PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 20 y 27 de septiembre y 4 de octubre de 2024
Principio del palomar y coloración
Genérica **(Soluciones)**

¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que tod@s l@s alumn@s de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, tod@s aprenderéis a hacer demostraciones:

Test de los compañeros del grupo

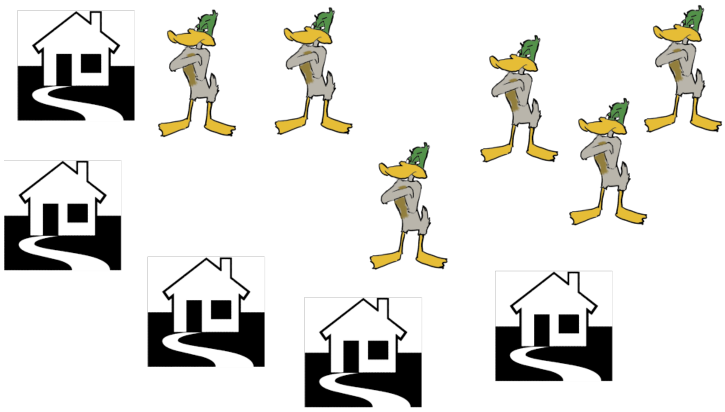
- Cuando alguien del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestr@s compañer@s para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

Principio del palomar

El **principio del palomar** dice lo siguiente:

Tenemos palomas dentro de palomares. Si hay más palomas que palomares, entonces en algún palomar hay más de una paloma.



Aquí, "más" significa ">". Si queremos, podemos cambiar las palabras "palomar" por "caja" y "paloma" por "objeto" para poder aplicarlo a ejercicios que no tengan que ver con aves.

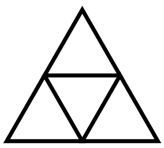
Por ejemplo, si hay 4 niñas que viven en 3 calles (las niñas juegan el papel de las palomas y las calles, de los palomares) entonces hay dos niñas que viven en la misma calle.

Ejemplo resuelto. El Crustáceo Crujiente tiene un menú del día con 4 primeros y 4 segundos. En la comida del PIM todos los comensales pidieron un menú distinto. ¿Cuánta gente podía haber, como mucho?

Solución. 4 primeros y 4 segundos son 16 menús distintos (puedes hacer una tabla con los primeros en las filas y los segundos en las columnas). Los 16 menús son 16 palomares; y los comensales, las palomas. Si hubiera 17 personas o más, el principio del palomar dice que dos personas comerían el mismo menú. Por tanto, había como mucho 16 personas. $\square$

Ejemplo resuelto. En un triángulo equilátero de lado 2 colocamos 5 puntos. Demostrar que hay dos puntos a distancia menor o igual que 1.

Solución. Dividimos el triángulo equilátero en cuatro triángulos equiláteros iguales de lado 1:



Estos cuatro triángulos van a ser nuestras cajas, y los 5 puntos van a ser nuestros objetos. Por el principio del palomar, habrá dos puntos en uno de los triángulos de lado 1. Como la mayor distancia entre dos puntos de un triángulo equilátero de lado 1 es 1, esos dos puntos estarán a distancia menor o igual que 1. $\square$

Problema 1. Demuestra que si elegimos 7 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, entre ellos siempre habrá dos que sumen 12.

Solución. Las maneras de obtener 12 como suma de dos números de ese conjunto son: $11+1$, $2+10$, $9+3$, $8+4$, y $7+5$. Particionamos el conjunto que nos dan en estos 6 subconjuntos: $\{11, 1\}$, $\{10, 2\}$, $\{9, 3\}$, $\{8, 4\}$, $\{7, 5\}$, $\{6\}$. Si escogemos 7 elementos distintos de $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, el principio del palomar nos dice que habrá al menos dos en el mismo subconjunto (de entre los 6 subconjuntos que hemos descrito). Como no pueden estar esos dos elementos en el subconjunto $\{6\}$ (porque es un conjunto de un solo elemento), habremos elegido necesariamente los dos elementos de alguno de los 5 subconjuntos restantes, y esos dos elementos suman 12.

□

Problema 2.
- En clase hay 25 personas y se tienen que poner en grupos de **como mucho** 4 personas. ¿Cuál es el mínimo número de grupos que tienen que formar?
- 1000 personas forman 11 equipos. ¿Cuál es el mínimo tamaño del equipo más grande?
- En clase hay n personas y se tienen que poner en grupos de **como mucho** 4 personas. ¿Cuál es el mínimo número de grupos que tienen que formar?
- 1000 personas forman k equipos. ¿Cuál es el mínimo tamaño del equipo más grande?
- $n \cdot k$ palomas se reparten entre n palomares. ¿Cuál es el mínimo número de palomas que podemos encontrar en algún palomar?[1] ¿Y si viene una paloma más?

Solución.
- 7 grupos. Si hubiera 6 grupos, tendría que haber un grupo con al menos 5 personas, porque $6 \cdot 4 = 24$. Con 7 sí se puede, por ejemplo, 4 grupos de 4 personas y 3 grupos de 3.
- $\frac{1000}{11} = 90,\overline{90}$. Si todos los grupos tuvieran como mucho 90 personas, habría un total de personas menor o igual que $90 \cdot 11 = 990$ personas. Por tanto, el equipo más grande tiene como poco 91 integrantes. Esto es posible: 10 equipos de 91 personas y 1 equipo de 90 suman un total de 1000 personas.
- La respuesta será el menor número natural n que satisface que $k \geq \frac{n}{4}$. Es decir, si n es divisible por 4, la respuesta es $\frac{n}{4}$ (todos los grupos tienen 4 personas). Si n no es divisible por 4, la respuesta la obtenemos sumando 1 al número entero que va antes de la coma en $\frac{n}{4}$.
- La respuesta será el menor número natural k que satisface que $n \geq \frac{1000}{k}$. Es decir, si 1000 es divisible por k, la respuesta es $\frac{1000}{k}$ (todos los equipos tienen el mismo número de personas). Si 1000 no es divisible por k, la respuesta la obtenemos sumando 1 al número entero que va antes de la coma en $\frac{1000}{k}$.
- Si hay un total de $n \cdot k$ palomas en n palomares, siempre hay un palomar con k o más palomas, porque o todos tienen k palomas, o hay algunos que tienen menos y otros necesariamente tienen más. Si hay $n \cdot k + 1$ palomas en n palomares, siempre hay un palomar con $k + 1$ o más palomas.

□

El principio del palomar tiene la siguiente generalización:

Sean n, k números naturales. Si tenemos n cajas y colocamos más de $n \cdot k$ objetos en ellas, entonces hay al menos una caja con más de k objetos.

Quizás tu sentido estético rechace el uso de letras para referirse a números. Al fin y al cabo, el programa se llama *Cifras y letras* y no *Letras y también letras*. Aquí tienes una versión sin letras:

Queremos colocar una serie de objetos en unas cajas. Si el resultado de dividir el número de objetos entre el número de cajas es mayor que un cierto número natural, entonces hay al menos una caja que tiene más objetos que ese número natural.

Ejemplo resuelto. En Madrid hay ahora mismo más de 10 personas con el mismo número de pelos en la cabeza.

