PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 20 y 27 de septiembre y 4 de octubre de 2024
Principio del extremo
Genérica (Soluciones)

¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que tod@s l@s alumn@s de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, tod@s aprenderéis a hacer demostraciones:

Test de los compañeros del grupo

- Cuando alguien del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestr@s compañer@s para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

Introducción

En muchos problemas conviene buscar un caso extremo, un elemento (número, figura...) que tenga unas características peculiares. Puede ser el número más pequeño, la esquina de una figura, el primer niño de una fila, etc. Este procedimiento se llama el **principio del extremo**.

Como ejemplo, vamos a resolver un problema.

Ejemplo resuelto. Llamemos M a un conjunto de puntos del plano tal que cada punto de M es el punto medio de alguna pareja de puntos de M. Demuestra que este conjunto es infinito.

Solución. Supongamos lo contrario. Introduzcamos entonces un sistema de coordenadas y consideremos el punto que está "más a la derecha", es decir, con la abscisa más grande. Si hay varios puntos así, consideremos el que tenga la ordenada más grande. Las coordenadas de este punto tienen que ser la media de las coordenadas de otros dos, pero eso es imposible. □

Por cierto, en el plano el conjunto M no puede ser finito, pero en otra estructura geométrica sí. ¿En cuál?

Problema 1. Supongamos que en el cielo hay una cantidad infinita de estrellas. Cada estrella tiene dos parámetros, brillo y tamaño, ambos son números naturales. Cada pareja de estrellas se distingue al menos en un parámetro. Demuestra que hay dos estrellas A, B tal que la estrella B es más brillante y más grande que A.

Solución. Es imposible que haya una cantidad finita de pares distintos de valores de brillo/tamaño , ya que en este caso habría una cantidad finita de estrellas. Entonces, al menos uno de los parámetros toma infinitos valores distintos. Supongamos que es el brillo. En este caso, buscaremos la estrella A que tenga el menor tamaño posible. Como el brillo toma infinitos valores, entre las estrellas de mayor tamaño que A habrá al menos una cuyo brillo supere al de A. □

Para los problemas de geometría plana a menudo es imposible determinar el elemento "extremo" porque no existe ninguna orientación predeterminada. En estos casos resulta muy eficaz el procedimiento de proyectar ortogonalmente el plano a una recta aleatoria.

Ejemplo resuelto. En el plano hay 1000 segmentos. ¿Es posible que los extremos de cada segmento estén dentro de otro segmento?

Solución. Aquí la dificultad radica en que los segmentos tienen distinta orientación. ¡Proyectémoslos a una recta que no sea perpendicular a ninguno de ellos! Como los segmentos son finitos, y las posibles direcciones no, siempre podremos hacerlo. Elijamos un sistema de coordenadas en nuestra recta. Como resultado de la proyección, cada segmento en el plano se ha convertido en un intervalo cerrado $[a_i, b_i]$, donde a_i, b_i corresponden a los extremos de los segmentos. Ahora consideremos el punto más izquierdo, llamémoslo a_k. No puede estar dentro de ninguno de los demás segmentos porque las proyecciones de todos los demás segmentos están a su derecha. □

Problema 2. En el plano hay n polígonos, cada pareja de polígonos tienen al menos un punto en común. Demuestra que existe una recta que tiene al menos un punto en común con cada uno de ellos.

Solución. Consideremos una recta aleatoria r y proyectemos todos los polígonos sobre ella. Elijamos en la recta una dirección izquierda-derecha. Ahora cada polígono está representado por un segmento cerrado $[a_i, b_i]$. De todos los extremos izquierdos a_i elijamos el más derecho, pongamos, a_k. Este punto pertenece a todos los segmentos, $\forall i \; a_k \in [a_i, b_i]$, si no perteneciese al segmento $[a_x, b_x]$ supondría que $b_x < a_k$ por lo que $[a_x, b_x] \cap [a_k, b_k] = \emptyset$ y los polígonos correspondientes no tendrían ningún punto común, lo que contradice el enunciado del problema.

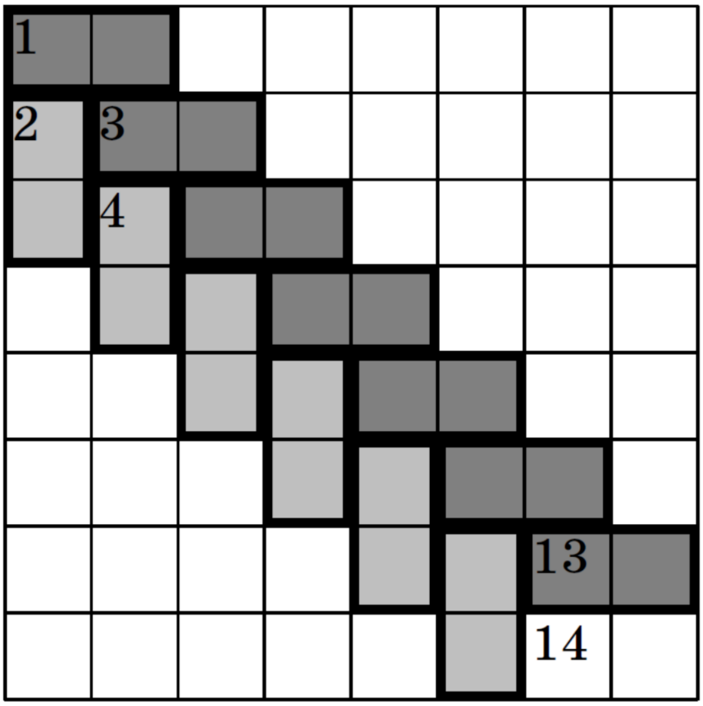
Ahora la recta p perpendicular a r que pasa por el punto a_k tiene un punto común con todos los polígonos y, por tanto, es la que buscábamos. □

El principio del extremo suele funcionar muy bien en los tableros. A veces conviene considerar la fila o la columna que sea "especial" en cierto sentido (la que tenga más huecos, la suma mínima o máxima, etcétera). Otras veces es conveniente considerar las esquinas, como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo resuelto. El tablero de ajedrez está cubierto por dominós 2×1. Demuestra que hay al menos una pareja de dominós que forma el cuadrado 2×2.

Solución. Como ocurre a menudo en las matemáticas, podemos intentar construir un contraejemplo y ver dónde falla. Empecemos a cubrir el tablero desde la esquina superior izquierda y vayamos bajando en diagonal. ¿Qué ocurre?

La esquina superior izquierda puede estar cubierta por un dominó vertical u horizontal. Sin perder la generalidad podemos considerar que es horizontal (si no, lo reflejamos simétricamente respecto a la diagonal principal).



Debajo de la esquina el dominó también puede ir en vertical o en horizontal. Si va en horizontal, ya hemos encontrado el cuadrado 2×2. Si no, se va a formar una nueva esquina superior izquierda. Bajando de esta manera llegaremos al cuadrado 2×2 en la esquina inferior derecha, que sólo puede ser cubierto por dos dominós del mismo tipo, ambos verticales o ambos horizontales (en la Figura son el 13 y el 14). $\square$

Aunque el principio del extremo se usa mucho en la geometría, aparece con frecuencia en problemas numéricos.

