PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS 2024-25

Fechas: 11, 18 y 25 de octubre, 8 de noviembre de 2024
Manejando letras
Grupo: Marte y Neptuno (Soluciones)

En este tema vamos a demostrar hechos matemáticos mediante transformaciones de letras y usarlas también para resolver problemas que son difíciles de resolver sin estas manipulaciones.

Los más mayores de la clase tienen mucha más práctica que los más pequeños con el temario de esta hoja. Intentad **formar grupos con gente de vuestro curso**, para que todos podáis aprender a un ritmo adecuado. Hay muchos problemas, así que **escoged los que supongan un reto para vosotros.**

Si vas a 1º de ESO, si nunca has representado números por letras, o si quieres repasar porque no te sientes muy cómod@ usando letras, **empieza la hoja en el Problema 1. Si no, pasa directamente al Problema 3.**

Expresiones con una letra

Problema 1. Evalúa $2\cdot(n+3)$ para cada uno de los valores de n, es decir, sustituye n por el correspondiente número y escribe el resultado de la operación:

n	$2\cdot(n+3)$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Solución.

n	$2\cdot(n+3)$
1	8
2	10
3	12
4	14
5	16
6	18

□

Después de hacer este ejercicio, te puedes convencer de que **la expresión "$2\cdot(n+3)$" representa un número, pero** qué número representa **dependerá del valor que le demos a n.**

Como las **expresiones con letras** van a representar números, nosotros **vamos a operar con ellas como si fueran números**.

Las letras en las matemáticas suelen representar valores desconocidos, una especie de información clasificada que los y las matemáticos, como buenos detectives, descubren.

Ejemplo resuelto. Halla x en la expresión $2x + 7 = 10$

Solución. ¿Qué número hay que sumar al 7 para llegar al 10? Claramente, 3. Así que $2x = 3$, si el doble de nuestra incógnita da 3, x es la mitad, $x = 1,5$.

Podríamos hacerlo de otra manera: si para llegar al 10 hemos multiplicado un número por 2 y luego le hemos sumado 7, para deshacer las operaciones hay que invertirlas, además, por orden inverso. Así que restamos 7 al 10 y lo dividimos entre dos.

□

En el ejemplo anterior hemos resuelto una **ecuación** con una **incógnita**.

Para resolver ecuaciones, será necesario simplificar expresiones que tengan letras, cosa que vamos a practicar en el siguiente ejemplo. Te damos la respuesta a las dos primeras partes para que compruebes que lo has hecho bien, pero intenta hacerlo tú antes de mirar la solución.

Ejemplo resuelto. Vamos a simplificar la expresión $(2 \cdot n + 5) \cdot 7$ en varios pasos:

a) Calcula $(2 \cdot 3 + 5) \cdot 7$, es decir, halla el resultado de la expresión $(2 \cdot n + 5) \cdot 7$ cuando $n = 3$.

b) Simplifica todo lo posible la expresión $(2 \cdot n + 5) \cdot 7$ de manera que no te aparezca ningún paréntesis.

c) Para tener más seguridad en que no te has equivocado, evalúa el resultado de la parte b) en $n = 3$, y comprueba que obtienes el mismo resultado que en la parte a).

Solución.

a) $(2 \cdot 3 + 5) \cdot 7 = (6 + 5) \cdot 7 = 11 \cdot 7 = 77$. También lo podíamos haber calculado así:

$$(2 \cdot 3 + 5) \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 14 \cdot 3 + 35 = 42 + 35 = 77.$$

b) El primer método que hemos seguido en la parte anterior no nos ayuda, porque tendríamos que empezar hallando el resultado de $2 \cdot n$, y eso no sabemos qué es (depende de n, no tiene un único valor numérico). Tenemos que intentar operar todo lo posible con números antes de operar con la letra n. El segundo método que hemos seguido en la parte anterior nos será más últil. Siguiendo las cuentas que hemos hecho, obtenemos que

$$(2 \cdot n + 5) \cdot 7 = 2 \cdot n \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 14 \cdot n + 35.$$

La respuesta es $14 \cdot n + 35$, que también lo escribimos como $14n + 35$.

□

Ahora intenta tú este ejercicio similar al ejemplo resuelto anterior.

Problema 2. Vamos a simplificar la expresión $(n \cdot 6 - 9)/3$ en varios pasos:

a) Calcula $(2 \cdot 6 - 9)/3$, es decir, halla el resultado de la expresión $(n \cdot 6 - 9)/3$ cuando $n = 2$.

b) Simplifica todo lo posible la expresión $(n \cdot 6 - 9)/3$ de manera que no te aparezca ningún cociente ni ningún paréntesis.

c) Para tener más seguridad en que no te has equivocado, evalúa el resultado de la parte b) en $n = 2$, y comprueba que obtienes el mismo resultado que en la parte a).

Solución.

a) $(2 \cdot 6 - 9)/3 = (12 - 9)/3 = 3/3 = 1$. También lo podíamos haber calculado así:

$$(2 \cdot 6 - 9)/3 = \frac{2 \cdot 6 - 9}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} - \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3} - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1.$$

b) Como antes, el primer método que hemos seguido en la parte anterior no nos ayuda, porque tendríamos que empezar hallando el resultado de $n \cdot 6$, y eso no sabemos qué es (depende de n, no tiene un único valor numérico). Tenemos que intentar operar todo lo posible con números antes de operar con la letra n. El segundo método que hemos seguido en la parte anterior nos será más últil. Siguiendo las cuentas que hemos hecho, obtenemos que

$$(n \cdot 6 - 9)/3 = \frac{n \cdot 6 - 9}{3} = \frac{n \cdot 6}{3} - \frac{9}{3} = \frac{n \cdot 2 \cdot 3}{3} - 3 = n \cdot 2 - 3 = 2 \cdot n - 3.$$

La respuesta es $2 \cdot n - 3$, que también lo escribimos como $2n - 3$.