[1] Estamos preguntando que, de todos los números naturales posibles, encuentres el más grande que satisface que siempre hay algún palomar con ese número (o más) de palomas.

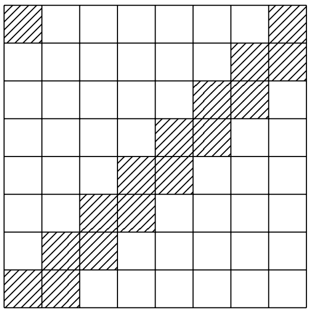
Solución. Se estima que el número de pelos que tiene una persona en su cuero cabelludo está entre 100.000 y 150.000. Por muy peluda que sea una persona, podemos asumir que no tendrá 300.000 pelos o más. En Madrid hay más de 3 millones de personas, así que el resultado se sigue del principio del palomar: hay una caja por cada número de pelos entre 0 y 299.999 (300.000 cajas) y más de $300.000 \cdot 10$ objetos (el número de habitantes de Madrid). □

Problema 3. Marcamos 5 puntos en el cuadrado $ABCD$. Demostrar que al menos dos de ellos están a distancia como mucho $\frac{1}{2}|AC|$.

Solución. Dibujemos 2 líneas rectas a través del centro del cuadrado, paralelas a sus lados. Estas rectas cortan el cuadrado en 4 cuadrados idénticos. Por el principio del palomar, al menos 2 de los 5 puntos se encuentran en uno de estos cuadrados, y la distancia entre ellos no excede la longitud de la diagonal de este cuadrado. □

Problema 4. En una cuadrícula 8×8, ¿cuál es el número máximo de cuadrados que se pueden marcar para que no haya tres o más cuadrados marcados en ninguna fila ni columna?

Solución. Como hay 8 filas, si hubiera $2 \cdot 8 + 1 = 17$ cuadrados marcados o más, alguna fila tendría 3 o más cuadrados marcados. Esto demuestra que no se pueden marcar 17. Pero 16 sí:



□

Problema 5. Lanzamos 50 dardos sobre un tablero de 70×70 centímetros. Todos los dardos caen en el tablero. Demostrar que hay al menos 2 dardos que están a distancia menor de 15 cm.

Solución. Dividimos el tablero en cuadrados de 10×10 cm (hay 49 de estos cuadrados). Por el principio del palomar, hay dos dardos que caen en el mismo cuadrado. La distancia máxima entre dos puntos del cuadrado es la diagonal de éste, que es $\sqrt{200} < 15$ (para calcular la diagonal usamos en Teorema de Pitágoras). □

Coloración

La idea del método de coloración consiste en dividir los objetos matemáticos en grupos, dotándolos de ciertas propiedades. A cada grupo se le asigna un color, y luego usamos esta división para encontrar la solución correcta. Muchos problemas comparten esta misma idea: colorear una tabla con varios colores de manera que se evidencie que alguna condición del problema no puede cumplirse.

Los típicos ejemplos de problemas de coloración son problemas con un tablero de ajedrez. Estos problemas se pueden resolver utilizando las propiedades de este tablero y las características de los "movimientos" de las piezas de ajedrez. Entre las propiedades del tablero de ajedrez a menudo hay que fijarse en el número total de casillas y la cantidad de casillas negras y blancas por separado.

Ejemplo resuelto. ¿Es posible que un caballo de ajedrez recorra todas las casillas del tablero 5×5 y regrese a la casilla de inicio?

Solución. Al colorear el tablero de la misma forma que un tablero de ajedrez obtendremos 13 casillas negras y 12 blancas.

Supongamos que el caballo empieza en una casilla negra. Entonces después de 24 jugadas estará en una casilla negra y por lo tanto no podrá volver a la casilla inicial en la última jugada. □

Problema 6. De un tablero de ajedrez estándar de 8×8 se recortaron las casillas C5 y G2. ¿Es posible cubrir lo que queda con fichas de dominó de 1×2? ¿Y si se recortaron las casillas C6 y G2?

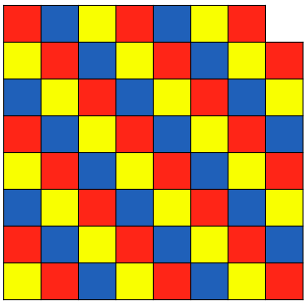
Solución. Cada ficha de domino ocupa un casilla negra y una blanca. Por lo tanto, en el primer caso la respuesta es negativa porque las dos casillas son del mismo color (negro) y por lo tanto el tablero tendrá 30 casillas negras y 32 blancas.

En el segundo caso la respuesta es positiva. Encuentra la solución explícita. □

A veces hay que buscar una coloración diferente a la estándar.

Ejemplo resuelto. ¿Es posible cubrir con baldosas rectangulares de tamaño 1×3 un tablero rectangular de tamaño 8×8 en el que se ha recortado una casilla en una esquina?

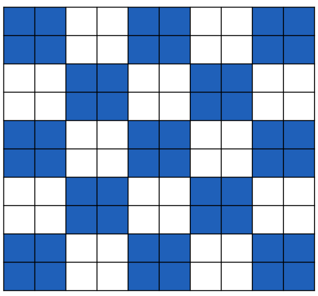
Solución. Coloreamos el tablero en tres colores:



Hay 22 casillas rojas, 20 azules y 21 amarillas. Sin embargo, cada pieza de tamaño 1×3 cubre una casilla de cada calor (esto no depende de la forma en la que la pongamos en el tablero). Por lo tanto, no se puede cubrir con baldosas rectangulares de tamaño 1×3 un tablero rectangular de tamaño 8×8 en el que se ha recortado una casilla en una esquina. □

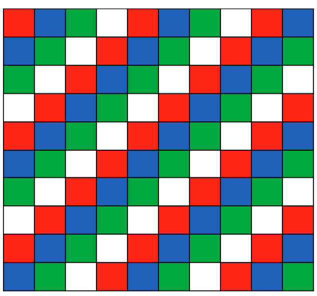
Problema 7. Demostrar que un tablero de 10×10 no se puede cubrir con rectángulos de tamaño 1×4.

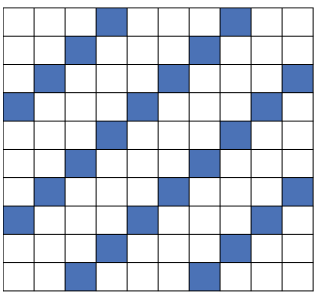
Solución. Coloreamos el tablero en dos colores:

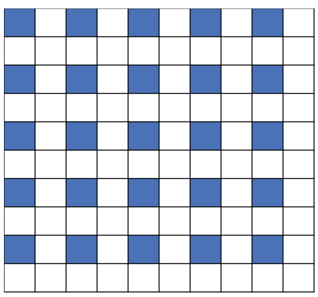


Ha 48 casillas blancas y 52 azules. Sin embargo ,un rectángulo de tamaño 1×4 cubre 2 de cada calor. Esto implica que no se puede cubrir el tablero con rectángulos de tamaño 1×4

Otras soluciones:







En la primera, cada rectángulo cubre una casilla de cada color, pero no hay el mismo número de casillas de cada color. En la segunda, cada rectángulo cubre una casilla azul y 3 blancas, hay 24 casillas azules, pero $24 \cdot 4 < 100$. En la tercera, cada rectángulo cubre un número par de casillas azules (0 o 2), pero hay 25 casillas azules en total. $\square$

Problemas

Problema 8. Se toman 28 puntos en el interior de un cubo de lado 3. Probar que hay al menos dos puntos a distancia menor o igual que $\sqrt{3}$.