Ejemplo resuelto. En cada casilla de una cuadrícula infinita hay un número natural escrito. Resulta que cada número es la media de sus 4 vecinos (arriba, abajo, izquierda, derecha). Demuestra que todos los números son iguales

Solución. Considera el número más pequeño de todos. Tiene que ser la media de sus vecinos, pero si al menos alguno de sus vecinos es mayor, la media será mayor, por lo que sus vecinos tienen que ser todos iguales a él. $\square$

Problema 3. ¿Es posible ordenar los números de 1 a 100 de tal manera que el valor absoluto de la resta de dos vecinos sea mayor o igual a 50?

Solución. Hay 2 números que solamente tienen un posible vecino, el 50 y el 51, por lo que tienen que estar en los extremos. Empecemos nuestra serie por el 50. Su único vecino es el 100. Éste ya tiene muchos posibles vecinos, pero... ¡busquemos entre los números restantes uno que tenga solamente 2, y que el 100 sea uno de ellos! Es el 49. Si no lo colocamos ahora, no tendrá sitio. Repitiendo esta idea vemos que la serie sigue así:

$$50, 100, 49, 99, 48, 98, 47, 97, ..., 2, 52, 1, 51$$

Es la única solución posible (excepto la invertida). $\square$

A menudo el elemento extremo a considerar no es el propio número sino la máxima potencia de un divisor suyo.

Ejemplo resuelto. Busca todas las soluciones en números naturales de la ecuación $3^n = x^2 + y^2$

Solución. Consideremos la máxima potencia de 3 que esté en la descomposición de x, y y simplificaremos la ecuación dividiendo por ella. La parte izquierda no puede ser igual a 1 porque $x^2 + y^2 \geqslant 2$. Ahora la ecuación es idéntica a la anterior, pero al menos una de las incógnitas, x o y no es múltiplo de tres. Esto es posible solamente si $3 \nmid x, 3 \nmid y$, pero en este caso $x^2 \equiv 1\ (mod\ 3), y^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$ y la ecuación no puede tener soluciones en naturales. $\square$

Problema 4. Resuelve en números enteros la ecuación

$$x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$$

Solución. Supongamos que hemos encontrado una solución no nula (x, y, z). Está claro que x^3 es múltiplo de 3, por lo que x también tiene que ser múltiplo de 3, $x = 3x'$. Reescribiendo la ecuación original vemos que

$$9x'^3 - y^3 - 3z^3 = 0$$

Ahora vemos que $y = 3y'$ es múltiplo de 3. Análogamente, vemos que $z = 3z'$ es múltiplo de 3. Entonces para cada solución (x, y, z) existe otra $(x/3, y/3, z/3)$, pero son números enteros, por lo que este proceso debería parar en algún momento. Contradicción. $\square$

Descenso infinito

El descenso infinito es un método de demostración matemático y una modalidad de reducción al absurdo. Consiste en que suponemos que existe un elemento mínimo con determinadas características y luego se construye otro menor todavía que también las cumple, lo que genera una contradicción.

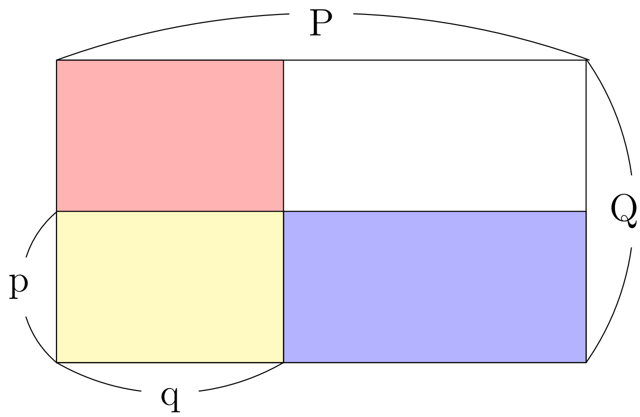
Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que no existen dos números de Fibonacci vecinos múltiplos de 7.

Supongamos que no es así. Entre todos estos números existe la pareja más pequeña, $7|F_k, 7|F_{k+1}$. Pero entonces $7|F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ y la pareja F_{k-1}, F_k es más pequeña que la pareja más pequeña. Contradicción.

Vamos a ver un ejemplo más sofisticado y muy importante. El siguiente resultado se llama el teorema fundamental de Aritmética. Aquí presentamos una de sus muchas demostraciones.

Ejemplo resuelto. Un entero positivo no puede tener dos descomposiciones en números primos distintas.

Demostración. Entre todos los números naturales con dos descomposiciones en primos elegiremos el más pequeño: $n = pP = qQ$, donde $p \nmid Q, q \nmid P$. Consideremos ahora el número $n' = n - pq = p(P - q) = q(Q - p)$.



Es fácil observar que este nuevo número también tiene dos descomposiciones distintas, ya que $p \nmid Q - p, q \nmid P - q$ y es más pequeño que el más pequeño con estas características. Contradicción. □

Problema 5. En una carretera circular se encuentran unas cuantas gasolineras. La cantidad de gasolina de la que disponen en total es algo superior a la necesaria para recorrer toda la carretera, pero ninguna dispone de tanta gasolina. Un coche con depósito infinito vacío quiere repostar y recorrer la carretera entera. ¿Es verdad que siempre podrá hacerlo partiendo de alguna gasolinera?

Solución. Si ninguna gasolinera dispusiera de gasolina suficiente para llegar a la siguiente, el total de gasolina sería menor del necesario para recorrer la carretera entera. Vamos a hacer un truco: si de la gasolinera A podemos llegar a la B, traspasaremos mentalmente toda su gasolina a la A. Para el coche es indiferente, pero la cantidad de gasolineras ha disminuido. Al final nos quedaremos con una gasolinera y una cantidad más que suficiente para recorrer la carretera entera. □

Problemas

Problema 6. Un número natural es un número entero positivo.

a) Se dan seis números naturales. Todos son diferentes y suman 22. Encuentra estos números y prueba que no hay otros.

b) La misma pregunta sobre 100 números que suman 5051.

Solución. Ordenemos los números en orden ascendente. Entonces es obvio que cada número será mayor que el número de su posición.

Encontremos la suma de números de las posiciones de todos los números:

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$;

b) $1 + 2 + ... + 100 = 5050$. (Esta suma se puede calcular de la siguiente manera: $(1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$.)

En ambos casos esta suma es uno menos que la suma de los números mismos. Esto significa que un número es uno más que el número de su posición y los demás son iguales a él. Si algún número es mayor que el número de su posición, entonces todos los números siguientes también tienen que serlo. Por lo tanto, solo el último número puede ser mayor que el número de su posición.

Respuesta:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 7; b) 1, 2, ..., 99, 101. □

Problema 7. Es fácil dividir el cubo $3 \times 3 \times 3$ en 27 cubitos pequeños con 6 cortes planos. ¿Podemos reducir la cantidad de cortes si se permite reordenar los trozos?

Solución. El cubo central tiene 6 caras escondidas. Ningún corte plano afecta a dos caras a la vez, por lo que 6 cortes es el mínimo □

Problema 8. En el torneo mundial de pulso chino (también llamado guerra de pulgares o gallitos), cada pareja de participantes se enfrentó una vez, y no hay empates. Al final del torneo, cada participante tiene una lista que incluye:

1. A los que ha derrotado.

2. A los que han sido derrotados por alguien del punto 1.

Demuestra que alguien tiene en su lista a todos los demás.

