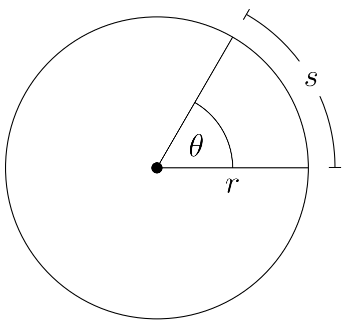
Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22, 29 de noviembre y 13 de diciembre de 2024
Ángulos en la circunferencia
Grupo: Venus (Soluciones)

Ángulos en la circunferencia

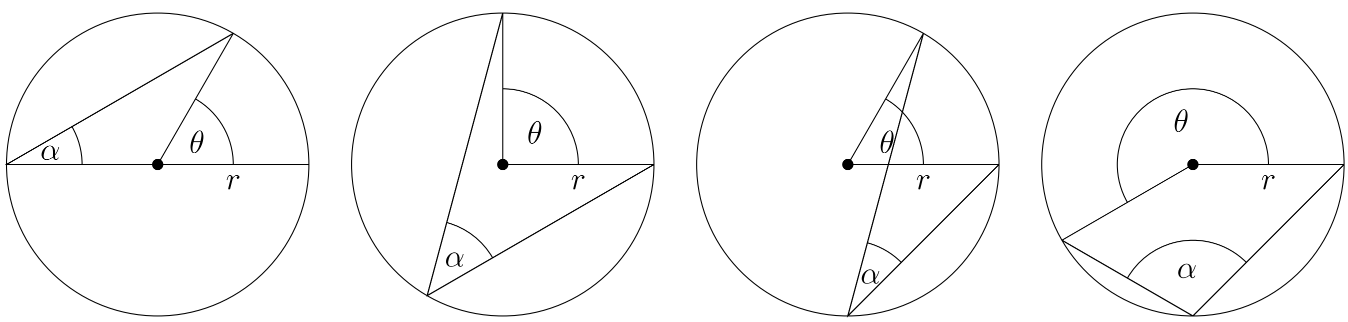
Vamos a distinguir entre ángulos **centrales**, **inscritos** y **semiinscritos**.

- Los ángulos **centrales** tienen el vértice en el centro de la circunferencia:

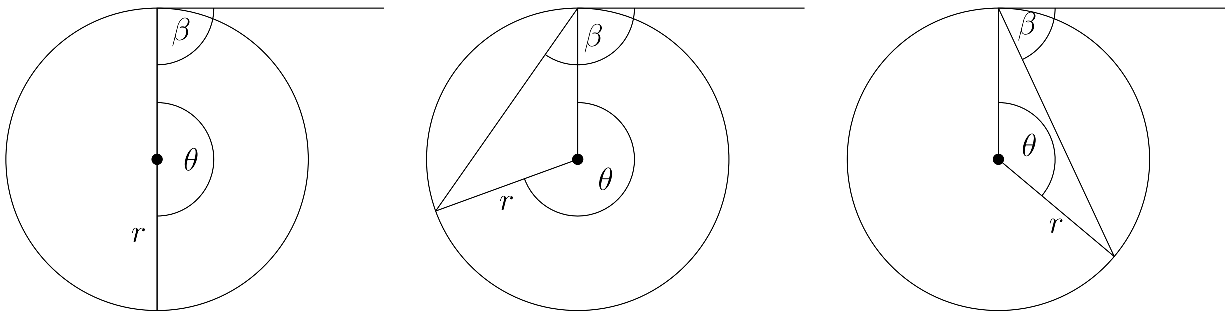


El valor del ángulo central θ es proporcional a la longitud del arco s: Si $\theta = 90°$, entonces $s = \frac{\pi r}{2}$ (donde r es la longitud del radio), si $\theta = 180°$, entonces $s = \pi r$... En general, $s = \frac{\theta \pi r}{180}$, donde θ está medido en grados, y r y s están medido en las mismas unidades de longitud (por ejemplo, en cm.).

- Los ángulos **inscritos** tienen el vértice en la circunferencia, y los lados cortan a la circunferencia. En el dibujo, hay cuatro circunferencias en las que hemos dibujado un ángulo inscrito α, y cada uno de estos ángulos inscritos tiene un ángulo central θ asociado a él que abarca el mismo arco de la circunferencia:

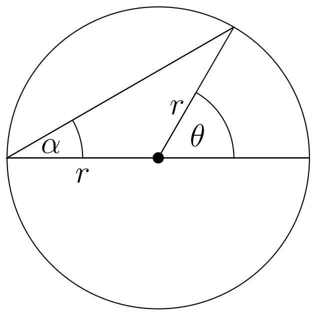


- Los ángulos **semiinscritos** tienen el vértice en la circunferencia, uno de sus lados corta a la circunferencia y otro de sus lados es tangente a la circunferencia. En el dibujo, hay tres circunferencias en las que hemos dibujado un ángulo semiinscrito β, y cada uno de estos ángulos semiinscritos tiene un ángulo central θ asociado a él que abarca el mismo arco de la circunferencia:

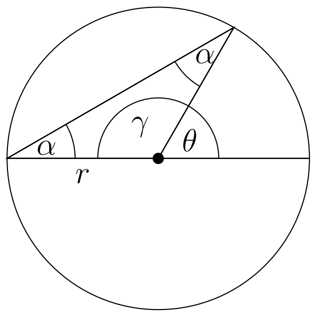


Ejemplo resuelto. Sea α un ángulo inscrito tal que uno de sus lados es un diámetro, y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Demostrar que $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

Solución. Estamos en la situación del siguiente dibujo:



El triángulo que vemos es isósceles, y por tanto tiene dos ángulos iguales. Lo representamos en el siguiente dibujo, donde $\gamma = 180 - \theta$.



Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, tenemos que $\alpha + \alpha + (180 - \theta) = 180$, y obtenemos que $\alpha = \frac{\theta}{2}$. □

El ejercicio anterior es un caso particular del siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea α un ángulo inscrito y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\alpha = \frac{\theta}{2}$.*

Problema 1. Demuestra el Teorema 1. Para ello, considera cada una de las cuatro situaciones dibujadas anteriormente en la definición de ángulo inscrito, y usa el ejemplo anterior.

La misma relación se cumple para un ángulo semiinscrito y su correspondiente ángulo central:

Teorema 2. *Sea β un ángulo semiinscrito y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\beta = \frac{\theta}{2}$.*

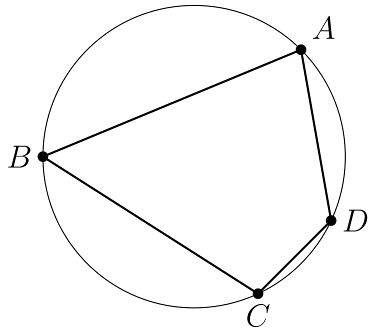
Problema 2. Demuestra el Teorema 2. Para ello, considera cada una de las tres situaciones dibujadas anteriormente en la definición de ángulo semiinscrito, y usa que cualquier recta tangente a una circunferencia en un punto P es perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por P.

Por último, vamos a ver el siguiente resultado sobre cuadriláteros. Lo demostrarás paso a paso en los problemas 3, 4 y 5.

Teorema 3. *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman* $180°$ *si y sólo si puede ser inscrito en una circunferencia.*

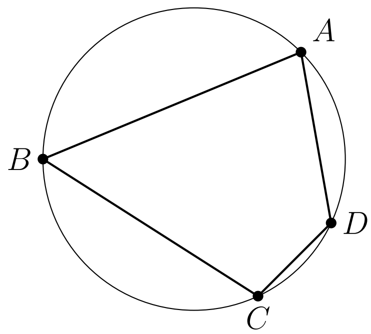
Problema 3. Hemos fijado dos puntos en la circunferencia y hemos dibujado dos ángulos inscritos con base en estos puntos. Resulta que no son iguales. ¿Cómo es posible? ¡Dibújalos!