Solución. Dividimos el cubo inicial en 27 cubitos más pequeños, de lado 1. Por el principio del palomar, al menos dos de los 28 puntos están dentro de un mismo cubito. La mayor distancia a la que pueden estar es $\sqrt{3}$, la longitud de la diagonal del cubito. $\square$

Problema 9. Tenemos 8 números naturales distintos no mayores de 15. Demostrar que entre sus diferencias positivas por pares hay tres iguales.

Solución. Puede haber 14 diferencias diferentes, del 1 al 14. Estas son los 14 palomares en los que colocaremos a las palomas. ¿Quiénes serán nuestras palomas? Por supuesto, deberían ser las diferencias entre los pares de números naturales que se nos da y son 28. Como son 28 palomas y 14 palomares, podría haber exactamente dos palomas en cada palomar (y por lo tanto, cada palomar tendrá menos de tres).

Aquí necesitamos usar una consideración adicional: no más de una paloma puede estar en el palomar con el número 14, porque el número 14 se puede escribir como la diferencia de dos números naturales que no excedan 15 de una sola manera: $14 = 15 - 1$. Entonces, en los 13 palomares restantes se encuentran al menos 27 palomas, y aplicando el principio de palomar generalizado nos da el resultado deseado. $\square$

Problema 10. Nos dan 100 números enteros cualesquiera. Demuestra que hay 15 de ellos tales que la diferencia de cualesquiera dos números de esos 15 es divisible por 7.

Solución. Hay 7 restos posibles al dividir por 7 (del 0 al 6). Como $100 > 7 \cdot 14$, el principio del palomar nos dice que habrá al menos uno de estos restos que corresponde a dividir 15 (o más) de nuestros 100 números por 7. La diferencia de dos cualesquiera de estos 15 números será divisible por 7. $\square$

Problema 11. En un papel cuadriculado están marcadas 2000 celdas al azar. Demostrar que entre ellas siempre es posible elegir por lo menos 500 celdas que no se toquen (se considera que las celdas que tienen al menos un vértice común se tocan).

Solución. Dividimos el papel el cuadrados 2×2 y cada uno de ellos lo pintamos con 4 colores, siempre en el mismo orden. Todos las celdas de un mismo color no se tocan y hay 500. $\square$

Problema 12. ¿Es posible hacer un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con un agujero de $1 \times 1 \times 1$ en el centro con 13 ladrillos de $1 \times 1 \times 2$?

Solución. Vamos a colorear en blanco y negro (como en un tablero de ajedrez) los cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$ que forman el cubo sin centro y los ladrillos. En 13 ladrillos hay igualmente (13 cada uno) cubos blancos y negros, y en un cubo de $3 \times 3 \times 3$ sin centro, hay 12 de un color y 14 de otro. Por lo tanto no es posible hacer un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con un agujero de $1 \times 1 \times 1$ en el centro con 13 ladrillos de $1 \times 1 \times 2$.

Respuesta: No es posible. $\square$

Problema 13. Demuestra que un grafo con n vértices, cada uno de grado no menor que $\frac{n-1}{2}$, es conexo.

Solución. Consideremos dos vértices arbitrarios y supongamos que no están conectados por un camino. Según la condición, cada uno de estos dos vértices está conectado con al menos $\frac{n-1}{2}$ aristas; además, todos los vértices mencionados son diferentes, ya que si dos de ellos son iguales, entonces hay un camino que conecta los dos vértices originales.

Así, en el grafo hay al menos $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 = n + 1$ vértices. Esto lleva a una contradicción. $\square$

Problema 14. Hay una habitación con forma de triángulo equilátero de 20 metros de lado. Si en la habitación hay 5 adolescentes aromáticos/as, demuestra que hay al menos 2 de ellos que están a 10 metros o menos de distancia.

Si hay 17 en la habitación, demuestra que hay dos menos de 5 metros.

¿Y si hay 1025?

Solución. Si dividimos la habitación en 4 triángulos equiláteros de 10 metros de lado (véase *triforce*), el principio del palomar dice que hay 2 adolescentes en el mismo triángulo, y por tanto tendrán que estar al menos a 10 metros de distancia. Si hay 17 adolescentes, alguno de estos 4 triángulos contiene al menos 5 adolescentes. Podemos repetir el mismo argumento con un triángulo de lado la mitad para concluir que hay 2 al menos a 5 metros de distancia. Si hay 1025 podemos repetir esto varias veces: en un triángulo de lado 10 habrá al menos 257, si dividimos ese habrá un triángulo de lado 5 que tenga al menos 65, y en este habrá un triángulo de lado 2,5 que tenga al menos 17, y este ya sabemos que contiene 2 a distancia como mucho $2,5/4$. □

Problema 15. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes, y todos son hombres o mujeres. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo género.

Solución. Si dividimos 201 entre 5 nos da 40 con resto 1, por lo que tiene que haber al menos 41 personas con la misma nacionalidad, de los cuales al menos 21 tienen el mismo género. Demostremos por reducción al absurdo que en cualquier grupo de 21 personas de entre los asistentes a la reunión hay 5 que tienen la misma edad. Supongamos que no fuera así. Cada edad la tienen como mucho 4 personas, por lo que hay personas de al menos 6 edades diferentes en el grupo de 21 personas, y se podría formar un grupo de 6 personas en el que no hay dos que tengan la misma edad (hemos llegado a una contradicción). Por tanto, de entre las (al menos) 21 personas que sabemos que tienen la misma nacionalidad y género, podremos encontrar a 5 que además tienen la misma edad. □

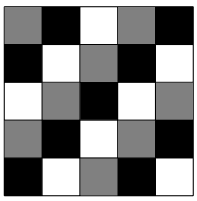
Problema 16. Tom Sawyer quiere pintar una valla de tablas de madera muy larga de tal forma que dos tablas entre las cuales hay exactamente dos, tres o cinco tablas deben pintarse en diferentes colores. ¿Cuál es la menor cantidad de colores que necesitará Tom para este trabajo?

Solución. Dos colores (digamos, blanco y rojo) no son suficientes: habiendo pintado el tablero número 1 de blanco, Tom tendrá que pintar los tableros numerados 4, 5 y 7 de rojo. Entonces habrá exactamente dos tableros entre los tableros rojos número 4 y número 7, lo que viola la condición.

Tres colores son suficientes: Tom puede pintar tres tableros seguidos de blanco, luego tres tableros de azul, luego tres tableros de rojo, luego tres nuevamente de blanco, y así sucesivamente. En este caso, no habrá más de un tablero entre tableros del mismo color (si están en el mismo triple), o al menos seis (si están en diferentes triples). □

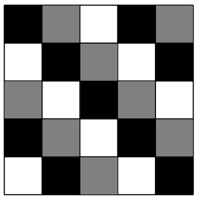
Problema 17. Ocho rectángulos 1×3 y un cuadrado 1×1 cubren completamente un tablero 5×5. Demuestra que el cuadrado 1×1 se encuentra necesariamente en el cuadrado 1×1 del centro del tablero.