Solución. Llamemos Alonso al participante que tiene la lista más larga. Supongamos que otro participante, Sancho, no estuviera en su lista, y veamos que no es posible. Esto significa que Alonso no ha derrotado a Sancho, ni a nadie que haya derrotado a Sancho. En este caso, todos los derrotados por Alonso han sido derrotados por Sancho, y por tanto la lista de Sancho contiene a la de Alonso. Además, contiene al propio Alonso, así que la lista de Sancho es más larga que de la de Alonso. ¡Contradicción!

□

Problema 9. Hay una patata que cumple que cualquier corte plano tiene forma de círculo. Demuestra que la patata es perfectamente redonda.

Solución. Considera los dos puntos de la patata más lejanos, y veamos que es una bola con centro en el punto medio de estos dos. Cualquier rodaja por estos puntos es un círculo, y estos dos puntos tienen que ser su diámetro, o si no, no serían los dos puntos más lejanos. Por tanto, todos los cortes tienen el mismo centro y radio, y tenemos una bola.

□

Problema 10. Demuestra que los números $1, 2, ..., 16$ se pueden colocar en fila india pero no en círculo de modo que la suma de cada pareja sea un cuadrado perfecto

Solución. El número 16 solamente puede tener un vecino, el 9. Ejemplo de colocación en fila:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8. \quad \square$$

Problema 11. Encima de la mesa hay 48 monedas que no se solapan. Demuestra que siempre podemos apartar una de ellas moviéndola sin descolocar las demás.

Solución. Introduzcamos un sistema de coordenadas y consideremos la moneda cuyo centro C tiene la mayor ordenada. Supongamos que en la franja vertical de arriba que definen el punto más alto y el más bajo de esta moneda hay un punto A de otra moneda con el centro C' y radio r'. Tracemos una recta horizontal m que pase por C y sea A' la proyección de A sobre m. El centro C' tiene que estar debajo de C, por eso $C'A' < C'A < r'$, lo que significa que el punto A pertenece a ambas monedas. □

Problema 12. ¿Existe una pirámide triangular tal que cada arista tiene una cara en la que esta arista está formando un ángulo obtuso?

Solución. Enfrente al ángulo obtuso en un triángulo se halla el lado más largo. Si tal pirámide existiera, para cada arista habría una arista más larga. Contradicción. □

Problema 13. Demuestra que cada poliedro tiene al menos dos caras con el mismo número de lados.

Solución. Sea n la cantidad de lados de la cara que mayor número de lados tiene. Supongamos que los demás lados tienen estrictamente menos lados. Esta cara comparte arista con otras n caras. Estas caras pueden tener entre 3 y $n-1$ lados, es decir, hay $n-3$ posibilidades para n caras. Por Palomar, tiene que haber al menos dos caras con el mismo número de lados. □

Problema 14. En una sesión de parlamento cada uno de los 450 parlamentarios le pegó una bofetada a algún compañero suyo. Demuestra que en este parlamento hay un grupo de 150 personas en el que nadie pegó a nadie.

Solución. Consideremos A, la máxima fracción del parlamento en la que nadie pegó a nadie. Sean B los que pegaron a los de A, y C los pegados por los parlamentarios de A. Claramente, $|A| \geqslant |B|, |A| \geqslant |C|$. Además la unión de A, B y C son todos los miembros del parlamento (si un parlamentario no está en la unión lo añadimos a A). Por lo tanto, $|A| \geqslant 150$. □

Problema 15. En el plano hay N rectas trazadas de manera aleatoria. Demuestra que para cada recta existe una zona triángular formada por esta recta y otras dos.

Solución. Considera una recta trazada y el conjunto de puntos de intersección de las demás rectas. En este conjunto elijamos el punto que más cerca esté de nuestra recta. El triángulo formado por las rectas que se intersecan en este punto y nuestra recta es el que buscamos porque ninguna otra recta puede cortarlo. □

Problema 16. Hay 13 números en una fila. Se sabe que la suma de tres números seguidos es siempre positiva. ¿Puede la suma de los 13 números ser negativa?

Solución. Si fuesen 12 números la suma sería claramente positiva. Si queremos conseguir la suma negativa, el último número (y el primero) tienen que ser negativos. Pero también lo es el 4º (hacemos un grupo de 3, luego el 4º y luego otros tres grupos de 3). También lo serán el 7º y el 10º. Ahora bien, suponiendo que en la fila solamente hay dos tipos de números, llamemos x los negativos (en las posiciones $3k+1$) e y los positivos (en las demás posiciones).

$$5x + 8y < 0, 2y + x > 0$$

Resolviendo obtenemos

$$1,6y < -x < 2y$$

Con $x = -9, y = 5$ hemos construido un ejemplo □

Problema 17. En la recta numérica se posan 2025 saltamontes que miden lo mismo que un punto. Cada saltamontes puede saltar por encima de otro de tal manera que la distancia entre ellos no cambie. Saltando solamente a la derecha los saltamontes pueden conseguir que la distancia entre dos de ellos sea 1. ¿Es verdad que saltando a la izquierda también pueden conseguirlo?

Solución. Llamemos Ricardo al saltamontes que está más a la izquierda. Si todos los saltamontes saltan por encima de Ricardo, llegarán a una configuración simétrica respecto a la original. Entonces, realizando los saltos izquierdos simétricos a los derechos podrán conseguir que dos estén a la distancia de 1. □

Problema 18. Se sabe que son enteros los números a, b, c y también las expresiones $a/b + b/c + c/a$ y $a/c + c/b + b/a$. Demuestra que $|a| = |b| = |c|$.

Solución. Si $mcd(a, b, c) = d \neq 1$ los números $a' = a/d, b' = b/d, c' = c/d$ también satisfacen el enunciado del problema, de modo que podemos considerar que $mcd(a, b, c) = 1$ y que al menos uno de estos números (pongamos, a) es distinto de ± 1. Entonces tiene al menos un divisor primo $p|a$. Como los tres números no pueden tener un divisor común, uno de $p \nmid b$ o $p \nmid c$, supongamos que $p \nmid c$.

Llamemos k la máxima potencia de p en a y l, la máxima potencia de p en b. Sin perder la generalidad podemos considerar que $k \geqslant l$.

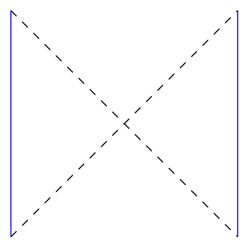
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}$$

Vemos que $p^{k+l}|abc$, por lo que debería dividir también el numerador. Pero no es así:

$$p^{k+l}|a^2b, p^{k+l}|b^2a, p^{k+l} \nmid c^2b. \quad \square$$

Problema 19. En el plano hay n puntos. Demuestra que existe una línea quebrada (hecha de segmentos rectos) que pasa por todos estos puntos y no tiene intersecciones.

