Pequeño Instituto de Matemáticas 2024-25

Fechas: 11, 18, 25 de octubre y 8 de noviembre de 2024
Sucesiones I
Grupo: Mercurio

Una **sucesión** es una regla que a cada número natural proporciona un número. Normalmente este número es un número real y por lo tanto podemos definir una sucesión también como una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. A menudo, en vez de escribir $s(n)$ preferimos escribir s_n.

Ejemplo. La sucesión $s_n \equiv 1, 3, 5, 7, ...$ de números impares corresponde a la función $s(n) = 2n - 1$

Una **recurrencia**, o relación de recurrencia, es una ecuación que relaciona un término de una sucesión con otros anteriores.

Para definir bien una sucesión no es suficiente con definir una relación de recurrencia. Hay que establecer determinadas **condiciones iniciales**: los valores de los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo. La relación de recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2$ si fijamos $s_1 = 1$ nos crea la misma sucesión de impares del ejemplo anterior $1, 3, 5, 7, ...$ pero si fijamos $s_1 = 0$ nos genera los números pares.

Ejemplo. $s_{n+1} = 2s_n + 1$ nos define una relación de recurrencia. Tomando el valor inicial $s_1 = 3$ obtenemos

$$s_2 = s_{1+1} = 2s_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$s_3 = s_{2+1} = 2s_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

y así sucesivamente.

Sabiendo la función que define una sucesión podemos fácilmente desarrollar una relación de recurrencia:

Ejemplo resuelto. ¿Qué relación de recurrencia corresponde a $s_n = n^3$?

Solución.

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Por tanto,

$$s_{n+1} = s_n + 3n^2 + 3n + 1$$

nos proporciona una recurrencia que define la sucesión si fijamos $s_1 = 1$.

Sin embargo, no es la única. Observemos que

$$(s_{n+2} - s_{n+1}) - (s_{n+1} - s_n) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6,$$

y por lo tanto la recuerrencia

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - s_n + 6n + 2$$

nos define la misma sucesión si fijamos $s_1 = 1$ y $s_2 = 8$. □

Problema 1. Encuentra otra relación de recurrencia para la sucesión $s_n = n^3$.

Propiedades de las sucesiones

En el océano de sucesiones variadas existen algunas que tienen determinadas características que necesitaremos nombrar. Son las siguientes:

Definición 1. Se dice que una sucesión es **acotada por arriba** si existe un número S tal que $\forall n : s_n \leqslant S$.
Una sucesión es **acotada por abajo** si existe un número I tal que $\forall n : s_n \geqslant I$.
Una sucesión es **acotada** si es acotada por arriba y por abajo.

Definición 2. Una sucesión es **monótona creciente** si $n \geqslant m \Rightarrow s_n \geqslant s_m$ y **monótona decreciente** si $n \geqslant m \Rightarrow s_n \leqslant s_m$.
Una sucesión se llama **monótona** si es monótona creciente o monótona decreciente.
Si cambiamos $\leqslant, \geqslant$ por $<, >$, es decir, no permitimos términos iguales, se habla de **monotonía estricta**.

Ejemplo.

1. La sucesión $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ es monótona creciente, acotada por abajo y no acotada por arriba.
2. La sucesión $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ no es monótona ni acotada.
3. La sucesión $1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, ...$ no es monótona pero sí acotada.

Podemos formar sucesiones sumando los términos de otra sucesión.

Definición 3. Una **serie** es una sucesión s_n cuyos términos son sumas de los elementos de otra sucesión a_n,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$$

Ejemplo. Si la sucesión $a_n = 1/2^n$ (es una progresión geométrica), la serie correspondiente es la suma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

¿Cómo demostrar que una sucesión está acotada por arriba? Hay varias maneras de hacerlo. La más sencilla es demostrar que cada término es la resta de una constante y un número positivo.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ está acotada por arriba.

Solución. Como $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ vemos que todos los términos son menores de 1. □

Problema 2. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n^2+n+5}{n^2-2n-10}$ está acotada.

Problema 3. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

está acotada.

Otra forma es buscar una sucesión mayor de la que sepamos que está acotada.