Solución. Coloreamos el tablero de esta manera:



Cada rectángulo 1×3 ocupa tres colores distintos. Por tanto, los 8 rectángulos ocuparán 8 cuadrados de cada color. Hay 9 cuadrados negros, 8 grises y 8 blancos. Por tanto, el cuadrado 1×1 se encuentra en un cuadrado negro necesariamente.

Ahora, coloreamos el tablero de la siguiente manera:



El argumento anterior demuestra que el cuadrado 1×1 tiene que estar en un cuadrado negro. El único cuadrado que está coloreado de negro en ambas maneras de colorear el tablero es el del centro. $\square$

Problema 18. En una línea recta están marcados 50 segmentos cerrados (pueden tener intersecciones y también uno puede estar dentro de otro). Demostrar que, o bien hay ocho segmentos que tienen un punto en común, o hay ocho segmentos disjuntos.

Solución. Sea $[a_1, b_1]$ el intervalo con el extremo derecho más pequeño. Si el número de intervalos que contienen el punto b_1 es mayor que 7, entonces el problema está resuelto. Si no es mayor que 7, entonces hay al menos $50 - 7 = 43$ intervalos que se encuentran completamente a la derecha del punto b_1. Elegimos entre ellos el intervalo $[a_2, b_2]$ con el extremo derecho más pequeño. Entonces hay dos posibilidades: b_2 pertenece a ocho intervalos o hay $50 - 2 \cdot 7 = 36$ intervalos que se encuentran completamente a la derecha del punto b_2. Continuando así, encontraremos un punto que pertenece a ocho segmentos u obtendremos siete intervalos disjuntos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_7, b_7]$ tal que a la derecha de b_k se encuentran por lo menos otros $50 - 7 \cdot k$ intervalos, es decir a la derecha de b_7 se encuentra un intervalo más $[a_8, b_8]$. Por lo tanto, hay ocho intervalos disjuntos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_8, b_8]$. $\square$

Problema 19. En una carretera de circunvalación hay 25 oficiales de policía situados a intervalos iguales. Los policías están numerados en algún orden del 1 al 25. Se requiere que cambien posición para que nuevamente haya un policía en cada puesto y que estén situados según su número en el sentido de las manecillas del reloj (después del número 1 hay un número 2, después del número 2 hay un número 3, etc.). Demuestra que si lo hacen de modo que la distancia total recorrida entre todos los policías sea la menor posible, entonces uno de los policías permanecerá en su puesto.

Solución. Vamos a suponer que la longitud del camino es 25.

Supongamos que todos los policías han cambiado de sitio. Probemos que la distancia total recorrida puede reducirse.

Al trasladares a su nuevo puesto al menos 13 policías se dirigían a un nuevo lugar en una dirección (en el sentido de las agujas del reloj o en su contrario). Supongamos que fue en el sentido de las agujas del reloj. Consideremos una nueva distribución de los policías que se obtiene de la actual moviendo a todos los policías en un puesto en sentido contrario a las agujas del del reloj. Vemos que al menos 13 policías recorrieron las distancias de longitud 1 menos de la original, y para el resto, el aumento es no más de 1.

Con estos hemos demostrado la distancia total recorrida puede reducirse. $\square$

Problema 20. El fondo de una caja rectangular está pavimentado con mosaicos de 1×4 y 2×2. Los mosaicos se derramaron fuera de la caja y se perdió un mosaico de 2×2. Lo reemplazaron con un mosaico de 1×4. Demuestre que ahora el fondo de la caja no se puede pavimentar.

Solución. Consideramos una coloración de 4 colores tal que cada mosaico de 2×2 contenga exactamente una celda del color 1, y cada mosaico de 1×4 no contenga o contenga dos celdas del color 1. Por lo tanto, la paridad del número de mosaicos de tipo 2×2 debe coincidir con la paridad del número número de celdas de color 1. Esto prueba la afirmación del problema. $\square$

Problema 21. Hay 100 fichas en orden, numeradas del 1 al 100. Podemos hacer 2 movimientos:

- Por el precio de un euro, podemos intercambiar dos fichas vecinas.
- Gratis, podemos intercambiar dos fichas que estén a distancia 4 (con 3 fichas entre las dos).

¿Qué cantidad mínima de euros habrá que gastar para reorganizar las fichas en orden inverso?

Solución. Cada ficha debe cambiar la paridad de su número. Una operación gratuita no cambia la paridad, mientras que una operación de pago la cambia para dos fichas. Por lo tanto, necesitaremos al menos 50 euros.

Enumeremos las fichas en orden del 0 al 99. Pintemos las celdas en cuatro colores: $abcdabcd \dots d$. Una operación gratuita cambia fichas en celdas del mismo color más cercanos. Por lo tanto, en celdas del mismo color, las fichas se pueden reorganizar de forma gratuita en cualquier orden. Cambiemos las fichas en todos los pares de bc y da: son 49 operaciones de 1 euro cada uno. Las fichas del 1 al 98 ya se puede colocar en la forma requerida de forma gratuita. Nos queda colocar 0 y 99. Coloquemos las fichas 0 y 99 una al lado de la otra y cambiémoslos con la última operación pagada y organicemos todas las fichas en el orden correcto.

Respuesta:
50 euros □

Problema 22. Pintaremos un 10% de la superficie de una esfera de rojo, y el 90% restante de azul. Demuestra que podemos inscribir en la esfera un cubo de tal manera que todos sus vértices sean azules.

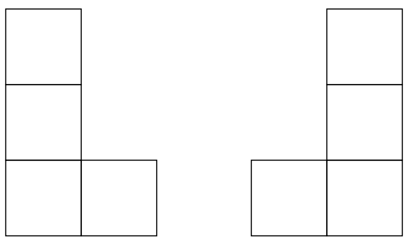
Solución. Considera un cubo aleatoriamente inscrito. La probabilidad de que un vértice sea rojo es $\frac{1}{10}$. Entonces la probabilidad de que al menos un vértice sea rojo ¡no supera $8 \times \frac{1}{10} < 1$! Como este suceso no es del todo seguro, habrá casos en los que todos los vértices serán azules. □

Problema 23. Los vértices de un polígono convexo están pintados de tres colores. Están presentes todos los colores y no hay dos vértices adyacentes del mismo color. Demostrar que el polígono se puede dividir en triángulos por diagonales de tal manera que cada triángulo tenga vértices de tres colores diferentes.

Solución. Denotemos los colores por los números 1, 2, 3. Vamos a argumentar por inducción sobre el número n de vértices del polígono. La base ($n = 3$) es trivial.