Solución. Primero crearemos una línea quebrada que pase por todos los puntos aunque tenga intersecciones. Luego haremos la siguiente operación: cada pareja de segmentos que se cortan la vamos a sustituir por otra pareja que parten de los mismos puntos pero no se cortan (en el dibujo, sustituimos los segmentos discontinuos por los azules):



Si los segmentos AB, CD se cortan en el punto O, $AO + OC > AC, BO + OD > BD$ por la desigualdad triangular. Esto significa que cada operación disminuye la longitud total de todos los segmentos dibujados. Como hay una cantidad finita de las posibles posiciones de segmentos, este proceso debe terminar en una cantidad finita de pasos. □

Problema 20. Tenemos una tabla rectangular de números enteros positivos. Se pueden hacer dos operaciones: duplicar todos los números de una fila, o restar 1 a todos los números de una columna. Demuestra que después de una sucesión de estas operaciones se puede llegar a una tabla de ceros.

Solución. Vamos a ver que podemos rellenar las columnas de ceros, de una en una. Cuando una columna está llena de ceros, ya no cambia, porque duplicar las filas la deja igual, y no vamos a restarle 1. En el proceso de llenar una columna de ceros, no vamos a restar 1 a otra columna, de manera que los números de las demás sólo aumentarán.

Sea d la diferencia entre el máximo M y el mínimo número m en una columna. Vamos a ver que siempre se puede disminuir d, duplicando filas y restando 1 a esta columna. Si $m > 1$, podemos restar 1 de esta columna hasta que $m = 1$. Entonces, si $M \geq 2$, duplicando la(s) fila(s) que tienen un 1 en esta columna, disminuimos d. Seguimos este proceso hasta que $d = 0$. Entonces, toda la columna tendrá el mismo número y podremos restar hasta que sólo haya ceros. Repetimos el proceso con todas las columnas. $\square$

Problema 21. En una mesa rectangular se colocan en paralelo a los bordes de la mesa cuadrados iguales de n colores distintos. Se sabe que en cualquier subgrupo de n cuadrados de colores distintos hay dos que se pueden fijar en la mesa con una única chincheta. Demuestra que todos los cuadrados de un determinado color se pueden fijar en la mesa usando $2n - 2$ chinchetas.

Solución. Vamos a demostrarlo por inducción. Sea $n = 2$. Consideremos el cuadrado que está más a la izquierda (si hay varios, elegimos uno aleatorio). Si este cuadrado es de color 1, todos los cuadrados de color 2 tienen al menos un punto en común con él. Entonces deben contener uno de sus vértices derechos. Clavando la chincheta en ambos vértices derechos, fijamos todos los cuadrados de color 2.

Ahora supongamos que la afirmación del problema es cierta para cuadrados de k colores distintos y veamos qué ocurre cuando hay $k + 1$ colores. De nuevo consideremos el cuadrado C que está más a la izquierda. Vamos a renumerar los colores de modo que este cuadrado sea de color $k + 1$. Todos los cuadrados que tienen un punto en común con C contienen uno de sus vértices derechos, por lo que 2 chinchetas bastan para fijarlos. Quitemos de la mesa esos cuadrados y todos los cuadrados de color $k + 1$.

Quedan cuadrados de k colores distintos que satisfacen la condición inicial de que en cualquier subgrupo de k colores hay dos que se intersecan (si no, este grupo junto con el cuadrado C forma un grupo de $k + 1$ colores que no se intersecan, contradicción). Entre estos cuadrados hay un color que se fija con $2k - 2$ chinchetas. Si recuperamos otros cuadrados de este color, ya sabemos que se pueden fijar con 2 chinchetas más que corresponden a las esquinas derechas del cuadrado C. En total hemos usado $2k - 2 + 2 = 2(k + 1) - 2$ chinchetas. $\square$

Problema 22. En algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se colocan fichas idénticas. Para cada casilla vacía se sabe que la suma de fichas que hay en la misma horizontal o vertical es mayor o igual a n. Demuestra que hay como poco $n^2/2$ fichas.

Solución. Consideremos la casilla vacía en la que la cantidad de fichas en horizontal o en vertical sea mínima. Supongamos que esta cantidad mínima se alcanza en las filas (si no, giramos el tablero) y que es igual a k. Si $k \geqslant n/2$, como en las demás filas la cantidad de fichas es mayor o igual a k, tenemos como poco un total de $n \cdot \frac{n}{2}$.

Ahora supongamos que $k < n/2$. Veremos las columnas que corresponden a las casillas vacías de esta fila. Como las fichas en filas y columnas tienen que sumar n o más, en estas columnas hay como poco $n - k$ fichas, y en total en estas $n - k$ columnas hay mínimo $(n - k)^2$ fichas. En las demás hay mínimo k fichas en cada, en total, k^2. Como

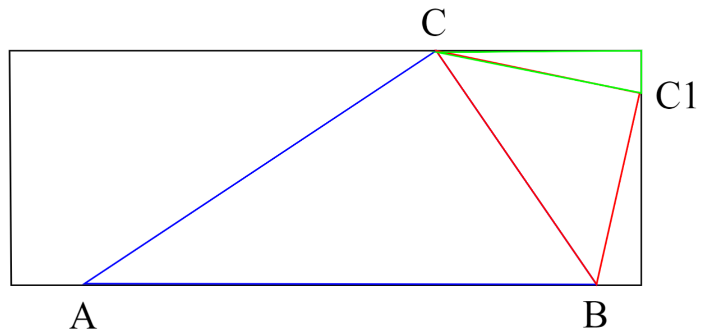
$$(n-k)^2 + k^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} - 2kn + k^2 = 2(\frac{n}{2} - k)^2 \geqslant 0$$

$$(n-k)^2 + k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$$

$\square$

Problema 23. Un rectángulo está dividido en triángulos rectángulos de tal manera que dos triángulos vecinos comparten siempre un lado, el cateto para uno de ellos y la hipotenusa para el otro. Demuestra que el lado largo del rectángulo es como poco el doble del lado corto.

Solución. Llamemos ABC el triángulo de lado más largo, siendo AB su hipotenusa.



No puede estar dentro del rectángulo porque de ser así sería cateto de otro triángulo que, a su vez, tendría la hipotenusa más larga aún. Entonces sabemos que AB está en uno de los lados del rectángulo. Ahora nos vamos a fijar en el punto C. Consideremos el triángulo pegado al cateto más pequeño CB, pongamos, CBC_1. Su lado correspondiente tiene que ser hipotenusa, por lo que el cateto BC_1 es más corto. A este cateto se le pega otra hipotenusa, etc. Como estos triángulos son cada vez más pequeños, no pueden pegarse al lado AC y uno de ellos tiene su cateto en el lado opuesto al AB del rectángulo. Por tanto, el punto C está en el lado opuesto al BC. Ahora es fácil demostrar la inecuación: el lado corto del rectángulo coincide con la altura de ABC, que es menor o igual que la mediana, que es igual a la mitad del lado AB, que es menor o igual que el lado largo del rectángulo. $\square$

Problema 24. Encuentra todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw$$

Solución. Los números x, y, z, w no pueden ser todos impares porque en este caso la suma de sus cuadrados módulo 4 sería 0, sin embargo, $2xyzt$ no sería múltiplo de 4.

Si los impares fuesen dos, pasaría lo contrario, la parte izquierda no sería múltiplo de 4 y la derecha sí.