Ejemplo resuelto. Cada término de la sucesión es la suma

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} ... + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot (n+2)}$$

Demuestra que está acotada.

Solución. Cambiemos en cada denominador los distintos números por 3:

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} ... + \frac{1}{3^n}$$

Claramente, cada nueva fracción es mayor que la anterior, por lo que $a_n < b_n$. Por otro lado, b_n es la suma de una progresión geométrica, por lo que

$$b_n < \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

□

Problema 4. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

está acotada.

Demostrar que una sucesión no está acotada suele ser algo más difícil. Vamos a ver un ejemplo clásico que cualquier matemático que se precie debe conocer.

Ejemplo resuelto. La suma de la serie armónica

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

no está acotada.

Demostración. Consideremos el segundo término de la suma. Es igual a $\frac{1}{2}$. Ahora consideremos la suma del tercero y el cuarto.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Análogamente,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

Ahora agruparemos los siguientes 8 números, luego los siguientes 16,...

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}_{>1/2} + ...$$

Cada siguiente suma de 2^k números es mayor que $1/2$, por lo que la suma es mayor que cualquier entero N, es decir, diverge. □

Problema 5. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n - 1}$$

no está acotada.

Definición 4. Una subsucesión de la sucesión s_n es una sucesión que formamos eliminando algunos (puede que infinitos) términos de la sucesión s_n.

Matemáticamente hablando, sea i_n una sucesión monótona estrictamente creciente de números naturales. Entonces s_{i_n} es una subsucesión de la sucesión s_n.

Ejemplo. La sucesión $1, 3, 5, 7, 9$ es subsucesión de la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ mientras que $1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots$ no lo es.

Problema 6. Inventa dos sucesiones distintas, u_n, v_n tales que cada una es subsucesión de la otra.

Límite de una sucesión

El concepto de límite es clave en el desarrollo de las matemáticas. Intuitivamente, una sucesión tiene límite cuando sus términos cada vez se van acercando más a un determinado número. La formalización de esta idea no es sencilla:

Definición 5. Se dice que la sucesión a_n **tiene límite** A - se escribe $\lim a_n = A$ - si para cualquier positivo ϵ por muy pequeño que sea existe un número N a partir del cual todos los términos de la sucesión distan de A menos de ϵ, es decir, $\forall \epsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N\ |a_n - A| < \epsilon$.

Vamos a ver un ejemplo de demostración:

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ tiene límite.

Demostración. Si calculamos los primeros términos

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5},$$

vemos que la sucesión crece y, además, nunca puede superar 1. Vamos a demostrar que efectivamente 1 es su límite. Fijemos un $\epsilon > 0$ y elijamos $N = 2/\epsilon$. Entonces $n \geqslant N \Rightarrow 1/n \leqslant \epsilon/2$. ¿Qué ocurre con la distancia $|a_n - 1|$?

$$|a_n - 1| = |\frac{n-1-(n+1)}{n+1}| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \epsilon$$

Recuerda: aplicar la demostración equivale a saber indicar un N adecuado para cada valor de ϵ, es decir, saber construir $N(\epsilon)$. □

La idea del límite consiste en que

- existe una franja alrededor del límite tal que todos los términos de la sucesión a partir de determinado momento están dentro de esta franja,
- podemos hacer esta franja tan estrecha como queramos.

Imagínate la estela de un barco que se va estrechando a medida que nos acercamos al barco.

Problema 7. Calcula $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

¿Cómo son las sucesiones que no tienen límite? Claramente, deben tener términos "díscolos" que se salgan de la estela al menos a cierta distancia del barco.

Para demostrar que una sucesión NO tiene límite A basta indicar algún valor de ϵ para el cual, sea cual sea N, hay términos a partir de N que distan de A más que ϵ.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene límite.

A simple vista el resultado es evidente. El límite no puede ser 1 porque hay infinitos términos que distan de él 2, tampoco puede ser -1 por la misma razón. Pero necesitamos darle rigor y forma:

Demostración. Supongamos que el límite existe y es igual a A. Consideremos $\epsilon = 1$ (la mitad de la distancia entre 1 y -1). Fijemos un N. Sabemos que para cualquier $n \geqslant N$ los números a_n, a_{n+1} son $1, -1$. Por la definición del límite

$$|1 - A| < 1, |-1 - A| < 1 \Rightarrow 0 < A < 2, -2 < A < 0$$

Contradicción. □

Este ejemplo es importante porque nos ayudará a introducir un concepto nuevo.

