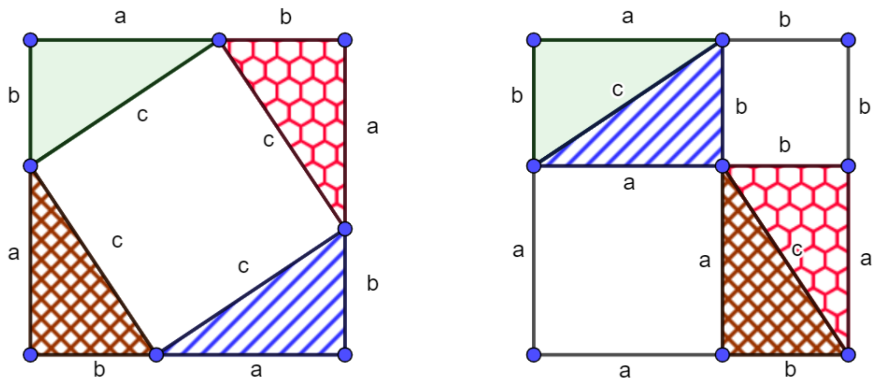
Las longitudes de los catetos y la hipotenusa se relacionan de esta manera:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Demostramos el Teorema de Pitágoras[1] en el siguiente ejercicio.

[1] Este teorema ya era conocido en la India y en Egipto aproximadamente 1000 años antes de que naciera Pitágoras

Problema 2. Consideramos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, y cuya hipotenusa mide c como el de la figura anterior. En las siguientes figuras se muestra un cuadrado de lado $a+b$, pero dividido de distintas maneras:



Responde a las siguientes preguntas:

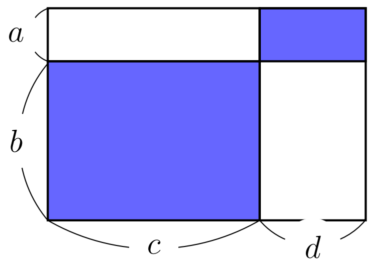
a) ¿Por qué la figura blanca dentro del primer cuadrado de lado $a+b$ es un cuadrado?

b) Demuestra que las áreas de la parte blanca de los dos cuadrados miden lo mismo. Deduce que el Teorema de Pitágoras es cierto.

La regla de tres

Vamos a ver un teorema sencillo pero muy útil.

Teorema 4. *El producto de las áreas azules es igual al producto de las blancas.*



Problema 3. Demuestra el teorema anterior.

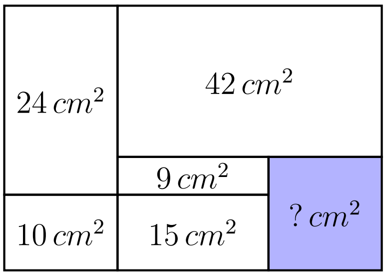
El teorema anterior nos permite aplicar la regla de tres: sabiendo 3 de las 4 áreas siempre podremos calcular la cuarta.

Problema 4. Halla el área de la habitación más pequeña de este piso:

$12\,m^2$	$?\,m^2$
$27\,m^2$	$18\,m^2$

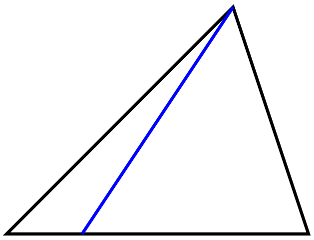
En algunos problemas para poder aplicar la regla de 3 tendrás que partir un área en dos.

Problema 5. Halla el área de la habitación azul (abajo a la derecha):



Partiendo áreas

Definición. Una **ceviana** en un triángulo es un segmento que une un vértice con el lado opuesto o su continuación.

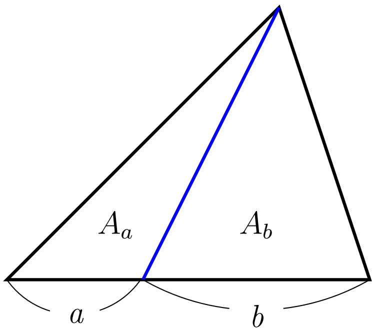


La mediana[2], la bisectiz y la altura son casos particulares de cevianas.

