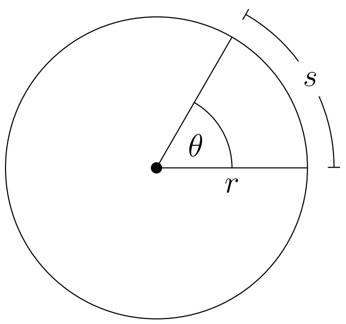
Pequeño Instituto de Matemáticas
2024-2025

Fechas: 15, 22, 29 de noviembre y 13 de diciembre de 2024
Ángulos en la circunferencia
Grupo: Venus

Ángulos en la circunferencia

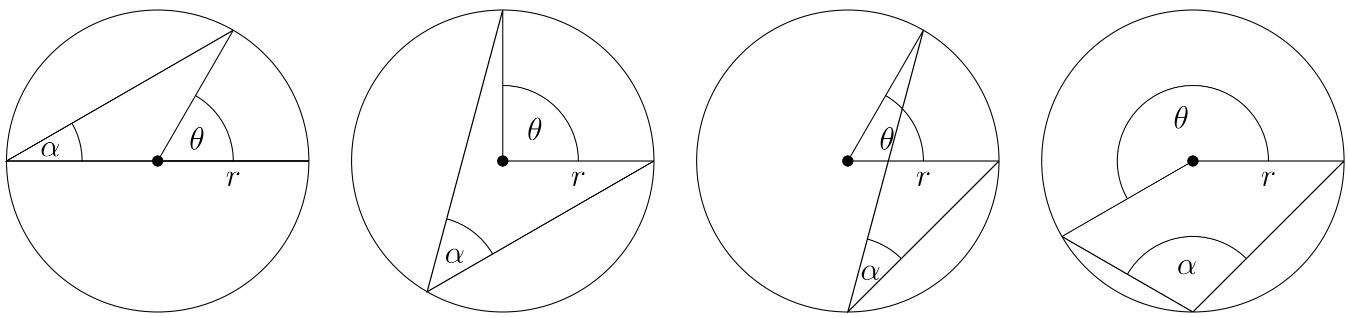
Vamos a distinguir entre ángulos **centrales**, **inscritos** y **semiinscritos**.

- Los ángulos **centrales** tienen el vértice en el centro de la circunferencia:

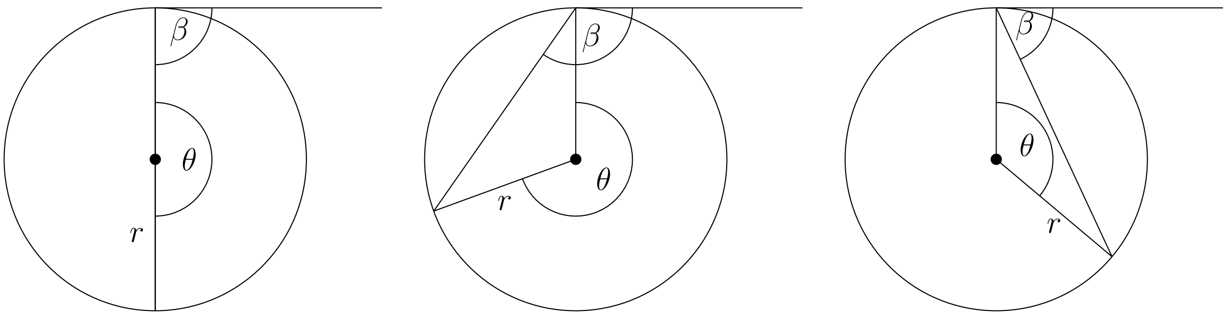


El valor del ángulo central θ es proporcional a la longitud del arco s: Si $\theta = 90°$, entonces $s = \frac{\pi r}{2}$ (donde r es la longitud del radio), si $\theta = 180°$, entonces $s = \pi r$... En general, $s = \frac{\theta \pi r}{180}$, donde θ está medido en grados, y r y s están medido en las mismas unidades de longitud (por ejemplo, en cm.).