El paso de inducción: Sea $n > 3$. Elijamos dos vértices A y B del mismo color, sea el color 1. Los puntos A y B dividen el contorno del polígono en dos caminos. Cada un de estos caminos tiene un vértice de color diferente del 1. Nótese que es posible encontrar dos puntos C y D de los colores 2 y 3 tales que C y D se encuentran en caminos diferentes. De hecho, esto es fácil de hacer si cada uno de los dos caminos tiene vértices tanto del color 2 como del color 3. Si en uno de los caminos no hay vértices, digamos, de color 2, entonces en este camino todos los vértices son de color 3 o 1, y por lo tanto, en el otro camino hay un vértice de color 2. Dividamos nuestro n-gono en dos polígonos usando la diagonal CD. Cada uno de estos polígonos satisface la condición del problema. Por la hipótesis de inducción, cada uno de ellos se divide en triángulos cuyos vértices están coloreados de diferentes colores. Esto dará una partición del polígono original. □

Problema 24. Tenemos un tablero $n \times n$ al que le faltan los cuadraditos 1×1 de las cuatro esquinas. El objetivo de este problema es determinar para qué valores de $n \geq 3$ se puede cubrir (sin superponer las piezas) completamente el tablero con piezas de tetris de tipo "L" y "J", es decir, con piezas de estas formas, donde cada cuadradito es de 1×1:



a) Demuestra que si n es impar no podemos cubrir el tablero de esa forma.

b) Demuestra que tampoco podemos hacerlo si n es divisible por 4.

c) Demuestra que si n es un número par no divisible por 4, entonces sí se puede cubrir el tablero de esa forma.

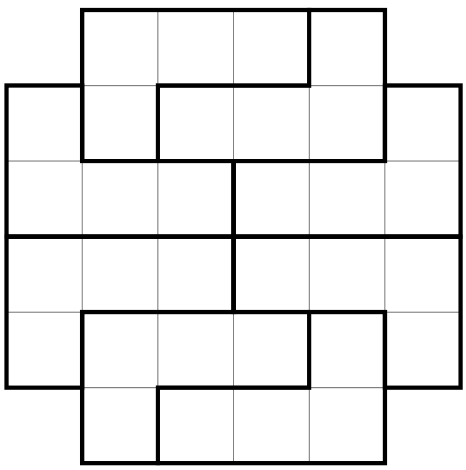
Solución. a) Nuestro tablero al que le faltan las cuatro esquinas tiene $n^2 - 4$ cuadraditos 1×1.

Si n es impar, $n^2 - 4$ es impar, y las piezas que tenemos tienen un número par de cuadraditos. Por tanto, si n es impar, no se puede cubrir el tablero con las piezas que tenemos.

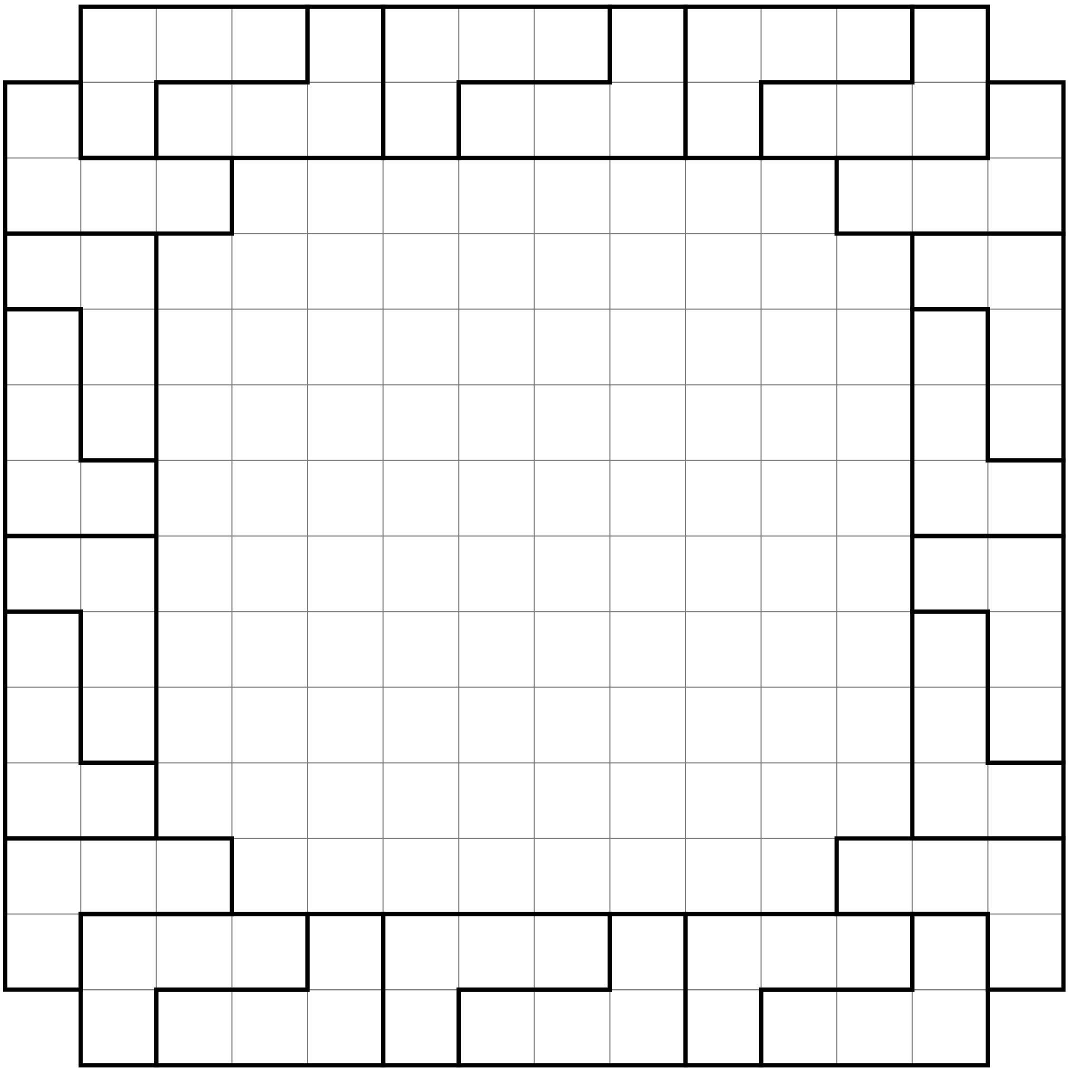
b) Suponemos que $n = 4k$, y que podemos cubrir el tablero de la manera deseada. Coloreamos cada fila de nuestro tablero de un solo color, alternando entre negro y blanco. Con esta coloración hay $\frac{n^2-4}{2} = 8k^2 - 2$ cuadraditos de cada color en nuestro tablero. Cuando pongamos una de esas piezas en el tablero, ocuparán tres cuadraditos de uno de los colores y un cuadradito del otro. Fijamos una manera de cubrir el tablero de la manera deseada, y llamamos a al número de piezas que ocupan tres cuadrados negros en esa forma de cubrir el tablero. Habrá $\frac{n^2-4}{4} - a = 4k^2 - 1 - a$ piezas que ocupen tres cuadrados blancos. Por tanto, el número de cuadrados negros es $3a + (4k^2 - 1 - a) = 2a + 4k^2 - 1$. Este número es impar, y según nuestro argumento, debería ser igual a $8k^2 - 2$, que es un número par. Hemos llegado a una contradicción, y esto nos indica que era imposible cubrir el tablero de la manera deseada.

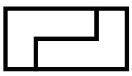
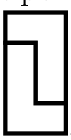
c) Si n es par y no es divisible por 4, entonces es de la forma $4k + 2$, donde $k \geq 1$ (ya que $n \geq 3$ en el enunciado). Hacemos el ejercicio por inducción sobre k.