Cada ceviana interior divide el triángulo en dos más pequeños que comparten altura. De ahí podemos sacar un sencillo teorema que nos resultará muy útil:

Teorema 5. *La ceviana interior divide el triángulo en dos cuyas áreas A_a y A_b son proporcionales a sus bases a y b:*

$$\frac{A_a}{A_b} = \frac{a}{b}$$



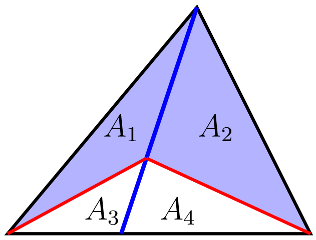
Problema 6. Demuestra el teorema anterior.

Otro resultado interesante surge si unimos cualquier punto de la ceviana con otros dos vértices del triángulo:

[2]segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto

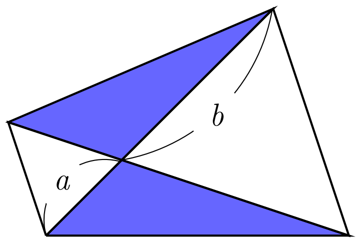
Teorema 6 (del avioncito de papel)**.** *Las áreas de arriba son proporcionales a las áreas de abajo:*

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}$$



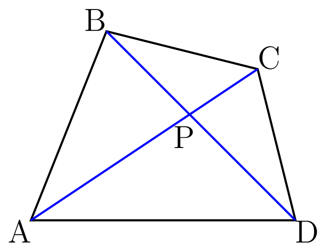
Existe un resultado similar y muy útil aplicable a cualquier cuadrilátero:

Teorema 7 (de la cometa)**.** *En el cuadrilátero se trazan las diagonales. El producto de las áreas azules es igual al producto de las blancas.*



Problema 7. Demuestra los teoremas del avioncito de papel (Teorema 6) y de la cometa (Teorema 7) a partir del Teorema 5.

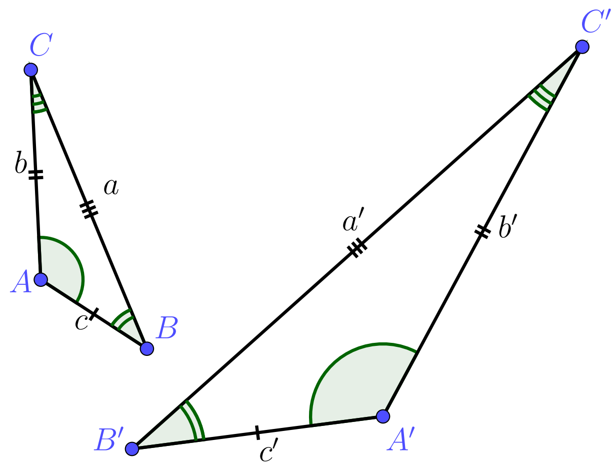
Problema 8. Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto P.



Se conocen las áreas de tres triángulos: $A_{ABP} = 12, A_{BCP} = 9, A_{CDP} = 8$. Busca el área del $\triangle ADP$.

Áreas usando semejanza

Definición. Decimos que dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, dos triángulos son semejantes si existe una forma de etiquetar sus vértices como ABC y $A'B'C'$ de manera que $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$, como se muestra en el siguiente dibujo:



El motivo por el que la semejanza de triángulos nos va a ser útil a la hora de calcular áreas es porque nos da una relación entre las longitudes de los lados correspondientes de triángulos semejantes, como mostramos en el siguiente recuadro:

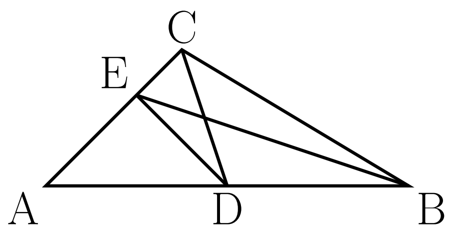
Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, entonces

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Por ejemplo, si en el dibujo anterior, $a' = |B'C'|$ es el doble de grande que $a = |BC|$, eso significará que $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{1}{2}$. Por tanto, el recuadro anterior nos dice que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{1}{2}$ (es decir, que c' es el doble de grande que c) y que $\frac{|CA|}{|C'A'|} = \frac{1}{2}$ (es decir, que b' es el doble de grande que b).

Usando el recuadro anterior (y tu imaginación para saber cómo aplicarlo), resuelve el siguiente problema.

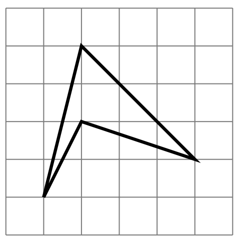
Problema 9. En el lado AC del triángulo ABC se elige el punto E tal que $\frac{|AE|}{|EC|} = 2$. Se sabe que el área del triángulo CBD es $A_{CBD} = 12$. Halla el área A_{EBD} del triángulo EBD.