- Los ángulos **inscritos** tienen el vértice en la circunferencia, y los lados cortan a la circunferencia. En el dibujo, hay cuatro circunferencias en las que hemos dibujado un ángulo inscrito α, y cada uno de estos ángulos inscritos tiene un ángulo central θ asociado a él que abarca el mismo arco de la circunferencia:

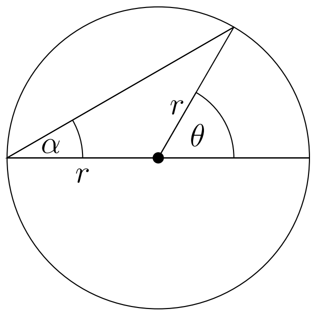


- Los ángulos **semiinscritos** tienen el vértice en la circunferencia, uno de sus lados corta a la circunferencia y otro de sus lados es tangente a la circunferencia. En el dibujo, hay tres circunferencias en las que hemos dibujado un ángulo semiinscrito β, y cada uno de estos ángulos semiinscritos tiene un ángulo central θ asociado a él que abarca el mismo arco de la circunferencia:

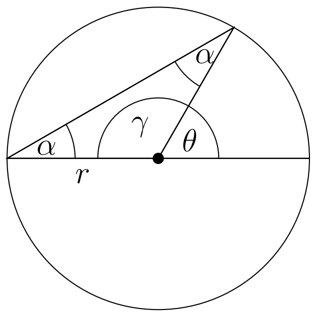


Ejemplo resuelto. Sea α un ángulo inscrito tal que uno de sus lados es un diámetro, y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Demostrar que $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

Solución. Estamos en la situación del siguiente dibujo:



El triángulo que vemos es isósceles, y por tanto tiene dos ángulos iguales. Lo representamos en el siguiente dibujo, donde $\gamma = 180 - \theta$.



Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, tenemos que $\alpha + \alpha + (180 - \theta) = 180$, y obtenemos que $\alpha = \frac{\theta}{2}$. □

El ejercicio anterior es un caso particular del siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea α un ángulo inscrito y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\alpha = \frac{\theta}{2}$.*

Problema 1. Demuestra el Teorema 1. Para ello, considera cada una de las cuatro situaciones dibujadas anteriormente en la definición de ángulo inscrito, y usa el ejemplo anterior.

La misma relación se cumple para un ángulo semiinscrito y su correspondiente ángulo central:

Teorema 2. *Sea β un ángulo semiinscrito y sea θ su ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco de circunferencia). Entonces $\beta = \frac{\theta}{2}$.*

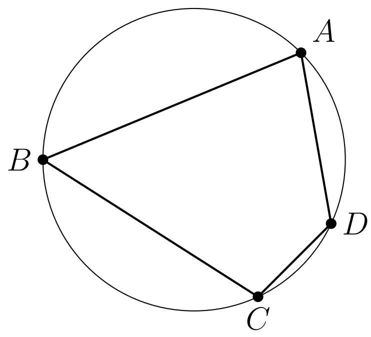
Problema 2. Demuestra el Teorema 2. Para ello, considera cada una de las tres situaciones dibujadas anteriormente en la definición de ángulo semiinscrito, y usa que cualquier recta tangente a una circunferencia en un punto P es perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por P.

Por último, vamos a ver el siguiente resultado sobre cuadriláteros. Lo demostrarás paso a paso en los problemas 3, 4 y 5.

Teorema 3. *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman* $180°$ *si y sólo si puede ser inscrito en una circunferencia.*

Problema 3. Hemos fijado dos puntos en la circunferencia y hemos dibujado dos ángulos inscritos con base en estos puntos. Resulta que no son iguales. ¿Cómo es posible? ¡Dibújalos!

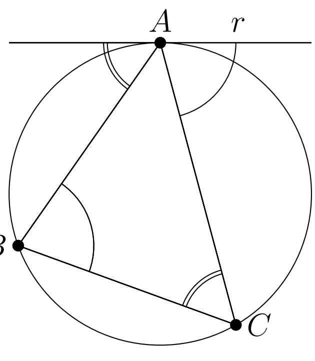
Problema 4. Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito suman $180°$.



Problema 5. Demuestra que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman $180°$, hay una circunferencia que pasa por sus 4 vértices.

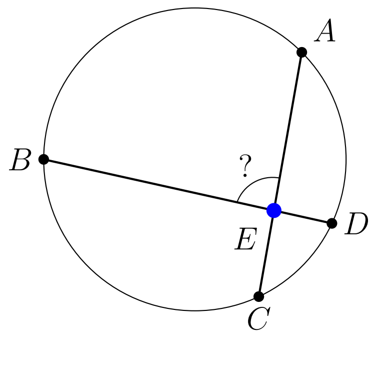
Problemas

Problema 6. Sea ABC un triángulo, y sea S la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. Llamamos r a la recta tangente a S por A. Demuestra que los ángulos marcados de la misma manera en el dibujo son iguales



Problema 7.