Solución. Fijamos, por ejemplo, los puntos A y C. Podemos considerar ángulos que tengan como base arcos complementarios ($\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CA}$):



□

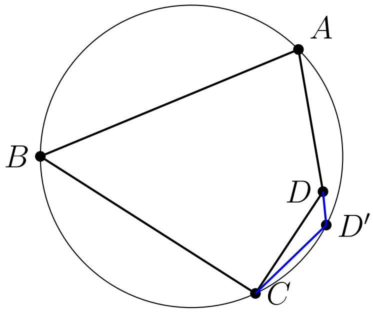
Problema 4. Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito suman $180°$.



Solución. Considera el cuadrilátero inscrito $ABCD$. Las bases de los ángulos $\angle ABC, \angle ADC$ son dos arcos de circunferencia complementarios, juntos suman $360°$. Entonces sus mitades suman $180°$. □

Problema 5. Demuestra que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman $180°$, hay una circunferencia que pasa por sus 4 vértices.

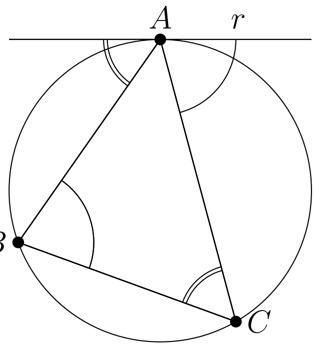
Solución. Ya sabemos que lo contrario es cierto: si el cuadrilátero es inscrito sus ángulos opuestos suman $180°$ (basta considerar los arcos en los que se apoyan los ángulos opuestos, suman $360°$). Supongamos que la circunferencia circunscrita sobre el triángulo ABC no pasa por el vértice D. Supongamos primero que el punto D queda dentro de la circunferencia. Llamemos D' el punto de intersección de la circunferencia y la continuación del segmento AD.



Vemos que el ángulo $\angle CD'A = 180° - \angle B = \angle ADC$, por lo que los segmentos CD y CD' deben ser paralelos, pero se cortan en el punto C. Contradicción. El caso de fuera se considera análogamente. $\square$

Problemas

Problema 6. Sea ABC un triángulo, y sea S la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. Llamamos r a la recta tangente a S por A. Demuestra que los ángulos marcados de la misma manera en el dibujo son iguales

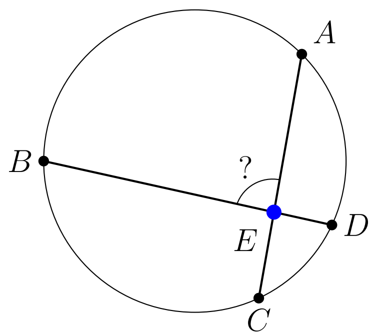


Solución. Los ángulos marcados de la misma manera son un ángulo inscrito y otro semiinscrito tales que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia. Por tanto, el valor de ambos es la mitad del ángulo central correspondiente, y en particular son iguales.

$\square$

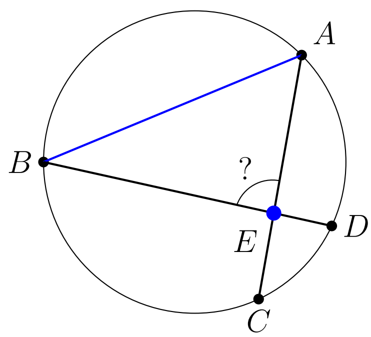
Problema 7.

Sabiendo cuánto miden los arcos $\overset{\frown}{AD} = 64°, \overset{\frown}{BC} = 146°$, halla el ángulo $\angle AEB$.



Solución.

Tracemos el segmento AB. Por ser inscritos, $\angle ABE = 64°/2 = 32°, \angle BAE = 146°/2 = 73°$, por lo que el ángulo que buscábamos mide $\angle AEB = 180° - (32° + 73°) = 75°$.



$\square$

Problema 8. En un estanque circular nada una carpa. Siempre hace los mismos tres movimientos: empieza en el borde, recorre 12 metros hasta tocar otro borde del estanque, gira en ángulo recto, recorre otros 5 m hasta tocar otro punto del borde y vuelve al punto inicial. ¿Cuál es el área del estanque?

Solución. El ángulo recto inscrito en una circunferencia tiene de base el diámetro de la circunferencia, de modo que este diámetro es igual a

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

Ahora podemos usar la fórmula del área de la circunferencia:

$$A = \pi \cdot (13/2)^2 = 42,25\pi$$

□

Problema 9. Sean a, b, c las longitudes de los tres lados de un triángulo T, y sea A su área. Sea r la longitud del in-radio de T, es decir, la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (cuyo centro es el punto de intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo). Demuestra que $A = \frac{r(a+b+c)}{2}$.

Solución. Las bisectrices de los tres ángulos de T dividen a T en tres triángulos, de bases a, b y c respectivamente y altura r en todos los casos. Por tanto,

$$A = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$

□

Problema 10. Los puntos A, B, C, D están colocados en este orden en una circunferencia. Llamemos K, L, M, N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$. Demuestra que las cuerdas MK, LN son perpendiculares.

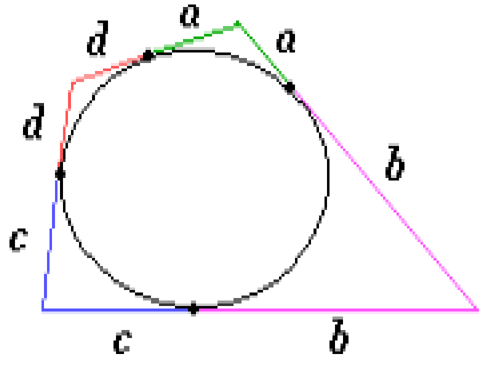
Solución. Llamemos O el punto de intersección de MK, LN. Sabemos que (véase un problema similar)

$$\angle KOL = \frac{\overset{\frown}{KL} + \overset{\frown}{MN}}{2} = \frac{\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}}{2}}{2} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

□

Problema 11. Demostrar que si en un cuadrilátero está inscrita una circunferencia (es decir, contiene una circunferencia tangente a los 4 lados), entonces la suma de sus lados opuestos es la misma.

Solución. Los segmentos de tangentes trazados desde un punto al círculo son iguales entre sí. Los puntos tangentes dividen cada lado del cuadrilátero en dos partes. Denotemos sus longitudes secuencialmente, usando una letra para segmentos iguales, comenzando desde cualquiera de los vértices: a, b, b, c, c, d, d, a. Está claro que las sumas de lados opuestos consisten en los mismos términos.



□

Problema 12. Demuestra que todo polígono de 9 lados tiene un par de diagonales con un ángulo menor de 7°.

Solución. Un polígono de 9 lados tiene $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ diagonales. Dibujemos 27 líneas rectas a través de un punto arbitrario, paralelas a estas diagonales. Dividirán el ángulo completo en 54 ángulos. Por lo tanto, uno de ellos no es mayor que $\frac{360°}{54} < 7°$.

□

Problema 13. En la circunferencia de radio 1 se marcan 100 puntos. Demuestra que existe un punto en esta circunferencia tal que la suma de las distancias a todos los puntos marcados sea igual o superior a 100.

Solución. **Pista:** Estudia dos puntos opuestos.

Llamemos los puntos marcados P_i y elijamos arbitrariamente un diámetro AB. Para cualquiera de los puntos se cumple la desigualdad triangular:

$$AP_i + P_iB \geqslant AB = 2$$

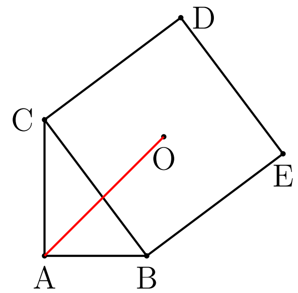
Ahora sumemos estas 100 desigualdades:

$$(AP_1 + AP_2 + ... + AP_{100}) + (BP_1 + BP_2 + ... + BP_{100}) \geqslant 200$$

Entonces al menos uno de los paréntesis debe ser igual o superior a 100. □

Problema 14.