Pista: traza perpendiculares al lado AB desde E y C, y compara los dos triángulos rectángulos que te quedan dibujados.

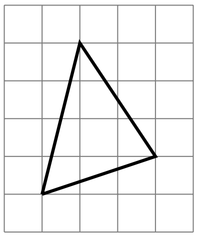
Problemas

Problema 10. Busca el área de esta figura:



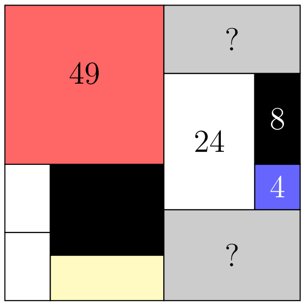
donde cada lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm.

Problema 11. Halla el área del siguiente triángulo,



donde cada lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm.

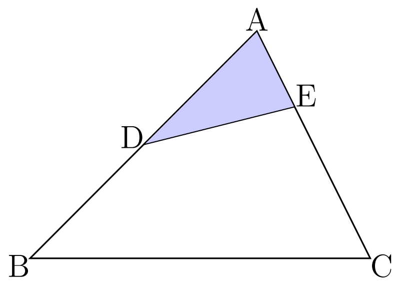
Problema 12. Martín Ondrián ha dibujado un cuadro abstracto hecho de rectángulos en un lienzo cuadrado:



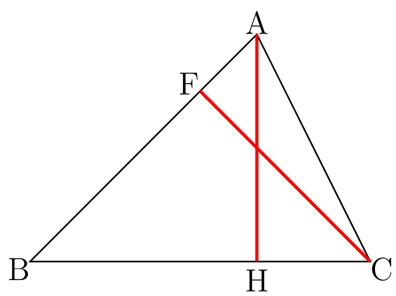
Los números que aparecen son las áreas de los rectángulos en las que se encuentran. Sabiendo que el rectángulo rojo (el de área 49) y el azul (el de área 4) son cuadrados, busca la suma de las áreas grises.

Problema 13. Demuestra que el área de un paralelogramo de altura a y base b es ab

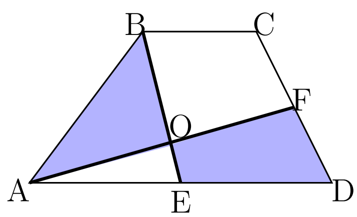
Problema 14. El área del triángulo grande es 90. $|AD| = |DB|$, $2|AE| = |EC|$ Busca el área sombreada.



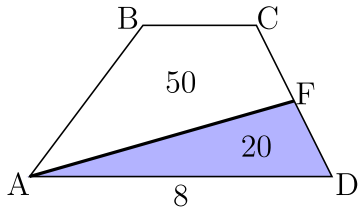
Problema 15. AH, CF son alturas del triángulo ABC. $|AH| = 9, |CF| = 8, |BC| = 24$. Halla $|AB|$.



Problema 16. En el trapecio $ABCD$, $|AE| = |ED|$, $|CF| = |FD|$. Demuestra que $A_{ABO} = A_{OFDE}$.

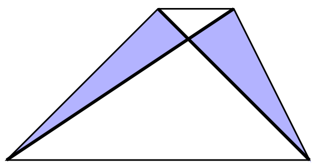


Problema 17. En el trapecio $ABCD$, $|CF| = |FD|$ y lado $|AD| = 8$. Además, $A_{AFD} = 20$ y $A_{ABCF} = 50$ ¿Cuánto mide el lado BC?

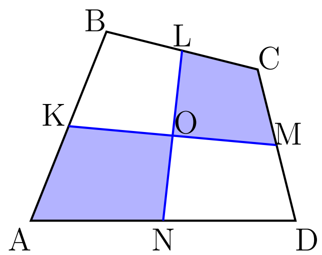


Problema 18. Demuestra el siguiente resultado:

Teorema 8 (de la mariposa)**.** *En un trapecio se trazan las diagonales. Los triángulos laterales que se forman (sombreados en el dibujo) tienen la misma área.*



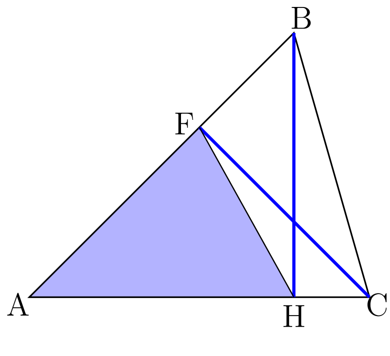
Problema 19. Sean K, L, M, N centros de los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero convexo $ABCD$; y sea O el punto de intersección de KM y LN.