Como la cantidad de impares entre ellos tiene que ser par, son todos pares. Consideremos la mayor potencia de 2 común en su descomposición:

$$x = 2^n \cdot x', y = 2^n \cdot y', z = 2^n \cdot z', w = 2^n \cdot w'$$

siendo al menos uno de los números x', y', z', w' impar. Simplificando la ecuación original tenemos

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = 2^{2n+1} x'y'z'w', n \geqslant 1$$

Sin embargo, es fácil ver que la parte izquierda no puede ser múltiplo de 8 porque $(impar)^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$, y tenemos al menos un impar entre estos números. $\square$

Problema 25. ¿Es verdad que cualquier triángulo se puede dividir en 1000 triángulos de los que se pueda formar un cuadrado?

Solución. Considera un triángulo de base 2000000 y altura 1. Su área es 1000000, que equivale al área de un cuadrado de lado 1000. El segmento más largo que cabe en este cuadrado mide $1000\sqrt{2}$, por lo que los triángulos pequeños en los que se debería dividir el grande no pueden tener lados mayores de $1000\sqrt{2}$. Pero ningún triángulo pequeño que esté en el grande puede tener el área superior a $\frac{1000\sqrt{2}\times 1}{2}$, ya que está limitado por un rectángulo de altura 1 y base $1000\sqrt{2}$. El área de mil triángulos así no supera $\frac{1000\times 1000\sqrt{2}\times 1}{2}$, lo que es inferior al área del triángulo original. Contradicción. $\square$

Problema 26. Unos puntos están situados en el plano de tal manera que cualquier grupo de 3 de ellos se puede encerrar en un círculo de radio 1. Demostrar que entonces todos los puntos también se pueden encerrar en un círculo de radio 1.

Solución. Consideremos el círculo que contiene todos los puntos dados. Reduciremos el radio de dicho círculo tanto como sea posible. Sea R el radio del círculo obtenido. En el borde de este círculo se encuentran al menos dos de los puntos dados.

Primero, consideremos el caso en el que exactamente dos puntos A y B se encuentran en el borde. Es evidente que estos son puntos diametralmente opuestos del círculo. Tomemos un tercer punto dado C. El radio mínimo del círculo que contiene los puntos A, B y C es R, por lo tanto, $R \leq 1$.

Ahora consideremos el caso en que exactamente tres puntos A, B y C se encuentran en el borde. Entonces, el triángulo ABC es acutángulo, ya que de otro modo sería posible reducir el radio del círculo que contiene todos los puntos dados. Por lo tanto, nuevamente el radio mínimo del círculo que contiene los puntos A, B y C es R.

Finalmente, consideremos el caso en que al menos cuatro de los puntos dados se encuentran en el borde. Sean α_1, α_2, ..., α_n los ángulos de los sucesivos arcos en los que los puntos dividen la circunferencia del círculo. Si la suma de las medidas angulares de dos arcos sucesivos no supera los 180°, borremos su punto común.

Demostraremos que para $n \geq 4$, siempre existirá tal par de arcos sucesivos. Supongamos que $\alpha_1+\alpha_2 > 180°$, $\alpha_2+\alpha_3 > 180°$, ..., $\alpha_n+\alpha_1 > 180°$. Sumando estas desigualdades, obtenemos $2(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n) > n \cdot 180°$, lo que implica $4 \cdot 180° > n \cdot 180°$. Esto lleva a una contradicción.

Por lo tanto, en el borde del círculo obtenido hay dos puntos diametralmente opuestos o tres puntos que forman los vértices de un triángulo acutángulo. Estos casos ya han sido analizados.

□

Problema 27. En el despacho del director de ICMat hay 2024 teléfonos, cada par de los cuales está conectado por un cable de uno de los cuatro colores. Se sabe que están presentes los cables de los cuatro colores. ¿Siempre se puede elegir un conjunto de teléfonos de tal manera que los cables que los conectan sean de exactamente tres colores?

Solución. Construyamos un grafo donde los vértices correspondan a los teléfonos y las aristas a los cables. Consideremos el conjunto más pequeño de vértices de este grafo tal que entre las aristas que conectan estos vértices están presentes aristas de los cuatro colores. Eliminemos un vértice arbitrario de este conjunto. Como el conjunto era el más pequeño, entre las aristas que conectan los vértices restantes ya no están presentes todos los colores.

Si entre estas aristas están presentes aristas de exactamente tres colores, entonces se ha encontrado el conjunto buscado.

En caso contrario, entre las aristas que salen del vértice eliminado hacia los demás vértices del conjunto hay al menos dos colores que desaparecen tras la eliminación de este vértice.

Consideremos dos aristas de estos colores que salen del vértice eliminado hacia otros vértices del conjunto. Entonces, la arista que conecta los extremos de estas dos debe tener un color diferente de los colores de estas dos aristas. Por lo tanto, el grafo contiene un triángulo en el que las tres aristas tienen colores distintos entre sí.

Esto significa que siempre es posible seleccionar el conjunto requerido de vértices.

□

Problema 28. (1) Sea X un grafo con $4n$ vértices. Se sabe que entre cualquier conjunto de $n+1$ vértices de X hay por lo menos dos conectados por una arista. Demuestra que X tiene por lo menos $6n$ vertices.

(2) En un plano se marcan $4n$ puntos y se conectan con segmentos todas las parejas de puntos cuya distancia es de 1 cm. Resultó que entre cualesquiera $n+1$ puntos siempre hay al menos dos conectados por un segmento. Demuestre que en total se han trazado al menos $7n$ segmentos.

Solución. (1) Sea V el conjunto de vértices de X y E el conjunto de aristas. Entonces, $|V| = 4n$, y para cada $W \subset V$ tal que $|W| \geq n + 1$, existen $x, y \in W$ que forman una arista $(x, y) \in E$.

Tomemos un conjunto arbitrario $Q_1 \subset V$ que no contenga aristas y que tenga la máxima cardinalidad entre todos los subconjuntos de V que no contienen aristas. Es claro que $|Q_1| \leq n$. Además, debido a la maximalidad del conjunto Q_1, cada vértice de $V \setminus Q_1$ tiene al menos un vecino en Q_1. Por lo tanto, en E hay al menos $3n$ elementos.

Eliminemos del conjunto V el conjunto Q_1. Quedará un grafo G_1 con el conjunto de vértices V_1 y el conjunto de aristas E_1, donde $|V_1| \geq 3n$. Para cada $W \subset V_1$, si $|W| \geq n+1$, entonces existen $x, y \in W$ que forman una arista $(x, y) \in E_1$. Nuevamente, tomamos un conjunto arbitrario $Q_2 \subset V_1$ que no contenga aristas y que tenga la máxima cardinalidad entre todos los subconjuntos de V_1 que no contienen aristas. De manera similar, demostramos que en E_1 hay al menos $2n$ elementos. Dado que las aristas encontradas en el primer paso son diferentes de las aristas encontradas ahora, entonces en E ya hay al menos $5n$ elementos.

Realizamos un paso más de manera completamente análoga y verificamos que $|E| \geq 6n$.

(2) Consideremos un grafo, cuyo conjunto de vértices V consiste en todos los puntos marcados y cuyo conjunto de aristas E consiste en todos los pares de puntos conectados por segmentos de longitud 1 cm. Para demostrar que hay al menos $7n$ aristas, comenzamos como en el apartado anterior, complicando un poco el procedimiento: ahora tomamos en cuenta que el grafo X es un grafo de distancia en el plano, es decir, las aristas solo conectan pares de vértices a una distancia de 1 cm entre sí. Llevamos a cabo casi el mismo procedimiento descrito anteriormente, con la única diferencia en el primer paso. Ya sabemos que cada vértice de $V \setminus Q_1$ tiene al menos un vecino en Q_1. Dividamos $V \setminus Q_1$ en dos partes: W_1 y W_2. En W_1 estarán los vértices que tienen exactamente un vecino en Q_1, y en W_2 estarán los vértices que tienen al menos dos vecinos.