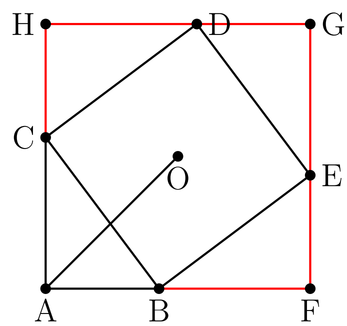
En la hipotenusa de un triángulo rectángulo $ABC, \angle A = 90°$ se construye el cuadrado $BCDE$. Sea O el centro de este cuadrado, halla $\angle BAO$.



Solución. **Solución 1**. En el cuadrilátero $ABOC$ los ángulos opuestos $\angle BAC + \angle BOC = 180°$, por eso es inscrito y los ángulos que se apoyan en el arco $\overset{\frown}{OB}$ son iguales, por lo que $\angle OAB = \angle OCB = 45°$.

Solución 2.

Dibujemos triángulos iguales al $\triangle ABC$ en todos los lados del cuadrado de modo que se forme un cuadrado grande. OA será la mitad de su diagonal.



□

Problema 15. Demostrar que el punto de intersección de los círculos construidos sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC como diámetros, diferente de A, está sobre la recta BC.

Solución. Sea AH la altura del triángulo. Entonces $\angle AHB = \angle AHC = 90$ grados. Por tanto, el punto H pertenece a ambas circunferencias, es decir, es su punto de intersección.

□

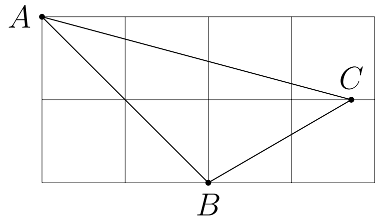
Problema 16. El triángulo ABC tiene un ángulo recto en A. Si AM es su mediana, demuestra que $|AM| = |BM| = |CM|$.

Solución. Como M es el punto medio de BC, hay una circunferencia que tiene centro en M y pasa por B y C. Entonces, el ángulo $\widehat{BAC}$ mide 90°, y por el recíproco del ángulo inscrito en una semicircunferencia, tiene que estar en la semicircunferencia.

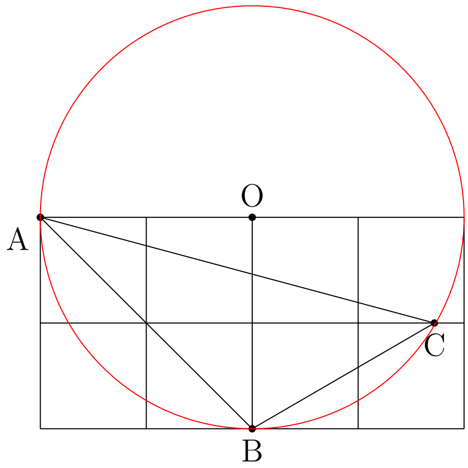
□

Problema 17.

En una cuadrícula han dibujado el siguiente triángulo:
Sabiendo que el ángulo $\angle ACB = 45°$ busca los otros ángulos del triángulo.



Solución.
Pista: Traza una circunferencia sobre el triángulo ABC.
Coloquemos el punto O como en el dibujo y tracemos una circunferencia de radio 2.
Como $OA = OB = 2$, ambos puntos están en la circunferencia. El ángulo $\angle AOB = 90° = 2 \cdot \angle ACB$, es decir, el ángulo central es el doble del ángulo $\angle ACB$, por eso es inscrito y el punto C está en la circunferencia. Esto significa que $OB = OC$. Por otro lado, C está en la mediatriz del segmento OB y $OC = BC$. Entonces $\triangle OBC$ es equilátero, y $\angle B = 45° + 60° = 105°$, $\angle A = 30°$.

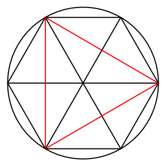


□

Problema 18.

(a) Demuestra que el cuadrado de lado $\sqrt{2}$ está inscrito en una circunferencia de radio 1.

(b) Demuestra que un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ está inscrito en una circunferencia de radio 1. Ayúdate del siguiente dibujo, donde todos los triángulos equiláteros pequeños que aparecen tienen lado 1.



(c) Determina el número de polígonos (no necesariamente regulares) inscritos en un círculo de radio 1 tales que cada uno de sus lados tiene como longitud la raíz cuadrada de un número entero. Los polígonos que son rotaciones o imagen espejo de otro se consideran el mismo polígono.

Pista: Si un polígono está inscrito en un círculo de radio 1, ¿cuál es la longitud máxima que puede tener uno de sus lados? ¿Cuántos valores que son raíces cuadradas de números enteros son menores e iguales que la respuesta a la pregunta anterior?

Solución. (a) Usar teorema de Pitágoras. También en el (b).

(c) Empezamos respondiendo a las preguntas de la pista. La respuesta a la primera es 2 (el diámetro del círculo), y la respuesta a la segunda es 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y 2.

Tenemos que ver a qué ángulos centrales corresponden estas longitudes. 1 corresponde a 60°, $\sqrt{3}$ corresponde a 120° (se ven ambos en el dibujo de la parte (b)), $\sqrt{2}$ corresponde a 90° (esto es consecuencia de la parte (a)), y 2 corresponde a 180°.

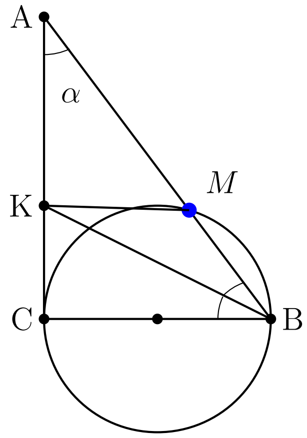
Ahora, enumeramos todos los polígonos posibles según el número de lados, y teniendo en cuenta que la suma de ángulos centrales correspondientes a sus lados tiene que ser 360°. Enumeramos las longitudes de los lados cuando los recorremos en sentido antihorario.

- Triángulos: Podemos construir triángulos de lados $(1, \sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. Hay 3 en total.
- Cuadriláteros: $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3}, , 1, \sqrt{3})$, $(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \surd$ Hay 6 en total.
- Pentágonos: $(1, 1, 1, 1, \sqrt{3})$, $(1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, y $(1, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$. Hay 3 en total.
- Hexágonos: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Hay 1 en total.

En total, hay 13 polígonos.

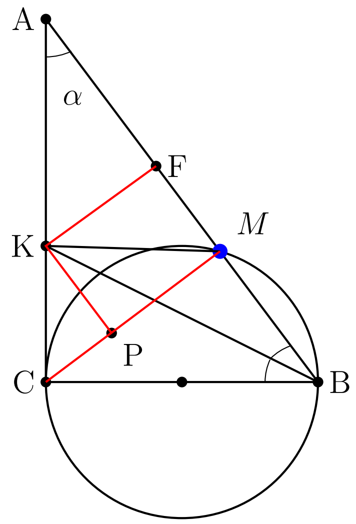
$\square$

Problema 19.



En el triángulo $\triangle ABC$ sabemos que $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$. La bisectriz del ángulo B corta AC en el punto K. BC es el diámetro de la circunferencia que corta la hipotenusa AB en el punto M. Busca $\angle AMK$.

Solución.