Definición 6. El punto A se llama **punto de acumulación** de la sucesión a_n si existe una subsucesión s_n tal que $\lim s_n = A$

Como habrás observado, una sucesión puede tener varios puntos de acumulación, pero nunca dos límites (¡lo tendrás que demostrar tú!):

Teorema 1. *Una sucesión no puede tener más de un límite.*

A menudo no podemos indicar cuál es el límite de una sucesión pero lo sabemos gracias al siguiente teorema:

Teorema 2. *Una sucesión monótona y acotada tiene límite*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo resuelto. Sea $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$. Demuestra que esta sucesión tiene límite.

Podemos calcular que $x_2 = \sqrt{7} \approx 2.65, x_3 = \sqrt{6 + \sqrt{7}} \approx 2.94, ...$ Vemos que los términos se van acercando al 3. En vez de demostrar que el límite es 3 (que es algo más complicado), demostraremos que la sucesión es monótona y acotada.

Demostración. Vamos a demostrar por inducción que todos los términos son menores de 3. Efectivamente, $x_1 < 3$, ahora $x_n < 3 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$, así que la sucesión está acotada.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x^2}{\sqrt{x_n + 6} + x} = \frac{(3 - x)(x + 2)}{\sqrt{x_n + 6} + x} > 0$$

para $0 < x_n < 3$. La sucesión es también estrictamente creciente, por lo que tiene un límite.

$\square$

Problema 8. Demuestra que la serie $s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$, $s_1 = 1$ converge

Problema 9. Demuestra que la sucesión $s_0 = \pi/2$, $s_{n+1} = \sin s_n$ tiene límite.

Otro teorema que nos puede resultar muy útil en el folklore matemático lleva un divertido título:

Teorema 3 (Teorema de dos policías)**.** *Si existen dos sucesiones a_n, b_n tales que $a_n \leqslant s_n \leqslant b_n$ y, además, $\lim b_n = \lim a_n = A$, entonces $\lim s_n = A$.*

Confiemos en que podrás demostrarlo, sólo tienes que elegir unos ϵ adecuados para las sucesiones a_n, b_n.

Ejemplo resuelto. Demuestra que la sucesión

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

tiene límite y búscalo.

Solución. Notemos que entre las n fracciones la primera es la mayor y la última, la menor. Para evitar trabajar con radicales, consideremos dos sucesiones auxiliares: la suma de n primeras fracciones y la de n últimas:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}, b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Claramente, $a_n < x_n < b_n$. Para hallar el límite de a_n notemos que

$$a'_n = \frac{n}{n + 1} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

Ya sabemos que el límite de a'_n es 1. Por tanto, el de a_n, también. Análogamente, $\lim b_n = 1$. Entonces, $\lim x_n = 1$ - ¡después de aplicar el teorema de dos policías tres veces! $\square$

Apéndice teórico

En esta sección indicaremos cómo se demuestran algunos teoremas mencionados en el preámbulo.

No es necesario discutir esta parte en clase si no se ha revisado previamente en casa.

Los teoremas sobre la convergencia de sucesiones se basan en las propiedades de los números reales y en cómo los definimos. El concepto principal es la noción de una sucesión de Cauchy en los números racionales.

Definición 7. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales. Decimos que es de **Cauchy** si la diferencia $|a_n - a_m|$ es muy pequeña para n y m grandes. Formalmente, $\{a_n\}$ es de **Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - a_m| \leqslant \epsilon$ para todos $n, m > N$.

Ahora podemos considerar el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy $\mathcal{SC}$.

Decimos que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **equivalentes** si para grandes n, $|a_n - b_n|$ es pequeño. Es decir, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **equivalentes** si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|a_n - b_n| \leqslant \epsilon$ para todos $n > N$. Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ son equivalentes.

La clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy consiste en todas las sucesiones de Cauchy que son equivalentes a ella. Esto nos permite ver a $\mathcal{SC}$ como la unión disjunta de las clases de equivalencia. Los números reales $\mathbb{R}$ los entendemos como el conjunto de las clases de equivalencia.