El caso base corresponde a $k = 1$, y un tablero de esas dimensiones se puede cubrir así:



Para demostrar el paso de inducción, tenemos que ver que si sabemos cubrir el caso k ($n = 4k + 2$), entonces sabremos cubrir el caso $k + 1$ ($n = 4k + 6$). Hacemos el dibujo para $k = 2$ para ilustrar el proceso, pero el argumento es el mismo en todos los casos: La idea es cubrir el borde en el caso $k + 1$ de manera que lo que quede restante equivalga a cubrir el caso k. Cubrimos el borde así:



Vemos que en un tablero correspondiente al caso $k+1$, podemos cubrir el borde de arriba (y también el de abajo) con $k+1$ bloques de tipo , el centro del borde de la izquierda (y también el de la derecha) con k bloques de tipo , y cuatro piezas extra situadas en los extremos de los bordes derecho e izquierdo. Así, en el centro, queda por cubrir un caso análogo al caso k, que sabemos cubrir por la hipótesis de inducción. Esto termina nuestra demostración.

$\square$

Problema 25. En un manual de botánica, cada planta se caracteriza por 100 rasgos (cada rasgo está presente o ausente). Las plantas se consideran diferentes si se diferencian en al menos 51 rasgos.

(a) Demuestra que el manual no puede contener un conjunto con más de 50 plantas en que cada par de ellas es diferente.

(b) ¿Puede ser exactamente 50?

Solución. a) Supongamos que hay un conjunto A de 51 plantas diferentes. Fijamos un rasgo. Entonces k de las plantas de A tienen este rasgo, y $51-k$ no lo tienen. Por lo tanto, el número de pares que no coinciden en este rasgo es igual a

$$k \cdot (51-k) \leq 25 \cdot 26.$$

En total, no puede haber más de $100 \cdot 25 \cdot 26$ diferencias por 100 rasgos. Pero según la condición del problema, debe haber por lo menos

$$51 \cdot \binom{51}{2} = \frac{51^2 \cdot 50}{2} > 100 \cdot 25 \cdot 26.$$

Contradicción.

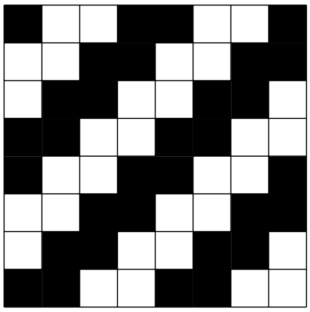
b) Supongamos que hay un conjunto A de m plantas tal que cualquier par de plantas de A es diferente. Agreguemos una característica más a la descripción: la paridad del número de características presentes en una planta dada. Obtenemos un nuevo manual en el que se utilizan 101 rasgos para describir una planta, y cualquier par de plantas de A se difiere en al menos 52 rasgos (si las descripciones originales diferían exactamente en 51 rasgos, entonces la paridad de la cantidad de rasgos disponibles es diferente para ellas).

Procediendo de la misma forma que en (a), obtenemos que el número total de diferencias es por lo menos $52 \cdot \binom{m}{2}$, y es no superior que $101 \cdot \frac{m^2}{4}$. Concluimos que $m \leq 34$. Entonces, en el nuevo manual, y por lo tanto en el original, no puede haber más de 34 plantas diferentes.

□

Problema 26. ¿Se puede cubrir completamente un tablero de ajedrez de 8×8 con quince rectángulos 1×4 y un cuadrado 2×2?

Solución. Coloreamos el tablero de esta manera:



Cada pieza 1×4 cubre dos cuadrados blancos y dos negros. La pieza 2×2 cubrirá un cuadrado blanco y tres negros o tres blancos y un negro. Por tanto, si se pudiera cubrir el tablero completamente de la manera que nos dicen, en total habría dos cuadrados más de un color que de otro en la coloración de arriba. Pero hay el mismo número de cuadrados blancos que negros en esa coloración (32), así que es imposible cubrir el tablero de la manera que nos dicen. □

Problema 27. Juan tiene 3 años y solo conoce el número 1. Demuestra que puede escribir un número divisible por 123.

Solución. Consideremos los números cuya notación decimal contiene solo unos: 1, 11, 111, ... Dado que hay infinitos números de este tipo, hay dos números entre ellos que tienen el mismo resto cuando se dividen por 123. La diferencia entre estos dos números tiene el aspecto $A = 1 \dots 10 \dots 0$. Es decir, se escribirá como varios unos seguidas de ceros. Además, el número A es divisible por 123. Como 123 es coprimo con 10, el número que se obtiene de A al eliminar los 0 también es divisible por 123. □

Problema 28. Nos dan 7 segmentos cuyas longitudes son como poco 1 cm y como mucho 10 cm. Demuestra que hay 3 de estos segmentos con los que puedes formar un triángulo.
Pista: Tres segmentos de longitudes a, b y c (con $0 < a \leq b \leq c$) pueden formar un triángulo cuando $a + b > c$.

Solución. Dividimos el intervalo $[1, 10]$ en los tres intervalos disjuntos $[1, 2)$, $[2, 4)$ y $[4, 10]$. Por el principio del palomar, uno de estos intervalos contiene 3 segmentos.

Si hay tres segmentos en $[1, 2)$, entonces forman un triángulo: Esto es verdad porque, si a_1, a_2 y a_3 son sus longitudes ordenadas de menor a mayor, entonces $a_1 + a_2 \geq 1 + 1 = 2 > a_3$.

Si hay tres segmentos en $[2, 4)$, entonces forman un triángulo: Esto es verdad porque, si a_1, a_2 y a_3 son sus longitudes ordenadas de menor a mayor, entonces $a_1 + a_2 \geq 2 + 2 = 4 > a_3$.

Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, entonces hay como poco 3 segmentos cuyas longitudes están en $[4, 10]$ y como mucho dos segmentos cuyas longitudes están en $[1, 2)$ y $[2, 4)$ respectivamente. Hacemos distintos casos.

- Si no hay ningún segmento cuya longitud esté en $[2,4)$, entonces podríamos haber dividido la unión de $[1,2)$ y $[4,10]$ en $[1,2)$, $[4,8)$ y $[8,10)$ y aplicar el principio del palomar para obtener que hay tres segmentos cuyas longitudes están en uno de estos tres intervalos. Argumentando como antes, estos tres segmentos forman un triángulo.

- Si hay algún segmento cuya longitud está en $[2,4)$ y dos segmentos con longitudes en $[4,10]$ cuyas longitudes difieren por menos de 2 cm, entonces podemos construir un triángulo con esos tres segmentos.

- Si hay tres segmentos en $[4,10]$ de longitudes $4 \leq a \leq b \leq c \leq 10$, con $b-a \geq 2$ y $c-b \geq 2$, entonces $a+b \geq 4+6=10$, y la igualdad se da si y solo si $a=4$, $b=6$. Por tanto, o $a=4$, $b=6$ y $c=10$, o podemos construir un triángulo con esos tres segmentos. En particular, si hay 4 segmentos de longitudes en $[4,10]$ y algún segmento cuya longitud esté en $[2,4)$, podremos construir un triángulo.