Sabiendo cuánto miden los arcos $\overset{\frown}{AD} = 64°, \overset{\frown}{BC} = 146°$, halla el ángulo $\angle AEB$.



Problema 8. En un estanque circular nada una carpa. Siempre hace los mismos tres movimientos: empieza en el borde, recorre 12 metros hasta tocar otro borde del estanque, gira en ángulo recto, recorre otros 5 m hasta tocar otro punto del borde y vuelve al punto inicial. ¿Cuál es el área del estanque?

Problema 9. Sean a, b, c las longitudes de los tres lados de un triángulo T, y sea A su área. Sea r la longitud del in-radio de T, es decir, la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (cuyo centro es el punto de intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo). Demuestra que $A = \frac{r(a+b+c)}{2}$.

Problema 10. Los puntos A, B, C, D están colocados en este orden en una circunferencia. Llamemos K, L, M, N los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$. Demuestra que las cuerdas MK, LN son perpendiculares.

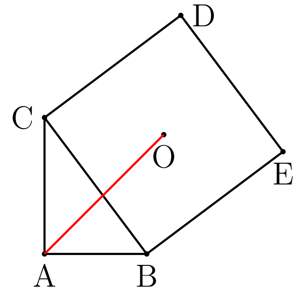
Problema 11. Demostrar que si en un cuadrilátero está inscrita una circunferencia (es decir, contiene una circunferencia tangente a los 4 lados), entonces la suma de sus lados opuestos es la misma.

Problema 12. Demuestra que todo polígono de 9 lados tiene un par de diagonales con un ángulo menor de $7°$.

Problema 13. En la circunferencia de radio 1 se marcan 100 puntos. Demuestra que existe un punto en esta circunferencia tal que la suma de las distancias a todos los puntos marcados sea igual o superior a 100.

Problema 14.

En la hipotenusa de un triángulo rectángulo $ABC, \angle A = 90°$ se construye el cuadrado $BCDE$. Sea O el centro de este cuadrado, halla $\angle BAO$.

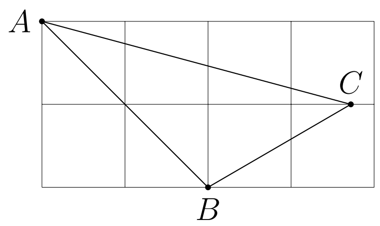


Problema 15. Demostrar que el punto de intersección de los círculos construidos sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC como diámetros, diferente de A, está sobre la recta BC.

Problema 16. El triángulo ABC tiene un ángulo recto en A. Si AM es su mediana, demuestra que $|AM| = |BM| = |CM|$.

Problema 17.

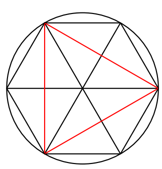
En una cuadrícula han dibujado el siguiente triángulo:
Sabiendo que el ángulo $\angle ACB = 45°$ busca los otros ángulos del triángulo.



Problema 18.

(a) Demuestra que el cuadrado de lado $\sqrt{2}$ está inscrito en una circunferencia de radio 1.

(b) Demuestra que un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ está inscrito en una circunferencia de radio 1. Ayúdate del siguiente dibujo, donde todos los triángulos equiláteros pequeños que aparecen tienen lado 1.

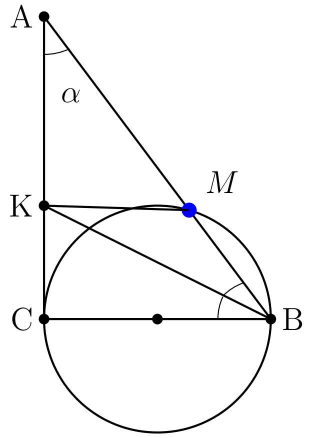


(c) Determina el número de polígonos (no necesariamente regulares) inscritos en un círculo de radio 1 tales que cada uno de sus lados tiene como longitud la raíz cuadrada de un número entero. Los polígonos que son rotaciones o imagen espejo de otro se consideran el mismo polígono.

Pista: Si un polígono está inscrito en un círculo de radio 1, ¿cuál es la longitud máxima que puede tener uno de sus lados? ¿Cuántos valores que son raíces cuadradas de números enteros son menores e iguales que la respuesta a la pregunta anterior?