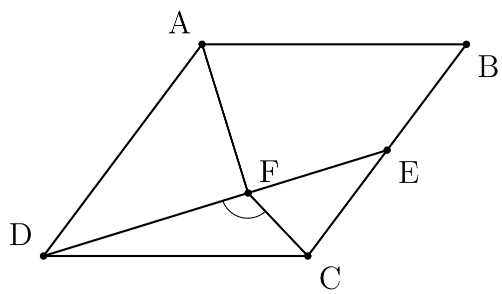


Pista: Sean F, P las proyecciones del punto K sobre AB, CM. Demuestra y usa el hecho de que $KF = KC, KP = FM$.
Sean F, P las proyecciones del punto K sobre AB, CM. Como el ángulo $\angle CMB$ es inscrito sobre el diámetro, es recto. Ahora $KFMP$ es un rectángulo y $KP = FM$. $\triangle KFB = \triangle KCB$ ya que comparten la hipotenusa y los ángulos $\angle CBK = \angle FBK$, de ahí que $KF = KC$. Busquemos tangente del ángulo $\angle AMK$:

$$\tan \angle AMK = \frac{KF}{FM} = \frac{KC}{KP} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$\square$

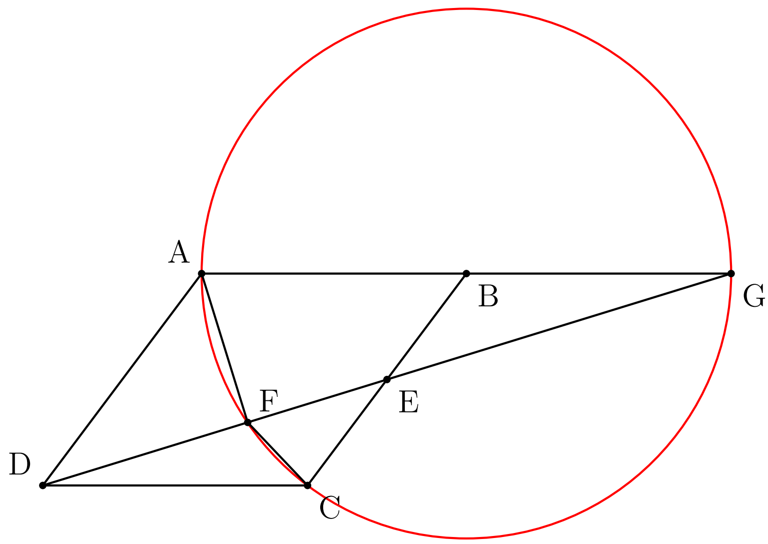
Problema 20.



En el rombo $ABCD$ han marcado E, el punto medio del lado BC. AF es perpendicular al segmento DE. Busca el ángulo $\angle DFC$ sabiendo que $\angle B = 40°$.

Solución.

Sea G el punto de intersección de las rectas AB, DE. $\triangle BEG = \triangle CED$ ya que $BE = EC, \angle BEC = \angle CED, \angle BGE = \angle CDE$. Ahora es fácil ver que los puntos B, G, C están en la misma circunferencia con el centro en B, además, el punto F también porque el ángulo $AFC = 90°$ y se apoya en el diámetro. Entonces el ángulo inscrito $\angle GFC = \angle GBC : 2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$, por lo que el ángulo que buscábamos mide $110°$.



□

Problema 21. Tienes 9 puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos puntos consecutivos es constante, es decir, los puntos están en los vértices de un eneágono regular. Quieres dibujar una estrella de 9 puntas conectando estos puntos por segmentos rectos sin levantar el lápiz del papel, saltándote el mismo número de puntos cada vez. Por ejemplo, si numeramos los vértices del 1 al 9 en el sentido de las agujas del reloj y decidimos saltar 1 vértice cada vez, el 1 estará unido con el 3 (saltándonos el 2), el 3 con el 5, etc. ¿Cuántas estrellas diferentes puedes dibujar de esta manera, si el eneágono regular no cuenta como estrella?

Solución. Si nuestro proceso de saltarnos k vértices da lugar a una estrella de 9 puntas, da igual en qué vértice empecemos. Saltarnos k vértices en el sentido de las agujas del reloj equivale a saltarnos $7-k$ vértices en el sentido contrario a las agujas del reloj. Si saltar k vértices en el sentido de las agujas del reloj nos da lugar a una estrella, esta es la misma que obtenemos al saltar k vértices en el sentido contratio a las agujas del reloj. Por tanto, podemos asumir que recorremos los vértices en el sentido de las agujas del reloj, empezando por el vértice 1, y que saltamos k vértices, con $k = 0, 1, 2, 3$.

- Saltarse 0 vértices nos da el eneágono regular, que no cuenta como estrella.
- Saltarse 1 vértice da $1-3-5-7-9-2-4-6-8-1$.
- Saltarse 2 vértices da $1-4-7-1$, que no es una estrella de 9 puntas.
- Saltarse 3 vértices da $1-5-9-4-8-3-7-2-6-1$.

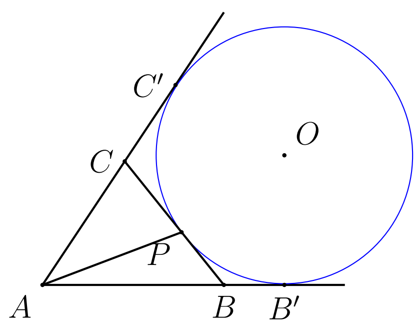
Por tanto, hay dos estrellas distintas.

□

Problema 22. En el triángulo $\triangle ABC$ traza el segmento AM que lo divide en dos triángulos de igual perímetro.

Solución.

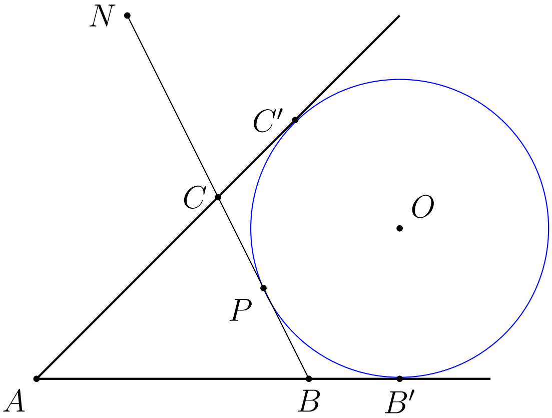
Pista: Considera una circunferencia exinscrita como en el dibujo.
Claramente, $PC = CC', PB = BB'$, además, dos tangentes trazadas del mismo punto son iguales, por lo que $AB' = AC'$. Ahora $P_{ACP} = AC + CP + AP = AC' + AP = AB' + AP = P_{ABP}$



□

Problema 23. Dadas dos rectas que se cortan en el punto A, y un punto N que no está en ninguna de ellas, traza una recta que pase por N y corte a las otras dos formando un triángulo de perímetro p

Solución.



Primero marquemos en los lados del ángulo los puntos B', C' tal que $AB' = AC' = p/2$. Luego tracemos una circunferencia tangente al ángulo en estos puntos (su centro está en la intersección de los perpendiculares a los lados desde los puntos B', C'). Por último, tracemos una tangente desde el punto N a la circunferencia que corte los segmentos AB', AC' en los puntos B, C respectivamente.

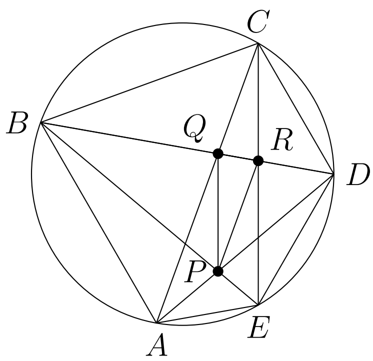
Sea P el punto tangente de la recta BC a la circunferencia. Notemos ahora que $CC' = CP$, $BB' = BP$ por ser tangentes a la circunferencia desde el mismo punto. De esta manera el perímetro del triángulo ABC es

$$AC + (CP + PB) + BA = AC + CC' + AB + BB' = AC' + AB' = p$$

Es importante ver que si el punto N se encuentra en el interior del triángulo curvilíneo formado por $AC', AB', \overset{\frown}{B'C'}$ el problema tiene dos soluciones ya que hay dos tangentes posibles. En cambio, si está fuera de este triángulo pero dentro del ángulo, no tiene solución.

$\square$

Problema 24. Sea $ABCDE$ un pentágono cuyos vértices están en una circunferencia. Además, sabemos que $|AB| = |BC|$ y que $|CD| = |DE|$. Llamamos P al punto de intersección de las diagonales AD y BE, Q al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y R al punto de intersección de las diagonales BD y CE.



a) Demuestra que $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

b) Usa la parte anterior para demostrar que el cuadrilátero $ABQP$ es cíclico, es decir, que existe una circunferencia que contiene a sus cuatro vértices.

c) Demuestra que el cuadrilátero $EDRP$ también es cíclico.

d) Usa las partes b) y c) para demostrar que el triángulo PQR es isósceles.

