PIM

Pequeño Instituto de Matemáticas 2024-25

Fechas: 11, 18, 25 de octubre y 8 de noviembre de 2024
Sucesiones I
Genérica

Tus padres probablemente marcaban tu estatura en una pared. Y con toda seguridad tu médico de cabecera la apuntaba en tu ficha durante las revisiones anuales. Esta serie de números forma una **sucesión**, que en tu caso podría ser así:

$$e_1 = 50, e_2 = 75, e_3 = 87, e_4 = 95, e_5 = 103, ...$$

El subíndice aquí indica tu edad en años.

¿Qué podemos decir los matemáticos de esta sucesión? Primero, que va creciendo. Me vas a decir que es natural, porque ¡es lo que suelen hacer los niños! Pero un matemático puede sacar de allí conclusiones importantes, por ejemplo, que tu estatura a los dos años y medio era mayor que 87 cm pero menor que 95 cm, o que en algún momento entre los 3 y los 4 años medías exactamente un metro. Los principios que acabamos de usar son la monotonía y la continuidad: la monotonía garantiza que no decrezcamos en ningún momento y la continuidad, que nuestra estatura vaya pasando por todos los valores intermedios, que sea imposible medir 99 cm y en el momento siguiente 101 cm. Quizás estos principios te parezcan evidentes, pero son el fundamento del análisis matemático.

Pero volvamos a las sucesiones. Cada vez que decidimos empezar a apuntar ciertos datos nace una sucesión. La cotización diaria del Bitcoin nos genera una, y la temperatura del Atlántico, otra. Ambas series son finitas porque el tiempo de observación es finito. Las sucesiones matemáticas son infinitas: podemos encontrar cualquier elemento, o término, de cualquier sucesión aplicando determinadas reglas.

Ahora bien, ¿cómo podemos definir una sucesión? Piensa bien antes de leer la definición. Es infinita por la derecha. Tiene orden. Cada término de la serie tiene su "número"...

Una **sucesión**, o serie, es una regla que a cada número natural le asigna un número. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & \cdots & 3n+7 & \cdots \end{array}$$

Observa que escribir la regla como $3n + 7$ ocupa mucho menos papel que escribir infinitos números naturales. Muchas veces elegimos una letra para representar la sucesión, por ejemplo, s, y llamamos a los términos $s_1, s_2, \ldots$. En este ejemplo, podemos decir que $s_1 = 10, s_3 = 16$ y $s_n = 3n + 7$. O, lo que es lo mismo, $s_m = 3m + 7$, o también $s_{🐵} = 3🐵 + 7$.

Problema 1. Encuentra una fórmula que describa cada una de estas sucesiones:

a) p_n es el n-ésimo número par.

b) i_n es el n-ésimo número impar.

c) q_n es el n-ésimo cuadrado perfecto.

d) f_n es el resultado de tomar n, restar 1, multiplicar por 2 y sumar 3.

e) d_n es la sucesión que empieza por 2 y cada término es el doble del anterior.

Hace casi dos siglos, en 1859, unos colonos llevaron a Australia 24 conejos. Estos animales se reproducen muy rápido: al mes de nacer ya son fértiles y a los dos meses pueden tener crías. El problema es que en Australia, donde no tienen depredadores que los cacen, su población se expandió tanto que ya a principios del siglo XX había ¡¡¡más de 10.000.000.000 ejemplares!!!

¡¿Cómo es posible?! A principios del siglo XIII Leonardo de Pisa (aka Fibonacci) estudió el siguiente problema: supongamos que cada pareja de conejos fértiles da a luz exactamente otra pareja de críos cada mes a partir de segundo mes desde su nacimiento.

Problema 2. Si al inicio del año hay una pareja de conejos recién nacidos, calcula cuántas habrá después de 12 meses. ¿Y 24?