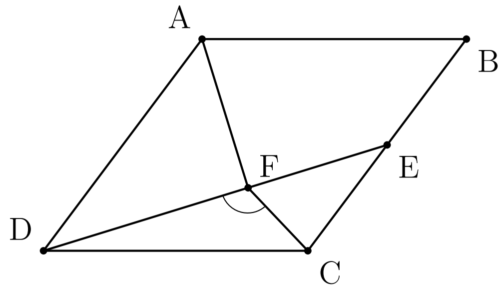
Problema 19.

En el triángulo $\triangle ABC$ sabemos que $\angle C = 90°, \angle A = \alpha$. La bisectriz del ángulo B corta AC en el punto K. BC es el diámetro de la circunferencia que corta la hipotenusa AB en el punto M. Busca $\angle AMK$.



Problema 20.

En el rombo $ABCD$ han marcado E, el punto medio del lado BC. AF es perpendicular al segmento DE. Busca el ángulo $\angle DFC$ sabiendo que $\angle B = 40°$.



Problema 21. Tienes 9 puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos puntos consecutivos es constante, es decir, los puntos están en los vértices de un eneágono regular. Quieres dibujar una estrella de 9 puntas conectando estos puntos por segmentos rectos sin levantar el lápiz del papel, saltándote el mismo número de puntos cada vez. Por ejemplo, si numeramos los vértices del 1 al 9 en el sentido de las agujas del reloj y decidimos saltar 1 vértice cada vez, el 1 estará unido con el 3 (saltándonos el 2), el 3 con el 5, etc. ¿Cuántas estrellas diferentes puedes dibujar de esta manera, si el eneágono regular no cuenta como estrella?

Problema 22. En el triángulo $\triangle ABC$ traza el segmento AM que lo divide en dos triángulos de igual perímetro.

Problema 23. Dadas dos rectas que se cortan en el punto A, y un punto N que no está en ninguna de ellas, traza una recta que pase por N y corte a las otras dos formando un triángulo de perímetro p

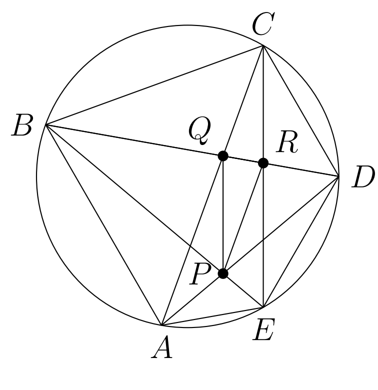
Problema 24. Sea $ABCDE$ un pentágono cuyos vértices están en una circunferencia. Además, sabemos que $|AB| = |BC|$ y que $|CD| = |DE|$. Llamamos P al punto de intersección de las diagonales AD y BE, Q al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y R al punto de intersección de las diagonales BD y CE.

a) Demuestra que $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.

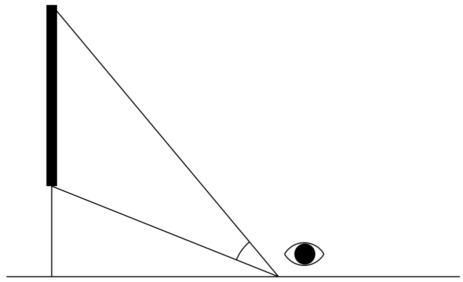
b) Usa la parte anterior para demostrar que el cuadrilátero $ABQP$ es cíclico, es decir, que existe una circunferencia que contiene a sus cuatro vértices.

c) Demuestra que el cuadrilátero $EDRP$ también es cíclico.

d) Usa las partes b) y c) para demostrar que el triángulo PQR es isósceles.



Problema 25.

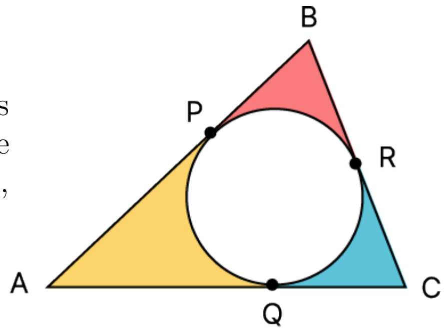


Hay una pantalla vertical de 100m de alto, pero su borde inferior está a 50m de altura, con lo que apenas se ve sin alejarse. ¿A qué distancia hay que alejarse para que ocupe el máximo ángulo en nuestro campo de visión?

Problema 26. Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. AC es un diámetro de la primera circunferencia y AD es un diámetro de la segunda circunferencia. Demuestra que B, C y D están alineados.