Si demostramos que $|W_1| \leq 2n$, veremos que en el primer paso la contribución a $|E|$ es de al menos $4n$ en lugar de $3n$, como antes.

Supongamos que $|W_1| > 2n$. Entonces, en Q_1 hay un vértice q adyacente a tres vértices x_1, x_2, x_3 de W_1. Si no hay arista entre algunos x_i y x_j, podemos eliminar q de Q_1 y agregar ambos vértices x_i y x_j al conjunto. El resultado es un conjunto sin aristas y con cardinalidad mayor que $|Q_1|$. Por lo tanto, los vértices x_1, x_2, x_3 y q están conectados por aristas de manera que forman un grafo completo en cuatro vértices. Sin embargo, un grafo completo en cuatro vértices no se puede realizar con segmentos de longitud 1 en el plano, lo cual es una contradicción.

$\square$

Solución. Para mayor comodidad, definimos $a_{n+100} = a_n$ para $n = 1, 2, \ldots, 100$. Veamos un resultado auxiliar.

Lema. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y d números naturales. Entonces existe un número natural k tal que $\mathrm{MCD}(a_1 + kd, a_i) \leq d$ para cualquier $i = 2, 3, \ldots, n$.

Demostración. Existe un número múltiplo de $a_2 a_3 \ldots a_n$, digamos $l a_2 a_3 \ldots a_n$, que es mayor que a_1. Entonces, entre los k para los cuales $a_1 + kd > l a_2 a_3 \ldots a_n$, existe un número mínimal k_0. Definimos $b = a_1 + k_0 d$. Entonces, $0 < b - l a_2 a_3 \ldots a_n \leq d$, y por lo tanto $\mathrm{MCD}(b, a_i) \leq d$. $\square$

Supongamos ahora que $M > 1$ es el mayor de los MCD de los a_i y a_j con $1 \leq i \neq j \leq 100$. Demostraremos que, mediante las operaciones descritas en el enunciado del lema, podemos sustituir el conjunto original de números por un conjunto en el que todos los MCD de dos números son menores que M.

En efecto, dado que los números $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ son coprimos en conjunto, existirán dos números vecinos a_i y a_{i+1}, de los cuales el primero es divisible por M y el segundo no lo es. Entonces $d = \mathrm{MCD}(a_{i-1}, a_{i+1}) < M$. Aplicando el lema, sumamos a a_i un múltiplo de d tal que los MCD b_i con cada uno de los demás números sean a lo sumo d. En el nuevo conjunto, los MCD de dos números no superan M, y hay menos números divisibles por M que en el conjunto original. Repitiendo esta operación, lograremos que quede exactamente un número divisible por M, y entonces, evidentemente, todos los MCD de dos números serán menores que M.

Por lo tanto, si el mayor de los MCD de dos números del conjunto de números es mayor que 1, se puede reducir. Por lo tanto, se puede reducir M hasta 1, que es lo requerido.

$\square$

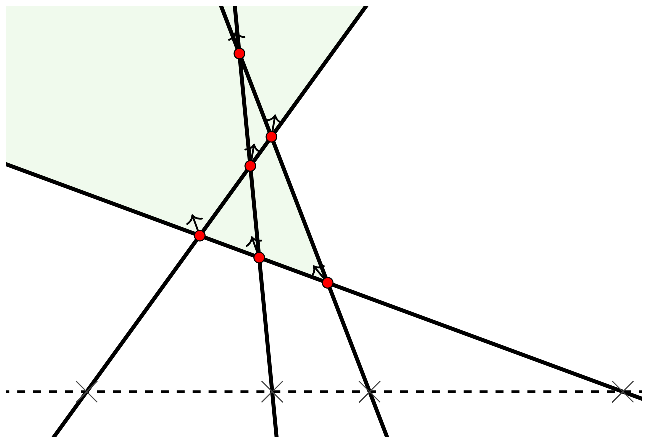
Problema 29. • Hay n líneas en el plano en **posición general**: no hay 2 paralelas ni 3 que se cortan en un punto. ¿Cuántas regiones forman?

- Demuestra que en este caso, si $n \geq 3$, al menos $\frac{2n-2}{3}$ de las regiones son triángulos.
- Hay n planos en el espacio en **posición general**: 3 de ellos siempre se cortan en un punto (ni en el vacío, ni en una recta), y 4 de ellos nunca se cortan. ¿En cuántas regiones dividen el espacio?
- Demuestra que en este caso, si $n \geq 5$, al menos $\frac{2n-3}{4}$ de las regiones son tetraedros.

Solución. • El problema de las rectas se puede hacer por inducción, pero lo vamos a hacer usando el principio del extremo. Supongamos que ninguna recta es horizontal: si lo es, giramos el plano. Para cada región, consideramos el punto más al sur (p. ej. cuya coordenada y es mínima) si es que existe. Cada punto de intersección de 2 rectas es el punto más al sur de una región, y hay $\binom{n}{2}$ intersecciones. Nos falta contar cuántas regiones hay que no están acotadas hacia el sur.

Si dibujamos una recta horizontal al sur de todas las intersecciones, cortará exactamente una vez a cada recta, y quedará dividida en un segmento por cada región no acotada hacia el sur. Como hay n rectas, hay $n+1$ regiones no acotadas. En total, el número es

$$1 + n + \binom{n}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$



4 rectas, 6 puntos de intersección, 6 regiones acotadas y 5 regiones no acotadas. En cada punto, la flecha apunta a su región.

- Vamos a ver que cada recta es en lado de al menos 2 triángulos, excepto quizás 2 rectas, que pueden ser el lado de 1 triángulo.

  Tomamos una recta r: divide el plano en dos mitades. Supongamos que en una mitad hay vértices. De todos estos vértices, alguno, V tiene la distancia mínima a r. Será la intersección de otras dos rectas r_2, r_3. Como es el punto más cercano a r, no hay más vértices entre V y r, y r, r_2, r_3 forman un triángulo.

  Por tanto, por cada recta y por cada mitad del plano que tenga vértices (al menos una mitad), hay un lado de un triángulo. Si el número de mitades es m, estamos contando m lados, que dan lugar a $m/3$ triángulos.

  Vamos a ver que $m \geq 2n-2$, es decir, hay como mucho 2 rectas que sólo tienen vértices a uno de sus lados. Tomemos 3 rectas cualesquiera r_1, r_2, r_3, y vamos a ver que al menos una de ellas tiene vértices a ambos lados. Los 3 puntos de intersección de las 3 rectas forman un triángulo ABC. Supongamos que $n \geq 4$ (si $n = 3$, está claro el problema), hay una recta r_4, que no puede cortar al triángulo en sus 3 lados a la vez. Supongamos que corta en un punto X a la recta AC, de manera que A está entre C y X: entonces, la recta AB tiene a los puntos C y X a dos lados distintos, como queríamos demostrar.