Solución. a) Mirando el triángulos AEP, y teniendo en cuenta que $\widehat{APB} + \widehat{EPA} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{APB} = \widehat{DAE} + \widehat{AEB}.$$

Mirando el triángulos BQC, y teniendo en cuenta que $\widehat{AQB} + \widehat{CQB} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{AQB} = \widehat{CBD} + \widehat{ACB}.$$

Los ángulos interiores $\widehat{CBD}$ y $\widehat{DAE}$ son iguales, ya que ambos abarcan un arco de circunferencia de igual longitud (ED y DC respectivamente). Similarmente, los ángulos interiores $\widehat{AEB}$ y $\widehat{ACB}$ son iguales, ya que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia (BA). Por tanto, $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

b) Sea S la circunferencia que pasa por A, B, y Q, y sea P' la intersección de la recta BE con S que no es B. El objetivo es ver que $P' = P$. Tenemos que $\widehat{AP'B} = \widehat{AQB}$, porque ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo ángulo. Usando la parte a) obtenemos que $\widehat{AP'B} = \widehat{APB}$, y esto solo es posible si $P = P'$.

c) Hay que empezar demostrando que $\widehat{EPD} = \widehat{ERD}$ (análogo a la parte a)): Mirando el triángulos AEP, y teniendo en cuenta que $\widehat{EPD} + \widehat{EPA} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{EPD} = \widehat{DAE} + \widehat{AEB}.$$

Mirando el triángulos CRD, y teniendo en cuenta que $\widehat{ERD} + \widehat{CRD} = 180°$, tenemos que

$$\widehat{ERD} = \widehat{ECD} + \widehat{BDC}.$$

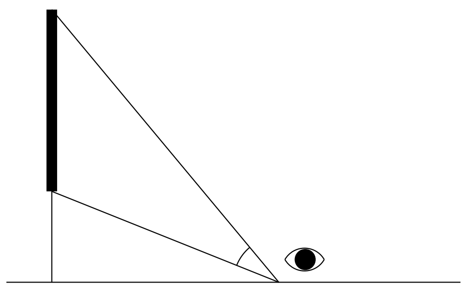
Los ángulos interiores $\widehat{AEB}$ y $\widehat{BDC}$ son iguales, ya que ambos abarcan un arco de circunferencia de igual longitud (BA y CB respectivamente). Similarmente, los ángulos interiores $\widehat{DAE}$ y $\widehat{ECD}$ son iguales, ya que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia (ED). Por tanto, $\widehat{EPD} = \widehat{ERD}$.

Ahora, el mismo argumento usado en la parte b) sirve para demostrar que $EDRP$ es cíclico.

d) Basta ver que $\widehat{DRP} = \widehat{PQB}$. Como $EDRP$ es cíclico, $\widehat{DRP} = 180° - \widehat{PED} = 180° - \widehat{BED}$. Como $APQB$ es cíclico, $\widehat{PQB} = 180° - \widehat{BAP} = 180° - \widehat{BAD}$. Finalmente, $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ porque ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco.

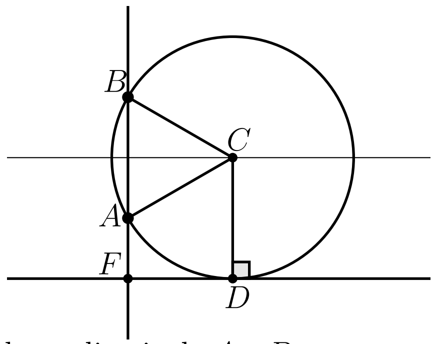
□

Problema 25.



Hay una pantalla vertical de 100m de alto, pero su borde inferior está a 50m de altura, con lo que apenas se ve sin alejarse. ¿A qué distancia hay que alejarse para que ocupe el máximo ángulo en nuestro campo de visión?

Solución.



Si dibujamos la circunferencia que pasa por los dos bordes de la pantalla y por el punto donde estamos, vemos que el ángulo de visión está inscrito en ella, por lo que sólo depende de la circunferencia y no de dónde estemos nosotros en ella. Buscamos entonces la circunferencia más pequeña posible en la que podamos estar: tendrá que ser tangente al suelo.

Si llamamos C al centro de esta circunferencia, tiene que estar en la mediatriz de A y B, que es paralela al suelo y está a altura 100m. Si llamamos D al punto de tangencia, donde nos colocamos, tendremos que CD es perpendicular al suelo y que los radios son iguales: $|AC| = |BC| = |CD| = 100m$. Sabiendo esto, sabemos que ABC es un triángulo equilátero. Por tanto, el ángulo central que abarcan A y B es de 60°, y el ángulo inscrito que buscamos es la mitad, 30°. Además, la distancia FD a la que tenemos que alejarnos es la altura de este triángulo, que usando el Teorema de Pitágoras es $50\sqrt{3}$ metros.

□

Problema 26. Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. AC es un diámetro de la primera circunferencia y AD es un diámetro de la segunda circunferencia. Demuestra que B, C y D están alineados.

Solución. El ángulo $\widehat{ABC}$ está inscrito en una semicircunferencia, por lo que es un ángulo recto. Lo mismo ocurre con el ángulo ABD.

□

Problema 27. Dado un círculo y un punto A fuera de él trazamos dos tangentes AB y AC al círculo (B y C son puntos tangentes). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se encuentra en la circunferencia dada.

Solución. Sea O el centro de la circunferencia y M la intersección de AO con la circunferencia (el punto medio del arco menor BC). Probemos que M es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

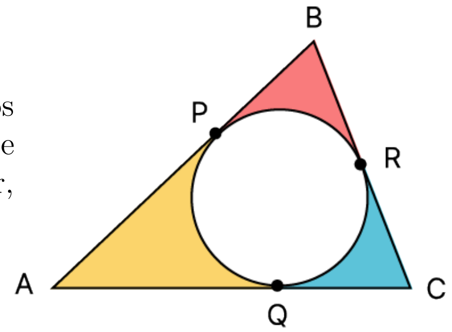
Observemos que AM es la bisectriz del ángulo BAC. Ahora queremos ver que BM es la bisectriz del ángulo ABC. De la misma form se prueba que CM es la bisectriz del ángulo ACB.

Sea $\alpha = \angle MBC = \angle MCB$. Entonces $\angle MOB = 2\alpha$. Por lo tanto $\angle OBC = 90° - 2\alpha$ y por eso $\angle ABM = 90 - (90 - 2\alpha + \alpha) = \alpha$. Por tanto, BM es también la bisectriz del triángulo ABC.

Concluimos que M es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC, es decir el centro de su circunferencia inscrita.

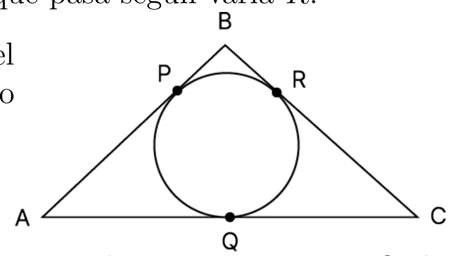
□

Problema 28.



Dado el ángulo A y la circunferencia inscrita que toca los lados en los puntos P, Q, demuestra que podemos trazar una única tangente BC de modo que el área amarilla sea el resto entre la azul y la rosa, es decir, $Area_{APQ} = Area_{CQR} - Area_{BPR}$

Solución.
Pista: No hay que encontrar la tangente, sino ver que existe. Estudiar qué pasa según varía R.