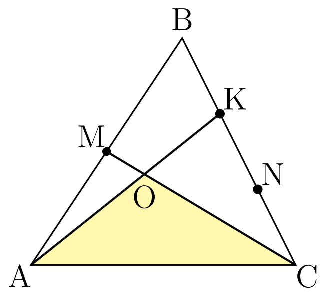
Demuestra que la suma de áreas sombreadas es igual a la de las blancas:

$$A_{AKON} + A_{CLOM} = A_{BKOL} + A_{DNOM}$$

Problema 20. En el triángulo ABC se han trazado las alturas BH, CF. El área del triángulo AFH es 18. Sabemos que $|AF| = 8$ y que $|FC| = 6$. Halla el área del triángulo ABC.

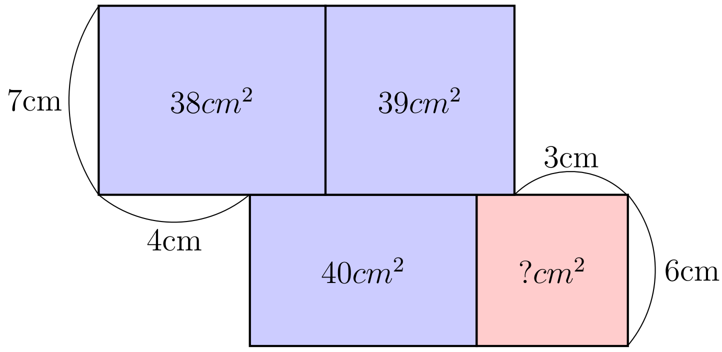


Problema 21. En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado AB y los puntos K, N dividen el lado BC en 3 partes iguales. La mediana CM corta la ceviana AK en el punto O. Sabiendo que $A_{\triangle ABC} = 40$ busca el área sombreada $A_{\triangle AOC}$.



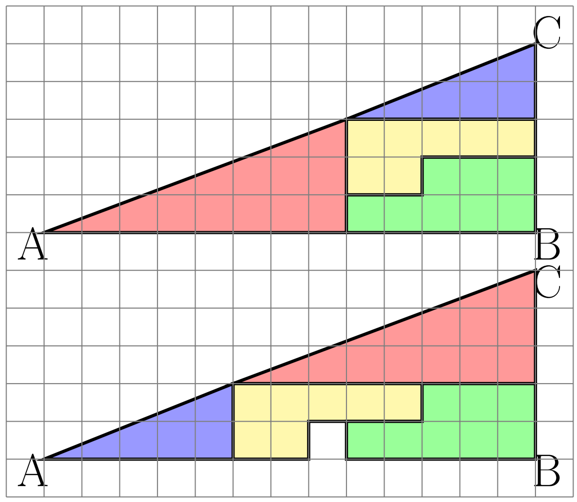
Pista: Dibuja el segmento BO y usa los Teoremas 5 y 6 para establecer relaciones entre los distintos triángulos que aparecen dentro del triángulo inicial.

Problema 22. Busca el área del cuarto de baño rosa (derecha abajo):



Problema 23. En un hexágono regular se marcan los puntos medios de los lados. ¿Qué parte del área total está sombreada?

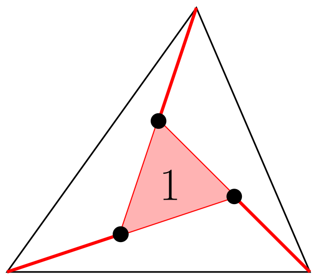
Problema 24. Hemos formado un triángulo con 4 trozos de 4 colores distintos. Luego hemos recompuesto el mismo triángulo usando las mismas piezas, pero ahora ¡nos ha faltado un cuadradito! ¿Dónde y cómo se ha escondido?



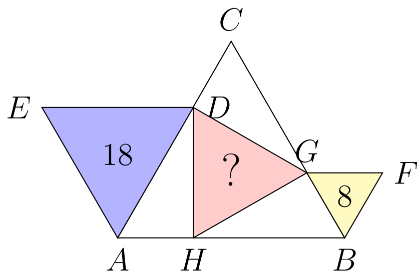
Problema 25. Demuestra que las tres medianas[3] de cualquier triángulo se cortan en el mismo punto.