En el siguiente dibujo se puede ver que la población de conejos sigue un patrón claro: A partir del segundo mes, en cada mes hay tantos conejos como había el mes anterior (siguen vivos) más las crías nuevas, que son tantas como conejos había hace dos meses (porque el mes anterior se han reproducido todas las parejas que son fértiles, es decir, las que tienen al menos dos meses):

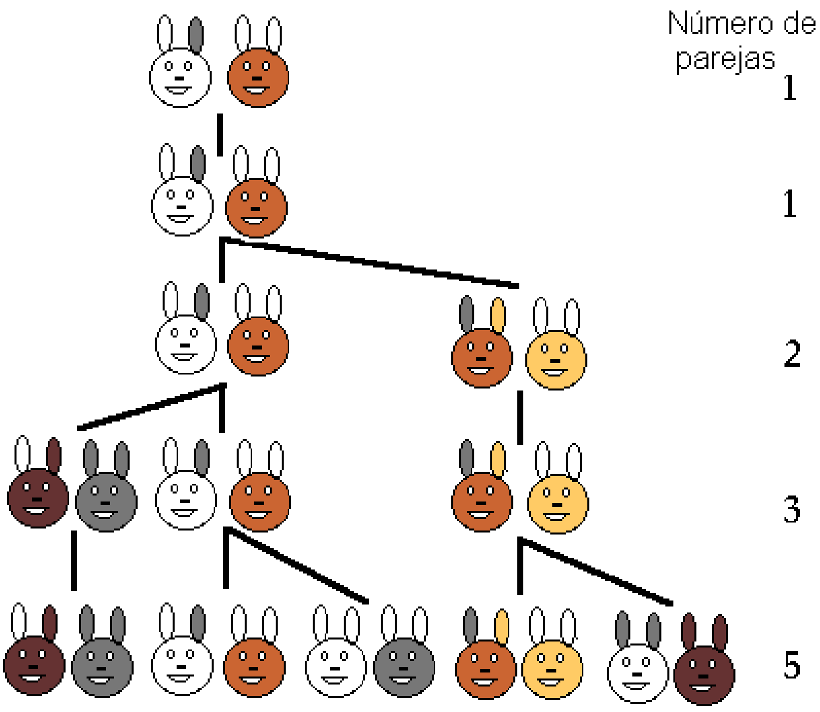


Figure 1: Población de conejos

Ejemplo resuelto. Si llamamos F_n al número de parejas que hay después de n meses, comprueba que en efecto $F_2 = F_1 + F_0, F_3 = F_2 + F_1, F_4 = F_3 + F_2, \ldots$. Convéncete de que $F_{1000} = F_{999} + F_{998}$. Convéncete de que para cualquier n, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Solución. Observa que si hablamos del mes n-ésimo, el mes anterior es $n-1$, y el anterior a éste es $n-2$. El número de *nuevas* parejas en el mes n es el mismo que el número de parejas que había en el mes $n-2$, porque éstas son las que en el mes $n-1$ son adultas.

$$\underbrace{F_n}_{\text{Parejas ahora}} = \underbrace{F_{n-1}}_{\text{Parejas que ya estaban el mes pasado}} + \underbrace{F_{n-2}}_{\text{Nuevas parejas}}.$$

□

De esta manera, la sucesión de Fibonacci - una de las más famosas de la historia de la humanidad[1] - es definida por la relación $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$. Parece que crece lentamente, pero ya al cabo de un año serían 233, y al cabo de dos, ¡75025!

Hay varias maneras de definir una sucesión. La primera consiste en presentar una regla que la define como en el Problema **??**, o, como decimos a veces, hallar una **forma cerrada**. La segunda es expresar el siguiente término de la sucesión a través del anterior (o de los anteriores), como ocurre en el caso de Fibonacci.

Una **recurrencia**, o relación de recurrencia, es una ecuación que relaciona un término de una sucesión con otros anteriores.

Para definir bien una sucesión no es suficiente con definir una relación de recurrencia. Hay que establecer determinadas **condiciones iniciales**: los valores de los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo. La relación de recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2$ si fijamos $s_1 = 1$ nos crea la sucesión de impares $1, 3, 5, 7, ...$ pero si fijamos $s_1 = 0$ nos genera los números pares.

Ejemplo. $s_{n+1} = 2s_n + 1$ nos define una relación de recurrencia. Tomando el valor inicial $s_1 = 3$ obtenemos

$$s_2 = s_{1+1} = 2s_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$s_3 = s_{2+1} = 2s_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

y así sucesivamente.

Problema 3. ¿De cuántas formas se puede escribir un entero mayor o igual que 2 como suma ordenada de doses y treses? Por ejemplo, 9 se puede escribir como $2+2+2+3$, $2+2+3+2$, $2+3+2+2$, $3+2+2+2$ y $3+3+3$.