Intuitivamente, puedes pensar que los números reales son límites de las sucesiones de Cauchy. Por ejemplo, no existe $\sqrt{2}$ entre los números racionales. Definamos t_n como el mayor número natural tal que $t_n^2 < 2n^2$ y pongamos $a_n = \frac{t_n}{n}$. Entonces, $\{a_n\}$ representa el número $\sqrt{2}$.

Ahora, no es difícil extender la suma y el producto a los números reales usando nuestra definición. Tampoco es difícil extender el orden que conocemos en los números racionales a los reales. También podemos hablar de sucesiones de Cauchy en los reales (esto requiere más trabajo) y la propiedad principal nueva que conseguimos es que las sucesiones de Cauchy en números reales siempre tienen un límite. A partir de este resultado, podemos ver cómo se demuestra alguno de los teoremas mencionados anteriormente. Por ejemplo, para probar el Teorema 2, se debe demostrar que una sucesión monótona y acotada es una sucesión de Cauchy.

Problema 10. Demuestra que cualquier sucesión acotada s_n tiene al menos un punto de acumulación.

Problemas

Problema 11. Busca la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2n + 1, s_1 = 1$. Demuéstralo.

Problema 12. Isabel quiere aprovisionarse para una sesión larga de cine. En la tienda venden bolsas de palomitas por 2€, gusanitos por 1€ y chuches también por 2€. Isabel quiere gastar 11€ y va a hacer una lista con todas las combinaciones posibles... ¿cuántas son?

Problema 13. Una sucesión de números que comienza con un número real positivo tiene la propiedad de que el número en el puesto $n + 1$ es la longitud del perímetro del cuadrado cuya área es el número en el puesto n para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por ejemplo, si la secuencia empieza por 1, los primeros términos de la secuencia serían $1, 4, 8, 8\sqrt{2}, \ldots$

Si sabemos que los tres primeros términos están en progresión aritmética, ¿cuáles son los valores posibles para el primer término?

Problema 14. Considera la sucesión armónica $a_n = 1/n$. ¿Es verdad que para cualquier m tiene una subsucesión de m números que sea una progresión aritmética?

Problema 15. Todas las mañanas Julia baja la escalera de su portal. La escalera tiene 10 peldaños, y Julia baja de uno en uno o de dos en dos. Procura inventar una nueva manera de bajar la escalera cada día. ¿Cuántos días puede variar las maneras de bajar la escalera sin repetir ninguna?

Problema 16. Una canica se desplaza por una superficie rugosa. En el primer segundo recorre 10 cm; luego su velocidad disminuye recorriendo en cada segundo $2/3$ de la distancia recorrida en el segundo anterior. ¿A qué distancia se parará la canica?

Problema 17. Consideremos la sucesión a_n definida por la siguiente relación de recurrencia: si a_n es par, $a_{n+1} = a_n/2$, si es impar, $a_{n+1} = a_n^2 - 5$. Se sabe que a_1 es impar mayor que 5. Demuestra que esta sucesión no está acotada por arriba.

Problema 18. Demuestra que la serie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ a_n = \frac{n}{2^n}$$

está acotada.

Problema 19. Demuestra que la serie $a_{n+1} = a_n + 1/a_n, a_1 = 1$ no está acotada.

Problema 20. Fijemos un conjunto de números $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$. Ahora vamos a construir la siguiente sucesión:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{k} n_k, a_2 = \sum_{i=1}^{k} n_k^2, a_3 = \sum_{i=1}^{k} n_k^3, ..., a_m = \sum_{i=1}^{k} n_k^m$$

1. ¿Es posible que esta sucesión disminuya hasta a_5 y crezca a partir de a_5?
2. ¿Es posible que esta sucesión crezca hasta a_5 y luego disminuya a partir de a_5?

Problema 21. Inventa una sucesión de números naturales x_i tal que cualquier sucesión de números naturales sea su subsucesión.