Problema 26. Dibuja en la cuadrícula cuadrados con vértices en los nodos de la cuadrícula de área $2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 20$. En realidad, te estoy engañando un poco. Hay dos que no podrás construir. ¿Cuáles son?

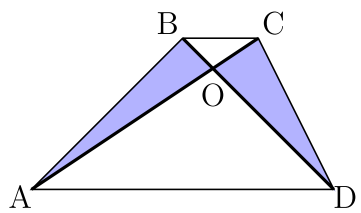
Problema 27. Los puntos negros dividen los segmentos interiores rojos en 2 partes iguales. El área del triángulo interior es 1. ¿Cuál es el área del triángulo grande?



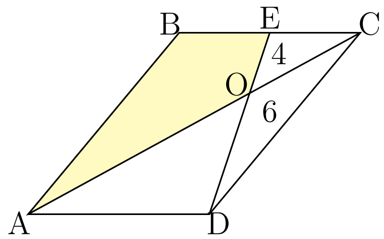
Problema 28. Los triángulos ABC, ADE, BGF, DGH son equilateros. $A_{ADE} = 18, A_{BGF} = 8$. Busca A_{DGH}.



Problema 29. En el trapecio $ABCD$ el punto O es la intersección de las diagonales. $A_{\triangle BOC} = 1, A_{\triangle AOD} = 9$. Busca el área del trapecio.

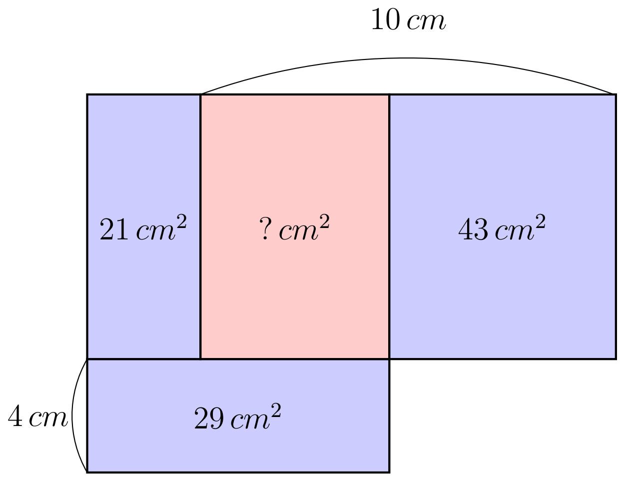


Problema 30. En el paralelogramo $ABCD$ se traza la diagonal AC y el segmento DE tal que el área $A_{DOC} = 6, A_{EOC} = 4$. Busca el área sombreada del cuadrilátero $ABEO$.

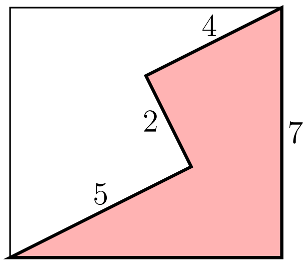


Problema 31. Busca el área del rectángulo medio de arriba (en rojo):

[3] segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto



Problema 32. Busca el área coloreada. Los ángulos entre los segmentos que miden $5, 2, 4$ son rectos.



Problemas para hacer en casa

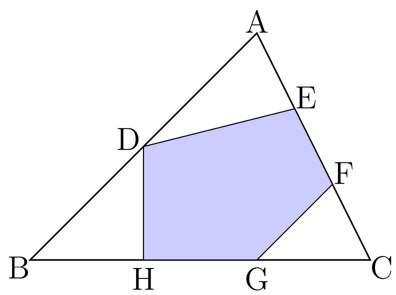
22 de noviembre

Problema 33. Busca el área de todas las habitaciones de este piso:

$21m^2$		$35m^2$
$30m^2$		
	$8m^2$	$10m^2$

29 de noviembre

Problema 34. El área del triángulo grande es 90. Además, $|AD| = |DB|$, $|AE| = |EF| = |FC|$ y $|BH| = |HG| = |GC|$. Busca el área sombreada.



13 de diciembre

Problema 35. En la figura se muestran dos cuadrados. El área del triángulo sombreado (arriba a la izquierda) es igual a 5. Además, triángulo a rayas debajo del triángulo sombreado es recto. ¿Cuál es la diferencia entre el área a rayas y el área a cuadros?