Sabiendo la forma cerrada que define una sucesión podemos fácilmente desarrollar una relación de recurrencia:

Ejemplo resuelto. ¿Qué relación de recurrencia corresponde a $s_n = n^3$?

Solución.

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Por tanto,

$$s_{n+1} = s_n + 3n^2 + 3n + 1$$

nos proporciona una recurrencia que define la sucesión si fijamos $s_1 = 1$.

Sin embargo, no es la única. Observemos que

$$(s_{n+2} - s_{n+1}) - (s_{n+1} - s_n) = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6,$$

y por lo tanto la recurrencia

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - s_n + 6n + 2$$

nos define la misma sucesión si fijamos $s_1 = 1$ y $s_2 = 8$. □

Problema 4. Encuentra otra relación de recurrencia para la sucesión $s_n = n^3$.

Al revés, es decir, pasar de una relación de recurrencia a una forma cerrada no siempre es fácil. Pero en la mayoría de los casos es vital. Supongamos que necesitamos hallar el centésimo término de una sucesión... ¿realmente habrá que calcular primero los 99 términos anteriores? ¿No hay otra manera más directa?

[1] Se descubrió 1000 años antes en India, pero eso no nos impide barrer para casa y decir que le pertenece a Fibonacci.

Ejemplo resuelto. ¿Cuál es la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 2s_n + 1, s_1 = 3$?

Si analizamos los primeros términos, son

$$s_1 = 3, s_2 = 7, s_3 = 15, s_4 = 31, s_5 = 63, ...$$

Podemos ver que son potencias de dos menos 1, o sea

$$s_n = 2^{n+1} - 1$$

Ahora hallar el centésimo término está cantado, es $2^{101} - 1$

Problema 5. Busca la función que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 3s_n, s_1 = 2$. Escribe con una expresión matemática (sin calcular) el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo.

Ejemplo resuelto. ¿Cómo siguen las siguientes series? Escribe un número más y encuentra su relación de recurrencia y, si puedes, su forma cerrada.

(a) $2, 8, 18, 32, 50$

(b) $2, 3, 7, 13, 27$

(c) $40, 40, 20, 60, 15, 75$

(d) $1, 11, 21, 1211, 111221, 312211$

(d) $335, 24, 12, 4, 6$

Solución. (a) Hay dos formas de determinar el siguiente número. La primera es directa, el doble del cuadrado, es decir, $a_n = 2n^2$. La segunda es recursiva: $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$. El siguiente número es el 72.

(b) Hay dos formas de determinar el siguiente número. La primera es: el doble del anterior menos uno, luego el doble del anterior más uno, y así en ciclo:

$$s_{2k+1} = 2s_{2k} + 1, s_{2k} = 2s_{2k-1} - 1$$

La segunda es el doble del penúltimo más el último:

$$s_{k+1} = 2s_{k-1} + s_k$$

El siguiente número es el 53.

(c) Cada número se obtiene multiplicando o dividiento el anterior por su posición, según estemos calculando el número en posición par o impar, respectivamente. Es decir:

$$s_{2n} = (2n-1)s_{2n-1}, \quad s_{2n+1} = s_{2n}/(2n),$$

con $s_1 = 40$. Teniendo esto en cuente:

$$s_{2n} = 40\frac{(2n-1)!}{(2n-2)!}, \quad s_{2n+1} = 40\frac{(2n-1)!}{(2n)!}.$$

El siguiente número es $75/6 = 25/2$.

(d) Cada término consiste en leer en voz alta el término anterior. Leemos 1 como "un 1", es decir, 11. Leemos 11 como "dos 1s", es decir, 21, y 312211 es "un 3, un 1, dos 2s, dos 1s", es decir, el siguiente término es 13112221.

(e) Cada número es la cantidad de letras que tiene el número anterior. El 6 tiene 4 letras, por lo que el siguiente término es 4 y la serie entra en bucle. Podemos escribir $s_{n+1} = \text{n}^{\text{o}}$ de letras de s_n, con $s_1 = 335$.