Problema 22. Considera el trapecio $ABCD$ con las bases $a = AB$ y $b = CD$. Tracemos el segmento A_1B_1 que une los puntos medios de las diagonales. Se ha formado un nuevo trapecio ABB_1A_1 o CDB_1A_1. En este nuevo trapecio de nuevo uniremos los puntos medios de las diagonales A_2B_2, y así hasta el infinito. Considera la sucesión $s_n = A_nB_n$, ¿es monótona? ¿Está acotada? ¿Tiene límite?

Problema 23. ¿Existe una sucesión estrictamente creciente de naturales a_n que cumpla que $a_{nm} = a_n + a_m$ para todos n y m?

Problema 24. Demuestra que

$$\forall x > 0, x \neq 1 \ (n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$$

Problema 25. Demuestra que la sucesión de Euler

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es estrictamente creciente. Puedes usar la desigualdad $(n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$

Problema 26. Demuestra que la serie

$$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

es estrictamente creciente. Puedes usar la desigualdad $(n+1)x^n < nx^{n+1} + 1$

Problema 27. Demuestra que la serie

$$c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

es estrictamente decreciente.

Problema 28. Demuestra que la serie de Euler

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

tiene límite. Este límite en honor a Euler se llama e.

Problema 29. Un empresario promete pagar a su trabajador un promedio de $\sqrt{2}$ pesetas por día. Para ello, cada día le paga 1 o 2 pesetas de tal manera que, para cualquier número natural n, la cantidad pagada en los primeros n días sea un número natural lo más cercano posible a $n \cdot \sqrt{2}$. Aquí están los valores de los primeros cinco pagos: 1, 2, 1, 2, 1. Demostrar que la secuencia de pagos no es periódica.

Problema 30. Sea $M = \{x_1, \dots, x_{30}\}$ un conjunto que consiste en 30 números positivos distintos, y sea A_n (para $1 \leq n \leq 30$) la suma de todos los productos posibles de n elementos distintos del conjunto M. Demostrar que si $A_{15} > A_{10}$, entonces $A_1 > 1$.

Problema 31. Dado un triángulo $\triangle C_1C_2O$, trazamos la bisectriz C_2C_3, luego en el triángulo $\triangle C_2C_3O$ se traza la bisectriz C_3C_4, y así sucesivamente. Demostrar que la secuencia de los ángulos $\gamma_n = \angle C_{n+1}C_nO$ tiende a un límite, y encontrar dicho límite si $\angle C_1OC_2 = \alpha$.

Problema 32. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una secuencia creciente de números naturales. Se sabe que $a_{a_k} = 3k$ para cualquier k. Encontrar:

a) a_{100}

b) a_{2025}

Problema 33. Sea $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (donde $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el conjunto de los números enteros no negativos) una función estrictamente creciente, que satisface la relación $f(n+f(m)) = f(n)+m+1$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Encontrar todos los valores que puede tomar $f(2024)$.

Problema 34. Tenemos 10 pesas que pesan $1, 2, 4, 8, ..., 512$ gramos, es decir, potencias de dos con exponentes de 0 a 9. Está permitido pesar colocando pesas en ambos platillos de la balanza. Algunas cantidades se pueden pesar de varias maneras, por ejemplo, si $x = 9$,

$$x + 1 = 2 + 8, x = 8 + 1$$

¿Cuál es el máximo de las maneras de pesar un determinado peso?

Problema 35. Dos personas están jugando a un juego. Uno concibe un número natural n, y el otro hace preguntas como ¿es cierto que n es menor que x? (puede elegir cualquier número x) y recibe respuestas "sí" o "no". A cada posible estrategia T del segundo jugador, le asignamos una función $f_T(n)$ igual al número de preguntas (antes de adivinar), si se concibió el número n. Supongamos, por ejemplo, que la estrategia T consiste en hacer primero las preguntas: ¿Es cierto que n es menor que 10?, ¿Es cierto que n es menor que 20?, ... hasta que en algún momento la pregunta ¿es cierto que n es menor que $10(k+1)$? no se responderá "no", y luego se preguntará ¿es cierto que n es menor que $10k+1$?, ¿es cierto que n es menor que $10k+2$ y así sucesivamente. Entonces $f_T(n) = a + 2 + \frac{n-a}{10}$, donde a es el último dígito de n, entonces $f_T(n)$ crece como $\frac{n}{10}$.