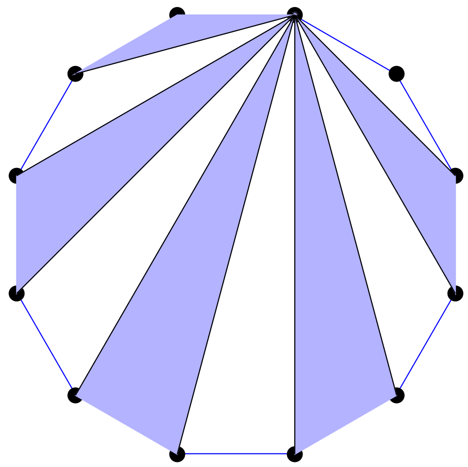
La posición de la recta tangente BC depende únicamente de la posición del punto R, que puede variar entre Q', el punto opuesto a Q y P',el opuesto a P. Definamos la función

$$f(R) = Area_{CQR} - Area_{BPR}$$

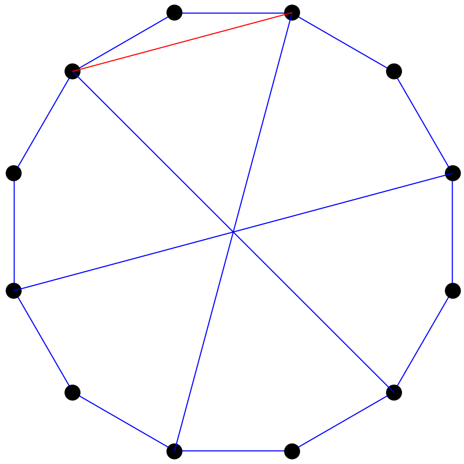
Claramente, si $\angle B = \angle C$, $f(R) = 0$. Por otro lado, cuando R tiene al punto opuesto a Q, la función tiende a infinito. Es evidente también que f es estrictamente monótona, porque al mover el punto R en dirección a Q' el nuevo triángulo curvilíneo $B'PR'$ está contenido en BPR por tanto su área es estrictamente menor, mientras que el área $C'QR' > CQR$. Como cada función continua estrictamente monótona toma cada valor una única vez, y su rango son todos los números reales, en algún punto de su recorrido será igual al área de APQ.

□

Problema 29. En un polígono de 12 lados inscrito en una circunferencia de radio $1cm$ se trazan todas las diagonales desde el vértice 1. Busca el área sombreada



Solución. Es evidente que la parte sombreada es igual a la blanca. El problema, por tanto, consiste en buscar el área del polígono de 12 lados regular. Dividámoslo en 6 cuadriláteros iguales con diagonales:



Las diagonales de estos cuadriláteros son perpendiculares e iguales (el segmento rojo forma con dos radios un equilátero), por lo que el área de este cuadrilátero es $A = \frac{1 \cdot 1}{2}$, el área del polígono es 3 y el área sombreada es $1,5$.

$\square$

Problema 30. El radio de la circunferencia circunscrita sobre los puntos medios de los lados del triángulo ABC es igual a 3. $\angle A = 60°, \angle B = 45°$. Busca el área del triángulo ABC.

Solución. Llamemos los puntos medios K, L, M. Está claro que $\triangle ABC \overset{2}{\cong} KLM$, por lo que su área es el cuádruple. El área del triángulo KLM se puede hallar con la siguiente fórmula (piensa que tiene los mismos ángulos que $\triangle ABC$ por ser semejantes):

$$A_{KLM} = 2 \cdot 3^2 \sin 45° \sin 60° \sin 75° = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 9 \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

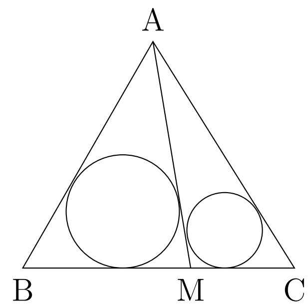
Recuerda que el seno de 105° se puede calcular como

$$\sin 75° = \sin 30° + 45° = \sin 45° \cos 30° + \sin 30° \cos 45°$$

De ahí que $A_{ABC} = 9(3 + \sqrt{3})$

$\square$

Problema 31.



El punto M está en el lado BC del $\triangle ABC$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABM$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACM$. ¿Puede ser mediana el segmento AM?

Solución. Supongamos que AM es mediana, $BM = MC$. Entonces $A_{ABM} = A_{ACM}$. Por otro lado, $A_{ABM} = \frac{AB+BM+AM}{2} \times 2r, A_{ACM} = \frac{AC+BM+AM}{2} \times r$. Esto significa que $AC = AM + 2AB + CM > AM + CM$. Esto contradice la desigualdad triangular.

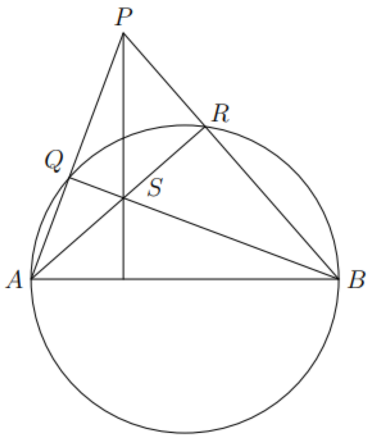
$\square$

Problema 32. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Solución.

Sea Q (respectivamente R) el punto de la circunferencia distinto de A (respectivamente B) situados también en la recta AP (respectivamente BP). Sea S el punto de intersección de los segmentos AR y QB. Veamos que la recta que pasa por P y S es perpendicular a AB.

Tenemos que $\angle AQB$ y $\angle ARB$ son rectos, por lo que S es el ortocentro del triángulo APB. Como las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro, tenemos que la recta PS contiene a la altura del triángulo ABP que sale de P, y por tanto es perpendicular a AB.



□

Problema 33. Sea ABC un triángulo con ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, circuncentro[1] O, incentro[2] I y ortocentro[3] H. Supongamos que $\angle A = 60°$.

a) Demuestra que hay una circunferencia que pasa por B, H, O, I y C.

b) Demuestra que $|OI| = |HI|$.

Solución. a) Tenemos que demostrar que $\angle BIC = \angle BOC = \angle BHC$. Mirando el triángulo BIC, observamos que

$$\angle BIC = 180° - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180° - \frac{120°}{2} = 120°.$$

Sean B' y C' los pies de las altura que salen de B y C respectivamente. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es $360°$, así que mirando al cuadrilátero $AC'HB'$ deducimos que $\angle B'HC' = 120°$. Además, observamos que $\angle BHC = \angle B'HC'$, por lo que

$$\angle BHC = 120°.$$

Mirando la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y la relación entre ángulos inscritos y centrales, obtenemos que $\angle A = \frac{\angle BOC}{2}$, por lo que

$$\angle BOC = 120°,$$

y esto concluye nuestra demostración.

b) Si $I = H$, la bisectriz que sale del vértice A coincide con la altura que sale del vértice A, por lo que, como $\angle A = 60°$, necesariamente ABC es equilátero. En este caso $O = I = H$, por lo que el resultado es cierto.

Si $I = O$, la unión de cada uno de los vértices con O es una bisectriz del triángulo, y el pie de la perpendicular de O a cada uno de sus lados es la mediatriz. Dibujando todas las bisectrices y las mediatrices, el triángulo ABC nos queda dividido en 6 triángulos rectángulos congruentes, lo que fuerza a que el triángulo ABC sea equilátero.

Si $H = O$, todas las mediatrices de los lados del triángulo ABC son alturas, y eso también fuerza a que el triángulo sea equilátero.