$\square$

En algunas de las sucesiones anteriores, hemos "adivinado" la forma cerrada. A continuación vamos a ver dos tipos de sucesiones donde la podemos encontrar fácilmente. No obstante, hay que destacar que existen sucesiones matemáticas bien definidas que, sin embargo, se resisten a las formalizaciones. Por ejemplo, la sucesión de números primos. No existe ninguna forma directa de calcular, pongamos, el milésimo número primo, ni tampoco una relación de recurrencia.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es constante, dicha cantidad llamada "diferencia de la progresión", "diferencia" o incluso "distancia".

Por ejemplo, la sucesión $3, 5, 7, 9, \ldots$ es una progresión aritmética de diferencia constante 2, así como $5, 2, -1, -4, \ldots$ es una progresión aritmética de diferencia constante -3.

Problema 6. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = 3$.

Problema 7. Si a_n es la progresión aritmética de diferencia d, entonces

$$a_n = d \cdot (n-1) + a_1.$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante no nula denominada "razón" o "factor" de la progresión.

Problema 8. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $a_{n+1} = 3s_n, a_1 = 2$. Escribe con una expresión matemática (sin calcular) el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo.

Problema 9. Si a_n es la progresión geométrica de razón d, entonces

$$a_n = a_1 \cdot d^{n-1}$$

Problema 10. Obtén la forma cerrada de la sucesión dada por la suma de los primeros n números naturales.

Problema 11. ¿Cuál es la forma cerrada de la sucesión $s_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$?
¿Y de $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$?

Problema 12. Una tortuga recorre cada día medio metro más que el día anterior. Si hoy comienza recorriendo 2 metros, ¿qué día llegará a estar a 100 metros del origen?

Otra tortuga, recorre cada día la mitad de la distancia del día anterior. Si hoy comienza recorriendo 3 metros, ¿qué día llegará a estar a 5,5 metros del origen? ¿Y si hoy recorre 2 metros y cada día dobla la distancia recorrida? ¿Y los 100 metros?

Problema 13. Obtén la forma cerrada de la sucesión dada por la suma de los primeros n términos de

(a) una progresión aritmética de diferencia d,

(b) una progresión geométrica de razón d.

El método de las diferencias

Problema 14. Continúa las siguientes series. Claramente van de fácil a difícil:

a) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

b) $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

c) $3, 5, 8, 12, 17, \ldots$

d) $4, 7, 12, 20, 32, \ldots$

e) $2, 6, 13, 25, 45, \ldots$

f) $0, 2, 8, 21, 46, \ldots$

Si lo has resuelto, te habrás dado cuenta de que en el problema anterior, la diferencia entre los términos consecutivos de una sucesión es la sucesión anterior. Esto es útil: nos puede servir para encontrar una fórmula para cada sucesión de las de arriba:

a) 1

b) $n + 1$

c) $\dfrac{n^2 + n + 4}{2}$

d) $\dfrac{n^3 + 11n + 12}{6}$

e) $\dfrac{n^4 - 2n^3 + 23n^2 + 26n}{24}$

f) $\dfrac{n^5 - 5n^4 + 45n^3 + 5n^2 - 46n}{120}$

La **sucesión de diferencias** d_n de la sucesión s_n se define como

$$d_n = s_{n+1} - s_n$$

Ejemplo. La sucesión de diferencias de $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ es $1, 1, 1, 1, \ldots$. La sucesión de diferencias de $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ es $1, 3, 5, 7, \ldots$

Podemos definir la **segunda sucesión de diferencias**, que es la sucesión de diferencias de la sucesión de diferencias, la tercera, etc.

Ejemplo. La segunda sucesión de diferencias de $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ es $2, 2, 2, 2, \ldots$, y la tercera sucesión de diferencias es $0, 0, 0, 0, ...$

Ahora bien, la sucesión de diferencias nos puede dar una idea acerca del comportamiento de la serie original.

Problema 15. Escribe la forma cerrada de una sucesión cuya primera sucesión de diferencias es constante. ¿Y si es la segunda sucesión de diferencias la que es constante?

Teorema 1. *Si la primera sucesión de diferencias es constante, la serie original es lineal, es decir,* $s_n = an + b$.

Si la segunda sucesión de diferencias es constante, la serie original es un polinomio de grado dos de n*, es decir,* $s_n = an^2 + bn + c$.