- El único caso que nos queda por analizar es aquel en el que hay un segmento de longitud 4, otro de 6 y otro de 10, dos segmentos cuyas longitudes están en $[2,4)$ y dos segmentos cuyas longitudes están en $[1,2)$. Si los dos segmentos cuyas longitudes están en $[2,4)$ tuvieran una diferencia de longitudes menor que 1, formarían un triángulo con cualquiera de los dos segmentos cuyas longitudes están en $[1,2)$. Por tanto, podemos asumir que hay un segmento cuya longitud está en $[3,4)$, que formará un triángulo junto con los segmentos de longitud 4 y 6.

□

Problema 29. En la Asamblea de Madrid hay 136 diputados. Tenemos que formar comités con todos los diputados, de manera que cada diputado esté solamente en uno de los comités. Cada diputado odia a exactamente tres de los otros diputados, pero la relación de odiarse no tiene por qué ser mutua: si el diputado A odia al diputado B, entonces B no tiene por qué odiar a A. Al formar los comités, tenemos que seguir la siguiente regla: ningún diputado puede estar en el mismo comité que alguien a quien odia.

a) Encuentra una manera de odiarse unos diputados a otros tal que no es posible ponerlos en 6 comités.

b) Demuestra que siempre es posible repartir a los diputados en 7 comités.

Solución. a) Si ponemos a siete diputados en un círculo, y cada diputado odia a los tres que tiene a la derecha, todos ellos estarán en comités diferentes. El resto de diputados da igual a quién odien.

b) Vamos a demostrar que, para todo $n \geq 7$, si hay n diputados, cada diputado odia a como mucho 3 otros diputados, y ningún diputado puede estar en el mismo comité que alguien a quien odia, entonces podemos repartir a los n diputados en 7 comités. El caso base ($n=7$) es trivial (cada diputado está en un comité).

Supongamos que el resultado es cierto para n diputados, y asumamos que tenemos $n+1$ diputados. Como cada diputado odia a otros tres, habrá algún diputado (al que llamamos A) que es odiado por como mucho tres diputados. Consideramos el conjunto de los n diputados que no son A, y los dividimos en 7 comités (podemos hacerlo por la hipótesis de inducción). Como hay como mucho tres diputados que odian a A y tres diputados odiados por A, estos seis diputados estarán como mucho en 6 comités diferentes, y siempre nos quedará un comité en el que podemos meter a A y que se sigan cumpliendo la regla de formación de comités.

□

Problema 30. Sean a, b, c números reales distintos de 0 que satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{a}$$
$$b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{b}$$
$$c + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{c}$$

Demuestra que al menos dos de los tres números a, b, c son iguales.

Solución. Moviendo términos a ambos lados de la ecuación en cada una de las tres ecuaciones, vemos que son equivalentes a

$$a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b}$$
$$b - \frac{1}{b} = c - \frac{1}{c}$$
$$c - \frac{1}{c} = a - \frac{1}{a}$$

Definimos la función $f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$. Las tres ecuaciones anteriores son equivalentes a $f(a) = f(b) = f(c)$. Llamamos k al número $f(a)$. Para todo $x \neq 0$, tenemos que $f(x) = k$ si y solo si $x^2 - 1 = kx$, que nos da las soluciones

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$$

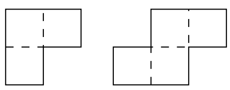
Como $a \neq 0$ satisface la ecuación $f(x) = k$, tenemos que a satisface que $a = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ o que $a = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$. Lo mismo ocurre para b y para c. Por tanto, como solo hay las mismas dos posibilidades para cada uno de los a, b y c, dos de ellos serán iguales. □

Problema 31. A cada punto del plano se le asigna un color entre rojo, azul y negro. Demostrar que hay dos puntos del mismo color cuya distancia es igual a 1.

Solución. Supongamos que dos puntos cuaesquiera que están a una distancia de 1 tienen colores diferentes. Considere un triángulo regular ABC con lados iguales a 1. Todos sus vértices son de diferentes colores. Sea el punto A_1 simétrico a A con respecto a la línea BC. Dado que $|A_1B| = |A_1C| = 1$, el color del punto A_1 es diferente de los colores de los puntos B y C, es decir, está coloreado del mismo color que el punto A. Estos argumentos muestran que si $AA_1 = \sqrt{3}$, entonces los puntos A y A_1 son del mismo color. Por lo tanto, todos los puntos de la circunferencia de radio $\sqrt{3}$ con centro A son del mismo color. Está claro que hay dos puntos en esta circunferencia, la distancia entre los cuales es igual a 1. Se obtiene una contradicción.

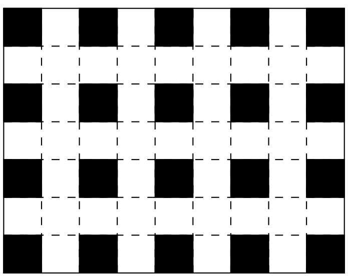
□

Problema 32. Tenemos dos tipos de piezas formadas por tres y cuatro cuadraditos 1×1 respectivamente:



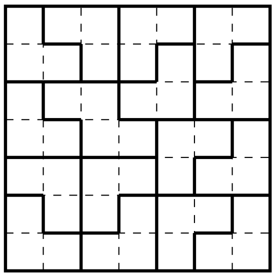
Queremos cubrir completamente un tablero rectangular con este tipo de piezas de manera que no se solapen. Permitimos rotar y reflejar las piezas. Usando sólo estos dos tipos de piezas, demuestra que es posible cubrir de esta manera un tablero $(2m-1) \times (2n-1)$ para todo par de números enteros $m, n \geq 4$, y que además el número mínimo de piezas que necesitaremos para hacerlo será mn.

Solución. Empezamos viendo que no se puede hacer esto con menos de mn piezas. Denotamos a cada cuadradito del tablero por (a, b), donde $1 \leq a \leq 2m-1$ y $1 \leq b \leq 2n-1$, empezando por abajo a la izquierda. Por ejemplo $(3, 2)$ es el tercer cuadradito por la izquierda y el segundo por abajo. Coloreamos de negro los cuadraditos del tablero que tienen las dos coordenadas impares. Por ejemplo, para $m = 5$ y $n = 4$, el dibujo es el siguiente:

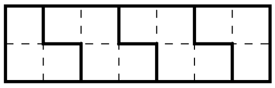


Así, hay mn cuadrados coloreados, y cada pieza ocupará como mucho uno de ellos, por lo tanto no se puede cubrir el rectángulo con menos de mn piezas.

Ahora, vamos a ver que el resultado es cierto si $n = 4$ para todo $m \geq 4$ por inducción. El caso base ($m = 4$) es cierto, como se puede ver en la siguiente imagen, en la que se usan 16 piezas:

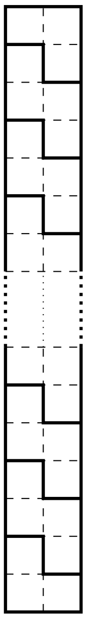


Además, vemos que añadiendo estos rectángulos de 4 piezas al caso base, obtenemos una forma de teselar los rectángulos $(2m - 1) \times 7$ para todo $m \geq 4$ con $4m$ piezas:



Por tanto, el resultado es cierto para tableros $(2m - 1) \cdot 7$ para todo $m \geq 4$.