- Seguimos la misma estrategia que antes: hay regiones que tienen un punto más abajo (con z mínimo), y regiones que no están acotadas hacia abajo.

  Para las regiones acotadas, hay exactamente una por cada vértice de intersección, así que hay $\binom{n}{3}$.

  Para las regiones no acotadas, las intersecamos con un plano horizontal con z suficientemente pequeño para que esté debajo de todas las intersecciones. Cada región corta al plano en una región de éste, y esto nos da una biyección. Por tanto, hay $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$ de éstas. En total:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

- Vamos a ver que cada plano es la cara de al menos 2 tetraedros, excepto quizás 3 planos, que pueden ser la cara de 1 tetraedro.

  Tomamos un plano π: divide el espacio en dos mitades. Supongamos que en una mitad hay vértices. De todos estos vértices, alguno, V tiene la distancia mínima a π. Será la intersección de otros tres planos π_2, π_3, π_4. Como es el punto más cercano a π, no hay más vértices entre V y π, y π, π_2, π_3, π_4 forman un tetraedro.

  Por tanto, por cada plano y por cada mitad del espacio que tenga vértices (al menos una mitad), hay una cara de un tetraedro. Si el número de mitades es m, estamos contando m caras, que dan lugar a $m/4$ tetraedros.

  Vamos a ver que $m \geq 2n - 3$, es decir, hay como mucho 3 planos que sólo tienen vértices a uno de sus lados. Tomemos 4 planos cualesquiera $\pi_1, \dots, \pi_4$, y vamos a ver que al menos uno de ellos tiene vértices a ambos lados. Los 4 puntos de intersección de los 4 planos (de 3 en 3) forman un tetraedro $ABCD$. Como $n \geq 5$, hay un plano π_5, que no puede cortar al tetraedro en sus 6 aristas a la vez (si cortara en al menos 5, compartiría 3 puntos con uno de los otros planos). Supongamos que corta en un punto X a la recta AD, de manera que A está entre D y X: entonces, el plano ABC tiene a los puntos D y X a dos lados distintos, como queríamos demostrar.

$\square$

Problema 30. Hay una forma hecha de cuadrados. En cada cuadrado del borde (que no tiene 4 vecinos) hay escrito un número real. Demuestra que hay una única manera de rellenar la cuadrícula de manera que en cada cuadrado del interior está escrita la media de los 4 vecinos. Por ejemplo:

		3		
	2		4	
1				5
0			6	
	8	7		

$\longrightarrow$

		3		
	2	$\frac{13}{4}$	4	
1	$\frac{11}{4}$	4	$\frac{19}{4}$	5
0	4	$\frac{21}{4}$	6	
	8	7		

Solución. Hacemos un paseo aleatorio. Estamos en un cuadrado del interior. En cada paso, nos movemos al azar, con probabilidad 1/4, a uno de los 4 vecinos, hasta que llegamos al borde de la forma, y entonces nos quedamos quietos.

Podemos pensar que en cada paso tenemos una cierta probabilidad de estar en cada cuadrado. En el primer paso, la probabilidad de estar en el cuadrado inicial es 1:

		0		
	0	0	0	
0	0	0	0	0
0	1	0	0	
	0	0		

$\xrightarrow{\text{Paso}}$

		0		
	0	0	0	
0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	
	$\frac{1}{4}$	0		

$\xrightarrow{\text{Paso}}$

		0		
	$\frac{1}{16}$	0	0	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$		

Veamos primero que **la probabilidad de llegar al borde de la forma es 1**. En otras palabras, después de n pasos, la probabilidad de estar dentro de la forma es un número d_n que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Para ello, usaremos que como la forma es finita, hay un número N que cumple que si das N pasos seguidos hacia arriba, siempre estás fuera de la forma, empieces donde empieces. La probabilidad de dar N pasos seguidos hacia arriba es $\frac{1}{4^N}$ (sólo nos importa que es un número positivo). Esto significa que para cualquier n, $d_{n+N} \leq (1 - \frac{1}{4^N})d_n$. Por tanto, tenemos que

$$d_{n \cdot N} < \left(1 - \frac{1}{4^N}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Así que la probabilidad de permanecer dentro de la figura no sólo decrece, sino que decrece exponencialmente.

Además, para cualquier casilla del borde, la probabilidad de estar allí después de n pasos aumenta con n (una vez llegamos, nunca salimos), y es menor que 1, y por tanto **tiene límite**, al ser una sucesión que crece y está acotada por 1.

Entonces, nuestro paseo aleatorio siempre termina en el borde, donde encontramos un número escrito. **El número que buscamos es la esperanza del número escrito al final del paseo aleatorio.** ¡Este número cumple que es la media de los 4 vecinos! Esto se debe a que si las esperanzas en los 4 vecinos son e_1, e_2, e_3, e_4, después de movernos a uno de estos 4, la esperanza será e_1, e_2, e_3 o e_4. Es decir, nuestra esperanza inicial era $\frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_4$. Esto desmuestra que existe una solución.

Ahora veamos que es única. Si tenemos dos soluciones, las restamos, y obtenemos una solución para el mismo problema, pero con el número 0 escrito en todos los bordes. Vamos a ver que la resta tiene que ser 0: la cuadrícula tendrá un máximo: este máximo es mayor o igual que todos sus vecinos, y también es la media. Por tanto, es igual a sus vecinos. Por tanto, el máximo (y el mínimo, por el mismo motivo) es 0. □

Problemas para hacer en casa

27 de septiembre

Problema 31. En una cuadrícula infinita juegan Ana y Belén. Cada jugada consiste en pintar un lado de una casilla de un color cualquiera. Está prohibido volver a pintar los lados pintados. Ana quiere en menos de 100 movimientos crear una línea cerrada en la que todos los segmentos sean de colores distintos, Belén intenta impedírselo. ¿Quién gana?

Solución. Siempre que Ana pinta una línea vertical de un color, Belén pinta del mismo color el segmento horizontal que, junto con el de Ana, forma una L, y viceversa, siempre que Ana pinta un segmento horizontal Belén lo completa con uno vertical hasta formar una L del mismo color. Con la estrategia de Belén todas estas esquinas serán pintadas del mismo color. Gana Belén. □

Problema 32. Demuestra que los números $1, 2, ..., 16$ se pueden colocar en fila india pero no en círculo de modo que la suma de cada pareja sea un cuadrado perfecto

Solución. El número 16 solamente puede tener un vecino, el 9. Ejemplo de colocación en fila:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8. \quad \square$$

Problema 33. El pintor-camaleón se mueve por un tablero una casilla en horizontal o vertical. Cada vez que llega a una casilla, o bien la pinta de su color, o bien adopta su color. Se le coloca en un tablero negro de 8×8, ¿conseguirá pintarlo a modo de tablero de ajedrez?

Solución. No. Suponiendo que lo ha hecho, considera la última casilla que ha pintado. Ha venido de una casilla de color opuesto, entonces ha pintado con un color opuesto al suyo, lo que es imposible □

Problema 34. En la pizarra están escritos $N \geq 9$ números distintos no negativos, menores que uno. Resultó que para cualquier conjunto de ocho números distintos de la pizarra, se puede encontrar un noveno número, diferente de ellos, tal que la suma de estos nueve números sea un número entero. ¿Para qué valores de N es esto posible?