Si la tercera sucesión de diferencias es constante, la serie original es un polinomio de grado 3, es decir, $s_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Generalizando, si la enésima sucesión de diferencias es constante, la serie es polinómica de grado n.

Para expresar el enésimo término de la serie podemos recurrir al **método de coeficientes indeterminados**, que consiste en introducir tantas incógnitas cuantos coeficientes tiene el polinomio que buscamos e ir dándole valores enteros $0, 1, 2, 3, ...$ hasta tener suficiente cantidad de ecuaciones y poder resolver el sistema.

Ejemplo resuelto. Consideremos la siguiente serie: $0, 2, 9, 21, 38, ...$ ¿Cuál es el centésimo término?

Solución. La primera sucesión de diferencias es $d_n = 2, 7, 12, 17, ...$ y la segunda, $d'_n = 5, 5, 5, ...$ Como es constante, podemos expresar la serie como polinomio de grado 2 $s_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} s_0 = 0 = c \\ s_1 = 2 = a + b + c \\ s_2 = 9 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tenemos $a = 2.5, b = -0.5$, por lo que $s_n = (5n^2 - n)/2$ y el centésimo término es $(50000 - 100)/2$. $\square$

Problema 16. ¿Qué sucesión de diferencias coincide consigo misma?

Problema 17. Si la segunda sucesión de diferencias ha coincidido con la orignal, ¿cuál es la sucesión?

Problema 18. Escribe una lista de sucesiones: Escribe la sucesión $1, 1, 1, 1, \ldots$. Después de cada sucesión, escribe la sucesión que empieza por 1 y que tiene a la anterior como sucesión de diferencias (la siguiente sería $1, 2, 3, 4, \ldots$, y la siguiente $1, 3, 6, \ldots$). Escribe estas sucesiones en forma de un triángulo famoso.

Problema 19. Encuentra una fórmula para una sucesión que tenga como sucesión de diferencias a estas ($\binom{n^2-n}{3+n}$ es una fórmula, ¿no?):

a) $d(a_n) = 1$

b) $d(b_n) = n$

c) $d(c_n) = \binom{n}{2}$

d) $d(d_n) = \binom{n}{3}$

e) $d(e_n) = \binom{n}{4}$

f) $d(f_n) = \binom{n}{m}$

Problema 20. Encuentra una fórmula para la suma de los cubos de los n primeros números naturales. Pista: su cuarta sucesión de diferencias es $6, 6, 6, \ldots$.

Problemas

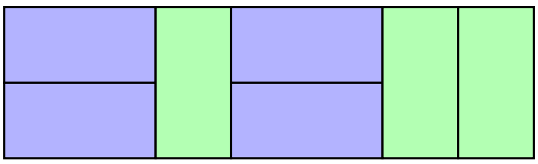
Problema 21. Trece pollitos estaban picoteando granos de trigo. El primero ha comido 60 granos, el segundo, 40, y cada siguiente pollito ha comido la media de los anteriores. ¿Cuántos granos ha comido el último?

Problema 22. Consideremos la sucesión dada por $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Demuestra que $a_n = f_n + f_{n-2}$ para $n \geq 2$, donde f_n representa la sucesión de Fibonacci.

Problema 23. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = s_n + 2n + 1, s_1 = 1$. Demuéstralo.

Problema 24. Busca el vigésimo término de la serie $-2, -4, 0, -8, 2, 28$...

Problema 25. Tenemos un pasillo de 2×7 metros cuadrados que queremos cubrir con baldosas de 1×2. Podemos colocar las baldosas en horizontal o en vertical, como en el dibujo:



¿Cuántas maneras de cubrir el pasillo hay?

Problema 26. Tenemos una sucesión infinita de números enteros positivos $s_1, s_2, s_3, \ldots$ que satisfacen que $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ para todo entero positivo n. Demuestra que existe un entero r tal que $s_n - r$ no es divisible por 8 para ningún $n \geq 1$.

Problema 27. Se considera la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. ¿Existe una progresión aritmética

a) de longitud 5;

b) de longitud arbitrariamente grande,

compuesta por términos de esta secuencia?.