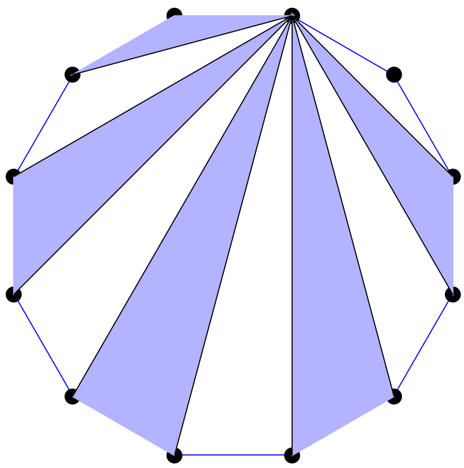
Problema 27. Dado un círculo y un punto A fuera de él trazamos dos tangentes AB y AC al círculo (B y C son puntos tangentes). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se encuentra en la circunferencia dada.

Problema 28.



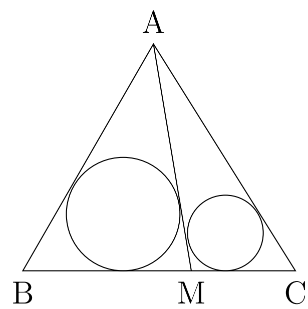
Dado el ángulo A y la circunferencia inscrita que toca los lados en los puntos P, Q, demuestra que podemos trazar una única tangente BC de modo que el área amarilla sea el resto entre la azul y la rosa, es decir, $Area_{APQ} = Area_{CQR} - Area_{BPR}$

Problema 29. En un polígono de 12 lados inscrito en una circunferencia de radio $1cm$ se trazan todas las diagonales desde el vértice 1. Busca el área sombreada



Problema 30. El radio de la circunferencia circunscrita sobre los puntos medios de los lados del triángulo ABC es igual a 3. $\angle A = 60°, \angle B = 45°$. Busca el área del triángulo ABC.

Problema 31.



El punto M está en el lado BC del $\triangle ABC$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABM$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACM$. ¿Puede ser mediana el segmento AM?

Problema 32. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Problema 33. Sea ABC un triángulo con ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, circuncentro[1] O, incentro[2] I y ortocentro[3] H. Supongamos que $\angle A = 60°$.

a) Demuestra que hay una circunferencia que pasa por B, H, O, I y C.

b) Demuestra que $|OI| = |HI|$.

Problema 34. Tenemos un triángulo ABC en el plano. En cada uno de sus lados, dibujamos un triángulo equilátero en el exterior del triángulo ABC, creando los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF. Sean G, H e I los centros de los triángulos equiláteros ABD, ACE y BCF respectivamente. Demuestra que el triángulo GHI es equilátero.

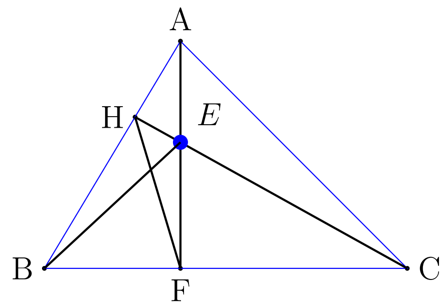
Problemas para hacer en casa

22 de noviembre

Problema 35. Si $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ son los vértices de un polígono regular de 100 lados (enumerados en sentido antihorario), ¿cuál es el valor del ángulo $\angle P_{20}P_2P_1$?

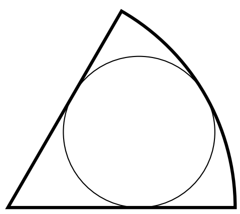
Problema 36.

En el triángulo ABC han trazado las alturas CH, AF que se cortan en el punto E. Sabemos que el segmento BE divide el ángulo $\angle B$ en $\angle ABE = 18°, \angle CBE = 26°$. Busca los ángulos del triángulo BHF.



29 de noviembre

Problema 37. Tenemos un sector circular que es un sexto de un círculo de radio 6. Este sector circular tiene un círculo dentro de él que es tangente a ambos lados del sector circular y al arco de circunferencia que forma el sector, como en el dibujo. Encuentra el radio del círculo pequeño, justificando tu respuesta.



[1] El circuncentro de un triángulo es el centro de su circunferencia circunscrita, o equivalentemente, la intersección de las mediatrices de los tres lados del triángulo.

[2] El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia inscrita, o equivalentemente, la intersección de las bisectrices de los tres ángulos del triángulo.

[3] El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

13 de diciembre

Problema 38. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$