Ahora, para ver que el resultado es cierto para tableros $(2m - 1) \times 7$, basta añadir por la derecha $n - 4$ rectángulos del tipo:



en los que hay dos piezas del primer tipo y $\frac{(2m-1)-3}{2} = m - 2$ piezas del segundo, así que hay m piezas en este rectángulo, y

$$4m + (n - 4)m = mn$$

piezas en la teselación del tablero $(2m - 1) \times (2n - 1)$ que hemos encontrado. $\square$

Problemas para hacer en casa

27 de septiembre

Problema 33. El Empire State Building tiene 102 pisos. Supongamos que un ascensor para 52 veces mientras desciende desde la última planta hasta la planta baja. Prueba que el ascensor ha parado en dos pisos cuya suma es 102.

Solución. Los pisos en los que ha podido parar el ascensor van desde el piso 1 hasta el 101. Hagamos parejas con estos números, de manera que su suma sea 102, y que van a ser los palomares. En total hay 51 palomares, que corresponden a las parejas

$$(1, 101),\ (2, 100),\ \ldots,\ (50, 52),\ (51, 51).$$

Como el ascensor ha hecho 52 paradas, en alguno de los nidos ha hecho dos paradas, es decir, ha parado en dos pisos cuya suma es 102. (Notar que en el último nido no puede parar dos veces.) □

Problema 34. Demuestra que todo polígono de 9 lados tiene un par de diagonales con un ángulo menor de $7°$.

Solución. Un polígono de 9 lados tiene $\frac{9\cdot 6}{2} = 27$ diagonales. Dibujemos 27 líneas rectas a través de un punto arbitrario, paralelas a estas diagonales. Dividirán el ángulo completo en 54 ángulos. Por lo tanto, uno de ellos no es mayor que $\frac{360°}{54} < 7°$. □

Problema 35. Tenemos 51 puntos en un cuadrado de lado 1. Demuestra que hay un círculo de radio $\frac{1}{7}$ que contiene a 3 de estos puntos

Solución. Dividimos el cuadrado en 25 cuadrados idénticos de lado $\frac{1}{5}$. La diagonal de estos cuadrados pequeños vale $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$. Como $51 = 25 \cdot 2 + 1$, habrá uno de estos cuadrados pequeños que contenga a 3 de los puntos. Este cuadrado pequeño está contenido en el círculo de radio $\frac{1}{7}$ y centro el centro de ese cuadrado pequeño. □

Problema 36. Tenemos un conjunto de 25 puntos en el plano de manera que si elegimos tres cualesquiera de ellos, hay dos que están a distancia menor que 1. Probar que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos a 13 de dichos puntos.

Solución. Escojamos un punto A arbitrario. Buscamos ahora un punto B que se encuentre a distancia mayor que 1 de A. Si no existiera tal punto, el problema ya estaría resuelto, pues el círculo centrado en A de radio 1 contendría a los 25 puntos, en particular a 13.

Si existe B a distancia mayor que 1, nuestros palomares van a ser los círculos de radio 1 centrados en A y B. Considerando ahora los 23 puntos restantes, y por las condiciones del problema, cada uno de ellos estará en el círculo con centro A o en el círculo con centro B. Por el principio del palomar, en alguno de los dos círculos habrá 12 puntos que, junto con el centro del círculo, nos asegura que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos 13 puntos. □

4 de octubre

Problema 37. Nos dan cien números enteros cualesquiera. Demuestra que hay 15 de ellos tales que la diferencia de cualesquiera dos números de esos 15 es divisible por 7.

Solución. Hay 7 restos posibles al dividir por 7 (del 0 al 6). Como $100 > 7 \cdot 14$, el principio del palomar nos dice que habrá al menos uno de estos restos que corresponde a dividir 15 (o más) de nuestros 100 números por 7. La diferencia de dos cualesquiera de estos 15 números será congruente con 0 módulo 7, es decir, divisible por 7. □

Problema 38. ¿De cuántas maneras se pueden escribir todos los números del 1 al 9 en las celdas de un tablero 3×3 de manera que la celda que contiene a cualquier número menor que 9 tiene un lado en común con la que contiene al número siguiente?

Solución. Coloreamos el tablero como un tablero de ajedrez en blanco y negro, con las celdas de las esquinas y la celda del centro en negro. Entre los números del 1 al 9 hay cinco impares y cuatro pares. Como los números impares y pares tienen que estar en colores distintos, los números impares están en las celdas negras y los pares en las blancas.

Si la celda del centro es un 1, hay cuatro posibilidades para poner el 2, dos para poner el 3, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 9, hay cuatro posibilidades para poner el 8, dos para poner el 7, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 3, hay cuatro posibilidades para poner el 2, dos para poner el 1, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 7, hay cuatro posibilidades para poner el 8, dos para poner el 9, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 5, hay cuatro posibilidades para poner el 6, dos para poner el 7, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

En total, hay $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ posibilidades. □

Problema 39. Un escarabajo está sentado en el centro de un cubo $3 \times 3 \times 3$. Puede pasar de un cubo $1 \times 1 \times 1$ a otro por una de sus 6 caras. Demuestra que no podrá recorrer todos los cubos $1 \times 1 \times 1$ sin pasar dos veces por el mismo cubo.

Solución. Vamos a colorear en blanco y negro (como en un tablero de ajedrez) los cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$ que forman el cubo. Supongamos el cubo central es blanco. Entonces hay 13 cubos blancos y 14 negros. En cada paso pasamos a un cubo $1 \times 1 \times 1$ de color difirente. Por lo tanto no es posible dar la vuelta a todos los cubos $1 \times 1 \times 1$ una vez. □

Problema 40. En cada celda de un tablero de 9×9 se sienta un escarabajo. Cuando suena el silbato, cada uno de los escarabajos se arrastra hacia una de las celdas adyacentes en diagonal. Después de esto en algunas celdas puede haber más de un escarabajo y algunas celdas estarán desocupadas. Demuestra que habrá al menos 9 celdas desocupadas.

Solución. Pintemos las lineas verticales del tablero en color blanco y negro alternando los colores. Como resultado, $5 \times 9 = 45$ celdas (5 lineas verticales) se pintarán de negro y solo 36 celdas se pintarán de blanco. Tengamos en cuenta que un escarabajo puede arrastrarse de una celda negra solo a una blanca, y de una blanca a una negra. Por lo tanto, después de que los escarabajos entraron en las celdas diagonalmente adyacentes, hay 36 escarabajos en 45 celdas negras. Esto significa que al menos 9 celdas negras resultaron desocupadas. □

Problema 41. Un tenista juega al menos un partido cada día para entrenar. Al mismo tiempo, para no trabajar demasiado, no juega mas de 12 partidos a la semana. Demuestre que es posible encontrar varios de esos días consecutivos durante los cuales el tenista jugó exactamente veinte partidos.

Solución. Consideremos diez semanas consecutivas. Supongamos que el tenista juegue b_k partidos en los primeros k días (de estos 70). Considere los números

$$b_0 = 0, b_1, \dots, b_{70}, b_0 + 20, \dots, b_{70} + 20.$$

Hay 142 números en total, cada uno de los cuales no excede de $10 \cdot 12 + 20 = 140$. Por lo tanto, hay dos números iguales entre ellos. Sea $b_i + 20 = b_j$ (obviamente, no hay iguales entre los números b_k), es decir, $b_j - b_i = 20$. Esto quiere decir que entre el $(i + 1)$-ésimo y j-ésimo días el tenista jugó exactamente 20 partidos. □