Problema 28. Una sucesión de números que comienza con un número real positivo tiene la propiedad de que el número en el puesto $n + 1$ es la longitud del perímetro del cuadrado cuya área es el número en el puesto n para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por ejemplo, si la secuencia empieza por 1, los primeros términos de la secuencia serían $1, 4, 8, 8\sqrt{2}, \ldots$

Si sabemos que los tres primeros términos están en progresión aritmética, ¿cuáles son los valores posibles para el primer término?

Problema 29. Isabel quiere aprovisionarse para una sesión larga de cine. En la tienda venden bolsas de palomitas por 2€, gusanitos por 1€ y chuches también por 2€. Isabel quiere gastar 11€ y va a hacer una lista con todas las combinaciones posibles... ¿cuántas son?

Problema 30. Consideramos las sucesiones $a_1, \dots, a_k$ que se forman a partir de k números naturales a_k (k es un número arbitrario positivo) y en las que para todo $1 \leq i \leq k-1$ se cumple que $a_{i+1} > a_i^2$. Demuestra que hay menos de 2022 sucesiones de este tipo en las que el último término es igual a 2022.

Por ejemplo, todas las sucesiones de este tipo que terminan en 5 son:

$$1, 2, 5; \quad 2, 5; \quad 1, 5; \quad 5.$$

Problema 31. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n,$$

para todo $n \geq 1$. Probar que a_n es un cuadrado perfecto para todo $n \geq 0$.

Problema 32. Una sucesión de números naturales a_n se construye de la siguiente manera: a_0 es algún número natural; $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$, si a_n es divisible por 5; $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor$, si a_n no es divisible por 5. Demostrar que a partir de algún término, la secuencia a_n es creciente, es decir, $a_{n+1} > a_n$ a partir de algún momento.

Problema 33. Un empresario promete pagar a su trabajador un promedio de $\sqrt{x}$ euros por día. Para ello, cada día le paga 1 o 2 euros de tal manera que, para cualquier número natural n, la cantidad pagada en los primeros n días sea un número natural lo más cercano posible a $n \cdot \sqrt{x}$. Aquí están los valores de los primeros cinco pagos: 1, 2, 1, 2, 1. Demostrar que la secuencia de pagos no es periódica.

Problema 34. Sea $M = \{x_1, \dots, x_{30}\}$ un conjunto que consiste en 30 números positivos distintos, y sea A_n (para $1 \leq n \leq 30$) la suma de todos los productos posibles de n elementos distintos del conjunto M. Demostrar que si $A_{15} > A_{10}$, entonces $A_1 > 1$.

Problema 35. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una secuencia creciente de números naturales. Se sabe que $a_{a_k} = 3k$ para cualquier k. Encontrar:

a) a_{100}

b) a_{2025}

Problema 36. ¿Existe una sucesión estrictamente creciente de naturales a_n que cumpla que $a_{nm} = a_n + a_m$ para todos n y m?

Problema 37. Tenemos la sucesión dada por $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}$. Demuestra que todos los términos son enteros.

Problema 38. Tenemos $s_0 =$ 🐔. Para conseguir s_{i+1}, reemplazamos cada 🐔 por 🐔🐔🥚 y cada 🥚 por 🐔. Es decir,

🐔, 🐔🐔🥚, 🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔, ...

Combinamos toda la sucesión en una ristra larga:

🐔🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔🐔🥚🐔 ...

1. ¿Cuál es el elemento 2024?
2. ¿En qué posición está el huevo nº 2024?
3. ¿En algún momento se vuelve periódica?

Problemas para hacer en casa

18 de octubre

Problema 39. Todas las mañanas Julia baja la escalera de su portal. La escalera tiene 10 peldaños, y Julia baja de uno en uno o de dos en dos. Procura inventar una nueva manera de bajar la escalera cada día. ¿Cuántos días puede variar las maneras de bajar la escalera sin repetir ninguna?

Problema 40. El primer término de la sucesión es 934. Cada siguiente término es 13 multiplicado por la suma de las cifras del número anterior. Busca el término número 2025.

25 de octubre

Problema 41. Busca la forma cerrada que corresponde a la recurrencia $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}, s_1 = 1, s_2 = 3$. Indica el centésimo número de la sucesión. Demuéstralo. ¿Se puede cambiar las condiciones iniciales para que esta sucesión sea constante?

8 de noviembre

Problema 42. Demuestra que para todo número entero positivo a existe algún término en la sucesión de Fibonacci que es divisible por a.