Solución. Es evidente que para $N = 9$ es posible hacerlo: basta con escribir en la pizarra 9 números positivos distintos con una suma entera. Demostraremos que para $N > 9$ no es imposible.

Supongamos lo contrario; llamemos S a la suma de todos los números en la pizarra. Elegimos en la pizarra números arbitrarios $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ que suman T; sea A el conjunto de todos los demás números en la pizarra. Por hipótesis, para cualquier número $\beta \in A$ hay un número $\gamma \in A$, diferente de β, tal que el número $T + \beta + \gamma$ es entero. Llamaremos al número γ correspondiente al número β. Observemos que tal número γ es único. De hecho, si existiera otro número $\gamma' \in A$ tal que $T + \beta + \gamma'$ fuera entero, entonces el número $\gamma - \gamma' = (T + \beta + \gamma) - (T + \beta + \gamma')$ también sería entero. Pero esto es imposible, ya que $0 < |\gamma - \gamma'| < 1$.

En particular, esto implica que β corresponde al número γ. Por lo tanto, todos los números en A se dividen en pares de números $(\beta_1, \gamma_1), \ldots, (\beta_l, \gamma_l)$ que se corresponden entre sí. Además, $l > 1$, ya que $N = 7 + 2l > 9$.

Consideremos la suma $\Sigma = (T + \beta_1 + \gamma_1) + (T + \beta_2 + \gamma_2) + \cdots + (T + \beta_l + \gamma_l)$. Σ es un número entero. Por otro lado, cada número de A aparece en Σ exactamente una vez; así, $\Sigma = lT + (S - T) = S + (l - 1)T$. Por lo tanto, $T = \frac{\Sigma - S}{l-1}$.

Eligiendo ahora los números $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_8$ en la pizarra y denotando su suma por T', obtenemos de manera similar que $T' = \frac{\Sigma' - S}{l-1}$. Entonces

$$\alpha_1 - \alpha_8 = T - T' = \frac{\Sigma - S}{l - 1} - \frac{\Sigma' - S}{l - 1} = \frac{\Sigma - \Sigma'}{l - 1}.$$

Dado que α_1 y α_8 podrían ser cualquier par de números en la pizarra, concluimos que la diferencia entre cualquier par de números en la pizarra tiene la forma $\frac{k}{l-1}$ con k entero.

Sea μ el menor número en la pizarra. Entonces, en la pizarra solo pueden estar presentes números de la forma $\mu, \mu + \frac{1}{l-1}, \mu + \frac{2}{l-1}, \ldots$, es decir, un total de l números. Sin embargo, el número total de números en la pizarra es $N = 7 + 2l > l$; por lo tanto, no pueden ser distintos. Esto es una contradicción.

□

Problema 35. ¿Podemos dividir todos los números de 1 a k para algún entero k en dos grupos de tal manera que los números de cada grupo escritos en fila formen el mismo número largo?

Solución. Busquemos la mayor potencia de 10, 10^n que esté entre los números $1...k$. Este número tiene un 1 y n ceros. Pero ningún otro número de nuestro conjunto tiene n ceros seguidos, ni tampoco puede haber números que empiecen por el 0. Entonces esta combinación solamente estará en una de las mitades. □

4 de octubre

Problema 36. Tenemos $n > 2$ números naturales y todos distintos $a_1, a_2, ..., a_n$ escritos en círculo. En cada paso estos números se sustituyen por la media de ellos y sus vecinos derechos, es decir,

$$a_1' = \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2' = \frac{a_2 + a_3}{2}, ..., a_n' = \frac{a_n + a_1}{2}$$

Demuestra que en algún momento al menos una de las medias deja de ser entera.

Solución. Llamemos g el número más grande del conjunto y p, el más pequeño. Está claro que al hacer la media el número más grande disminuye y el más pequeño aumenta, pero nunca llegan a ser iguales porque hay al menos 1 número intermedio. Contradicción. □

Problema 37. Una mañana de cada uno de 100 aeropuertos despegó un avión y se dirigió al aeropuerto más cercano. Las distancias entre los aeropuertos son todas distintas. ¿Cuál es el máximo de aviones que pueden haber aterrizado en un aeropuerto?

Solución. Vamos a llamar A el aeropuerto con mayor concurrencia de aviones. Si ha recibido aviones de los aeropuertos A_i, A_j, la distancia entre ellos es superior a la distancia hasta A, $AA_i > A_iA_j$ (si no, el avión del aeropuerto A_i habría ido al A_j. Por eso en el triángulo AA_iA_j el lado A_iA_j es el más largo, y enfrente del lado más largo se encuentra el ángulo más grande. Por tanto, el ángulo $\angle A_iAA_j > 60°$.
Ahora bien, coloquemos los aeropuertos de destino en torno al aeropuerto A y veremos la suma de ángulos $\angle A_iAA_j$. Como tiene que ser inferior a 360°, en el vértice A no puede haber más de 5 ángulos mayores de 60. Por tanto, la respuesta es NO. □

Problema 38. En algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se colocan fichas idénticas. Para cada casilla vacía se sabe que la suma de fichas que hay en la misma horizontal o vertical es mayor o igual a n. Demuestra que hay como poco $n^2/2$ fichas.

Solución. Consideremos la casilla vacía en la que la cantidad de fichas en horizontal o en vertical sea mínima. Supongamos que esta cantidad mínima se alcanza en las filas (si no, giramos el tablero) y que es igual a k. Si $k \geqslant n/2$, como en las demás filas la cantidad de fichas es mayor o igual a k, tenemos como poco un total de $n \cdot \frac{n}{2}$.

Ahora supongamos que $k < n/2$. Veremos las columnas que corresponden a las casillas vacías de esta fila. Como las fichas en filas y columnas tienen que sumar n o más, en estas columnas hay como poco $n-k$ fichas, y en total en estas $n-k$ columnas hay mínimo $(n-k)^2$ fichas. En las demás hay mínimo k fichas en cada, en total, k^2. Como

$$(n-k)^2 + k^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} - 2kn + k^2 = 2(\frac{n}{2} - k)^2 \geqslant 0$$

$$(n-k)^2 + k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$$

□

Problema 39. Encuentra todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw$$

Solución. Los números x, y, z, w no pueden ser todos impares porque en este caso la suma de sus cuadrados módulo 4 sería 0, sin embargo, $2xyzt$ no sería múltiplo de 4.

Si los impares fuesen dos, pasaría lo contrario, la parte izquierda no sería múltiplo de 4 y la derecha sí.

Como la cantidad de impares entre ellos tiene que ser par, son todos pares. Consideremos la mayor potencia de 2 común en su descomposición:

$$x = 2^n \cdot x', y = 2^n \cdot y', z = 2^n \cdot z', w = 2^n \cdot w'$$

siendo al menos uno de los números x', y', z', w' impar. Simplificando la ecuación original tenemos

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = 2^{2n+1}x'y'z'w', n \geqslant 1$$

Sin embargo, es fácil ver que la parte izquierda no puede ser múltiplo de 8 porque $(impar)^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$, y tenemos al menos un impar entre estos números. □

Problema 40. En una circunferencia se marcan 100 números naturales tales que su máximo divisor común es 1. Se permite sumar a cualquier número el máximo común divisor (MCD) de sus dos vecinos. Demuestre que, mediante estas operaciones, se pueden hacer todos los números coprimos por pares.