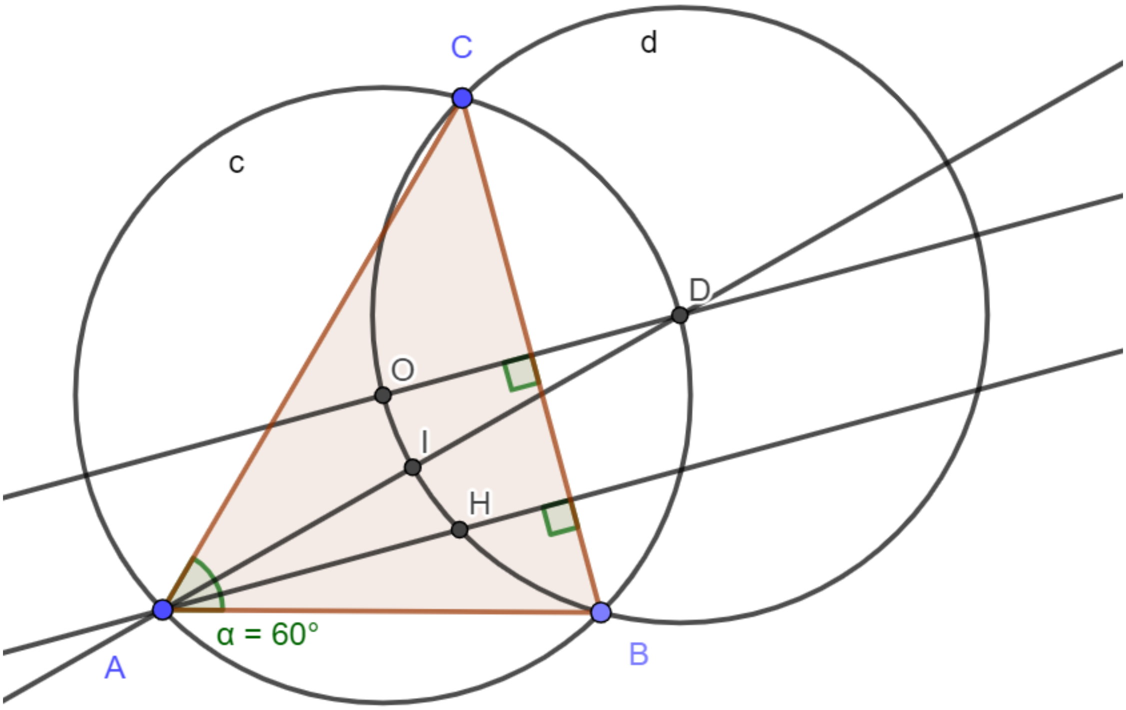
Por tanto, a partir de ahora asumiremos que el triángulo ABC no es equilátero, y por tanto O, I y H son tres puntos distintos.

[1] El circuncentro de un triángulo es el centro de su circunferencia circunscrita, o equivalentemente, la intersección de las mediatrices de los tres lados del triángulo.

[2] El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia inscrita, o equivalentemente, la intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo.

[3] El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

Sea c la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, d la circunferencia que contiene los puntos B, C, O, I, H, y D el centro de d.



Observamos ciertas cosas

i) La circunferencia d es el resultado de reflejar la circunferencia c por el lado BC: En efecto, sea O' el resultado de reflejar O a través del lado BC. Tenemos que $|OB| = |0'B|$ y $|OC| = |O'C|$. Además $\angle O'OC = \angle O'OB = \frac{1}{2}\angle COB$, y como $\angle COB$ es un ángulo central en la circunferencia c, obtenemos que $60° = \angle A = \frac{1}{2}\angle COB$. Por tanto, $\angle O'OC = \angle O'OB = 60°$. Miramos el triángulo $OO'C$ y vemos que los lados OC y $O'C$ miden lo mismo, y $\angle O'OC = 60°$, por lo que $OO'C$ es un triángulo equilátero. Similarmente, $OO'B$ también es equilátero. Por tanto, O' equidista de O, B y C, y por tanto es el centro de la circunferencia que contiene a esos tres puntos, que necesariamente tiene el mismo radio que c. En particular, $O' = D$, y d es el resultado de reflejar c por el lado BC.

ii) D está en c: Esto es consecuencia de que O está en d y la observación i).

iii) La altura del triángulo ABC que parte de A es paralela a la recta que une O y D: En efecto, por i) sabemos que la recta que une O y D es perpendicular a BC, como la altura del triángulo ABC que parte de A.

iv) La bisectriz de $\angle A$ pasa por D: En efecto, sea D' el punto de corte distinto de A de la bisectriz de $\angle A$ con la circunferencia c. Como $30° = \angle BAD'$ es un ángulo inscrito en c, tenemos que $\angle BOD' = 60°$. Como D es un punto en c por ii) tal que $\angle BOD = 60°$ por nuestra demostración de i), necesariamente $D' = D$.

v) $|AH| = |HD|$: Como D es el centro de d, y H y O están en d, $|HD| = |OD|$. Por ii), y como O es el centro de c, y c contiene a A, $|OD| = |OA|$. El cuadrilátero $ODHA$ tiene dos lados paralelos (OD y HA) por la observación iii), y otros dos lados miden lo mismo. Esto implica que $ODHA$ es un paralelogramo, y por tanto $|OD| = |HA|$.

Nuestro objetivo es demostrar que los ángulos centrales (menores de 180°) de la circunferencia d $\angle IDO$ y $\angle HDI$ son iguales, ya que un mismo valor de ángulo central abarca una misma longitud de arco, que abarca una misma longitud de cuerda.

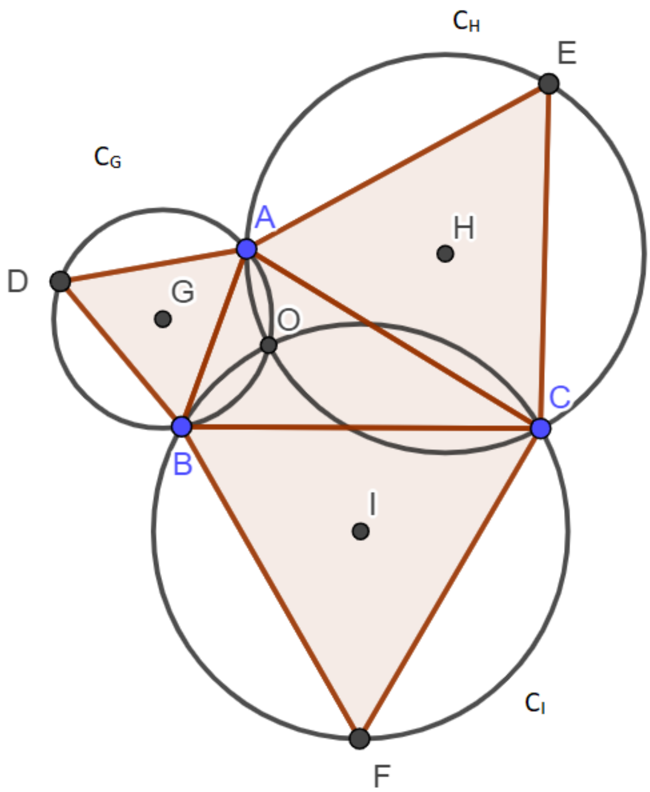
El ángulo central $\angle IDO$ de la circunferencia d (de los dos ángulos centrales, el menor de 180°) coincide con el ángulo $\angle DAH$. Por la observación v), $\angle ADH = \angle HAA$. Finalmente, como I está en AD por la observación iv), $\angle HDA = \angle HDI$.

$\square$

Problema 34. Tenemos un triángulo ABC en el plano. En cada uno de sus lados, dibujamos un triángulo equilátero en el exterior del triángulo ABC, creando los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF. Sean G, H e I los centros de los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF respectivamente. Demuestra que el triángulo GHI es equilátero.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los ángulos $\angle A, \angle B$ del triángulo ABC son ambos distintos de 120°.

Sea c_G la circunferencia de centro G que pasa por los puntos A, B, D, c_H la circunferencia de centro H que pasa por los puntos A, C, E, y c_I la circunferencia de centro I que pasa por los puntos B, C, F. Como $\angle A \neq 120°$, c_G y c_H se cortan en otro punto O aparte de A. Veamos que c_I también pasa por O.



Tenemos varios casos:

- $O \neq B$ y $O \neq C$: El cuadrilátero $ADBO$ está inscrito en una circunferencia, por lo que sus ángulos opuestos han de sumar 180°. En particular, $\angle AOB = 180° - \angle BDA = 180° - 60° = 120°$. Similarmente, el cuadrilátero $AOCE$ está inscrito en una circunferencia, por lo que $\angle COA = 180° - \angle AEC = 180° - 60° = 120°$.

  Como $\angle COA + \angle BOC + \angle AOB = 360°$, tenemos que $\angle BOC = 120°$. En particular, O también está en la circunferencia c_I.

- $B \neq O = C$: c_I también pasa por O. La intersección de c_I y c_G son dos puntos, B y O.