a) Sugiere una estrategia para la cual la función f_T crezca más lentamente.

b) Dada una estrategia T, también vamos a introducir la función $\tilde{f}_T$ cuyo valor $\tilde{f}_T(n)$ es igual al mayor de los números $f_T(k)$, donde k va de 1 a n. Esta función es más conveniente si queremos comparar dos estrategias diferentes. Estima $\tilde{f}_T$ desde abajo (es decir, encuentra una función g tal que $\tilde{f}_T(n) \geq g(n)$ para cualquier n y para una estrategia arbitraria T).

Problema 36. Tenemos la sucesión dada por $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}$. Demuestra que todos los términos son enteros.

Problema 37. Tenemos $s_0 =$ 🐔. Para conseguir s_{i+1}, reemplazamos cada 🐔 por 🐔🐔🥚 y cada 🥚 por 🐔. Es decir,

🐔, 🐔🐔🥚, 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔, ...

Combinamos toda la sucesión en una ristra larga:

🐔🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 ...

1. ¿Cuál es el elemento 2024?

2. ¿En qué posición está el huevo nº 2024?

3. ¿En algún momento se vuelve periódica?

Problemas para hacer en casa

11 de octubre

Problema 38. El primer término de la sucesión es 934. Cada siguiente término es 13 multiplicado por la suma de las cifras del número anterior. Busca el término número 2025.

Problema 39. La sucesión $a_n \in \mathbb{N}$ tiene la siguiente propiedad: para cualquier n la ecuación $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ tiene al menos una solución real.

1. ¿Existe una serie de 10 términos con esta propiedad?

2. ¿Una serie infinita?

Problema 40. Tenemos la sucesión dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Demuestra que para todo k, $2^k | a_n$ si y sólo si $2^k | n$.

18 de octubre

Problema 41. Demuestra que la serie

$$a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

está acotada.

Problema 42. Demuestra que la sucesión

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...\sqrt{2}}}}}_{n \text{ veces}}$$

está acotada.

Problema 43. Considera la sucesión S_n cuyo enésimo elemento es la primera cifra de 2^n, es decir, la sucesión comienza así:

$$2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ...$$

Por otro lado, considera la sucesión R_n cuyos elementos son las primeras cifras de las potencias de 5:

$$5, 2, 1, 6, 3, ...$$

Elegimos k términos consecutivos de la sucesión S_n de forma aleatoria y los escribimos en orden inverso obteniendo números $T_1, T_2, ..., T_k$. Demuestra que la sucesión R_n contiene la subsucesión T_k.

25 de octubre

Problema 44. Un número infinito de gigantes, cada uno de estatura distinta, ha formado una fila delante de la mesa del jurado. Demuestra que el jurado puede expulsar cierto número (quizás infinito) de gigantes de tal manera que los restantes sean infinitos y estén ordenados de mayor a menor o de menor a mayor.

Problema 45. Los números $1, 2, 3, ..., 100, 101$ están desordenados y escritos en fila. Demuestra que se pueden tachar 90 números de manera que los números restantes formen una sucesión monótona.

Problema 46. Una sucesión de números naturales a_n se construye de la siguiente manera: a_0 es algún número natural; $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$, si a_n es divisible por 5; $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{5}a_n \rfloor$, si a_n no es divisible por 5. Demostrar que a partir de algún término, la secuencia a_n es creciente.

8 de noviembre

Problema 47. ¿Existe el límite de la sucesión $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$?

Problema 48. Pensamos en todas las sucesiones de números reales **positivos** que cumplen que $a_0 = 1$ y $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. ¿Cuántas sucesiones distintas hay?

Problema 49. En el paso 1 tenemos 1. En cada paso, cada vez que en el paso anterior encontramos n, escribimos $123 \cdots n$, y al final añadimos el número del paso. Es decir, esta lista:

$$1, 12, 1123, 11121234, 1111211212312345, \ldots$$

Demuestra que en el paso n hay 2^{n-1} números. Demuestra que en el paso $n > 1$, la posición m tiene un 1 si y sólo si la posición $2^{n-1} - i + 1$ no tiene un 1.