- $C \neq O = B$: c_H también pasa por B. El cuadrilátero $ABCE$ está inscrito en una circunferencia, por lo que $\angle B$ en el triángulo ABC tiene que tener 120°, y ya hemos asumido que no estábamos en este caso. Por tanto, esto es imposible

En cualquiera de los dos casos posibles (los dos primeros), la intersección de las tres circunferencias c_G c_H y c_I es un único punto, O que es distinto de A y de B.

Como A y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_G y c_H, tenemos que GH es perpendicular a AO. Similarmente, como B y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_G y c_I, tenemos que GI es perpendicular a BO. Como AO y BO forman un ángulo de 120°, GH y GI forman un ángulo de 60°/120°.

Para ver que GHI es un triángulo equilátero, nos falta ver que HI y GH forman un ángulo de 60°/120° también, porque la única manera en que la suma de tres ángulos que toman valores o 60° o 120° sea 180° es si los tres miden 60°.

Analizamos cada caso de los dos anteriores que eran posibles por separado:

- Caso $O \neq C$: Como C y O son los puntos de intersección de las circunferencias c_H y c_I, tenemos que HI es perpendicular a CO. Como AO y CO forman un ángulo de 120°, GH y HI forman un ángulo de 60°/120°.

- Caso $O = C$: Argumentando como en el tercer caso de los distinguidos anteriormente, podemos ver que $\angle C$ en el triángulo ABC tiene que tener 120°. En ese caso, la bisectriz de $\angle C$ es perpendicular a IH. La bisectriz de $\angle C$ forma un ángulo de 60° con OA, por lo que IH y GH forman un ángulo de 60°/120°.

□

Problemas para hacer en casa

22 de noviembre

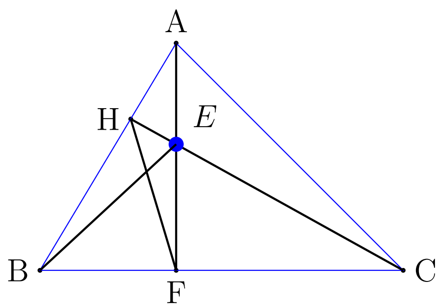
Problema 35. Si $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ son los vértices de un polígono regular de 100 lados (enumerados en sentido antihorario), ¿cuál es el valor del ángulo $\angle P_{20}P_2P_1$?

Solución. Todo polígono regular está inscrito en una circunferencia. El ángulo que nos piden hallar es un ángulo inscrito en esta circunferencia, y abarca un arco de $\frac{100-19}{100} = \frac{81}{100}$ de la circunferencia, es decir, un ángulo central de $\frac{81}{100} \cdot 360° = 291.6°$. Por tanto, $\angle P_{20}P_2P_1 = \frac{291.6°}{2} = 145.8°$.

□

Problema 36.

En el triángulo ABC han trazado las alturas CH, AF que se cortan en el punto E. Sabemos que el segmento BE divide el ángulo $\angle B$ en $\angle ABE = 18°, \angle CBE = 26°$. Busca los ángulos del triángulo BHF.

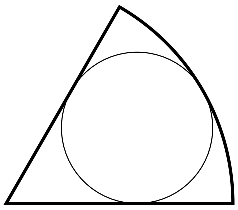


Solución. Como $\angle BHE + \angle BFE = 90° + 90°$, el cuadrilátero $BHEF$ es inscrito. Los ángulos apoyados en $\overset{\frown}{HE}$ son iguales, $\angle HFE = \angle HBE = 18°$. Análogamente, los ángulos apoyados en $\overset{\frown}{EF}$ también son iguales, $\angle FHE = \angle FBE = 26°$. Por eso $\angle BHF = 90° - \angle FHE = 64°$ y $\angle BFH = 90° - 18° = 72°$

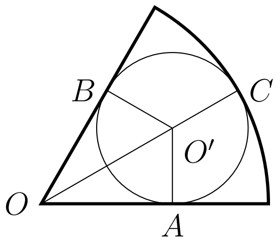
□

29 de noviembre

Problema 37. Tenemos un sector circular que es un sexto de un círculo de radio 6. Este sector circular tiene un círculo dentro de él que es tangente a ambos lados del sector circular y al arco de circunferencia que forma el sector, como en el dibujo. Encuentra el radio del círculo pequeño, justificando tu respuesta.



Solución. Sea O el centro del círculo grande, O' el centro del círculo pequeño y A, B, C los puntos de tangencia como se muestran en el siguiente dibujo:



Sea r el valor del radio del círculo pequeño. Los triángulos OAO' y OBO' son congruentes: ambos tienen un ángulo recto (el correspondiente a la tangencia) y dos lados iguales (OO' y los que son radios del círculo pequeño). Como $\widehat{AOB} = \frac{360°}{6} = 60°$, tenemos que $\widehat{AOO'} = \widehat{O'OB} = 30°$ y $\widehat{AO'O} = \widehat{BO'O} = 60°$. En particular, los triángulos AOO' y $O'OB$ son la mitad de un triángulo equilátero de lado OO', por lo que

$$r = \frac{|OO'|}{2}.$$

Por la simetría del sector circular y del círculo pequeño con respecto a la recta OO', tenemos que los puntos O, O' y C están alineados. En particular,

$$|OO'| + r = 6.$$

Si resolvemos estas dos ecuaciones, obtenemos que $r = 2$ y que $|OO'| = 4$.

□

13 de diciembre

Problema 38. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

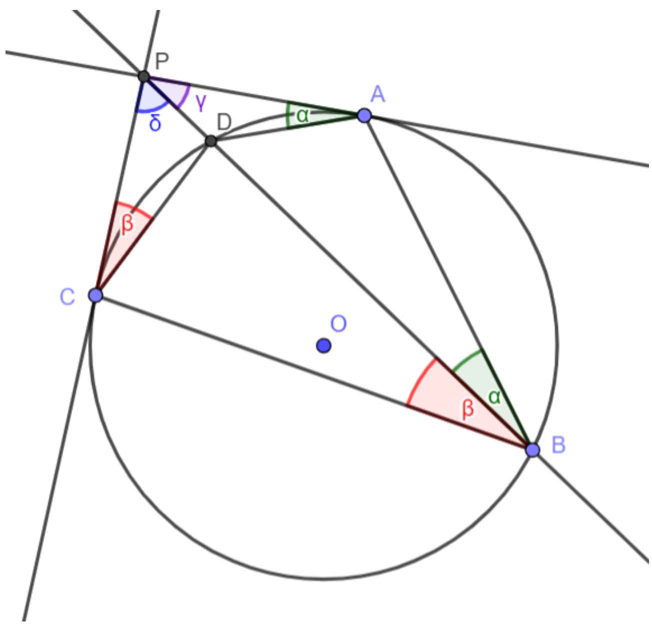
$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

Solución.

Hacemos el dibujo en el caso en el que B está en la cuerda más larga entre A y C de la circunferencia. Aquí, O es el centro de la circunferencia. El razonamiento es análogo cambiando los papeles de B y D.

Los dos ángulos denotados por α en el dibujo son iguales porque son ángulos inscritos (en el caso de $\angle ABD$) y semiinscritos (en el caso de $\angle DAP$) abarcando la misma cuerda de la circunferencia (AD). El mismo argumento nos dice que los dos ángulos denotados por β en el dibujo son iguales.

Observamos que los triángulos PAD y PBA son semejantes, al tener dos ángulos iguales (α y γ). Por tanto,



$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PA|}.$$

También observamos que los triángulos PCD y PBC son semejantes, al tener dos ángulos iguales (β y δ). Por tanto,

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

Además, tenemos que los triángulos PAO y PCO son congruentes, ya que ambos son ángulos rectos en los que la hipotenusa mide lo mismo ($|PO|$) y uno de sus catetos también ($|CO| = |AO|$ porque ambos son el radio de la circunferencia), así que el teorema de Pitágoras nos especifica que los catetos restantes también miden lo mismo. Por tanto, $|PA| = |PC|$. Esto nos dice que la última y la penúltima fracción de las dos igualdades de fracciones anteriores son iguales. Por tanto, todas las fracciones que hemos escrito hasta ahora son iguales. En particular,

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|CD||}{|BC|},$$

por lo que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

$\square$