□

Problema 3. Piensa en un número. Multiplica el resultado por 4. Suma 16 al resultado. Divide el resultado por 2. Resta 7 al resultado. Resta el número original al resultado. Luego, resta el número original nuevamente. ¿Qué te ha salido? Compara el resultado con los de tus compañeros. ¿Por qué os ha salido el mismo número? Explica la solución llamando n al número que has pensado, y argumentando con expresiones que usen la letra n.

Solución. Representemos el número que has pensado con la letra n. Entonces, la expresión del resultado es: $(n \cdot 4 + 16)/2 - 7 - n - n = 2n + 8 - 7 - 2n = 1$. □

Intenta resolver el siguiente ejercicio antes de mirar su solución, y luego lee su solución si te atascas o para comprobar si lo has hecho bien.

Ejemplo resuelto.

a) En la pizarra, se escriben en fila cien números: $2, 5, \ldots$ y cada número, comenzando desde el segundo, es igual a la suma de los dos números vecinos. Encuentra el centésimo número.

b) En la pizarra, se escriben en fila cien números: $2, \ldots$ y cada número, comenzando desde el segundo, es igual a la suma de los dos números vecinos. Encuentra el centésimo número.

Solución. a) Escribamos los primeros números: $2, 5, 3, -2, -5, -3, 2, 5, \ldots$. Observemos cuidadosamente y veremos un bloque repetitivo de seis números. $2, 5, 3, -2, -5, -3$. Notaremos que cada número, comenzando desde el tercero, es igual a la diferencia entre los dos anteriores, es decir, se determina de manera única por los dos números anteriores. Por lo tanto, este bloque se repetirá. ¿Qué posición ocupa el centésimo número en el bloque? $100 = 6 \cdot 16 + 4$, lo que significa que es el cuarto número en el bloque, es decir, -2. Respuesta: -2.

b) Hay una sospecha de que la respuesta no depende del segundo número. Demostremos esto: llamemos al segundo número k y escribamos los primeros números: $2, k, k - 2, -2, -k, -k + 2, 2, k, \cdots$. Vemos que hay un período de seis números $2, k, k - 2, -2, -k, -k + 2$, similar a la parte a). Entonces la repuesta es también -2. □

Problema 4. En la pizarra, se escriben en fila cien números diferentes de cero. Se sabe que cada uno de ellos, excepto el primero y el último, es el producto de dos números vecinos. El primer número es igual a 5. ¿Qué número está escrito al final?

Solución. Otra vez sospechamos que la respuesta no depende del segundo número. Sea k el segundo número. Entonces obtenemos la siguiente sucesión:

$$5, k, \frac{k}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{k}, \frac{5}{k}, 5, k, \frac{k}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{k}, \ldots$$

Otra vez vemos que hay un periodo de seis números $5, k, \frac{k}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{k}, \frac{5}{k}$. Entonces la respuesta es $\frac{1}{5}$. □

Expresiones con varias letras

Hay veces que necesitamos introducir varias incógnitas, sin embargo, el problema puede ser la mar de sencillo.

Ejemplo resuelto. ¿Cuánto suman dos números si su media es igual a 19?

Solución. Llamemos los números a, b. Entonces su media es $m = \frac{a+b}{2} = 19$. Nosotros estamos buscando $a + b$, claramente es el doble, $a + b = 2 \cdot 19 = 38$. □

Este último ejemplo es muy importante: no podemos determinar el valor de los números a, b, no obstante, sí podemos hallar su suma.

Ejemplo resuelto. Andrés fue al zoo pero sólo se interesó por avestruces y jirafas. Al volver a casa, le dijo a su abuela, que compartía su pasión por estos animales, que había contado 22 ojos y 34 patas. ¿Cuántas jirafas vio Andrés?

Solución. Si llamamos a la cantidad de avestruces y j, la de jirafas, vemos que

$$2a + 2j = 22$$

porque cada animal tiene dos ojos y

$$2a + 4j = 34$$

porque los avestruces tienen 2 patas, mientras que las jirafas tienen 4. ¿Qué hacemos con estas ecuaciones? Una buena idea puede ser **restarle la primera a la segunda**. $2a$ se cancelan, $4j - 2j = 2j$ y $34 - 22 = 12$, de modo que $2j = 12 \Rightarrow j = 6$, es decir, Andrés vio 6 jirafas.

Otra forma de verlo es la siguiente: si todos los animales fuesen avestruces, habría 22 patas. Entonces nos "sobran" $34 - 22 = 12$ patas. Como cada jirafa tiene 2 patas "adicionales", tienen que pertenecer a 6 jirafas. □

Problema 5. Tres mandarinas y una manzana pesan 1 kilo. Tres manzanas y una mandarina pesan 1 kilo y 400 gramos. ¿Cuánto pesa una manzana y una mandarina juntas? ¿Y por separado?

Solución. Si sumamos los pesajes, vemos que 4 manzanas y 4 mandarinas juntas pesan 2 kilos y 400 gramos, por tanto, una manzana y una mandarina juntas pesan 4 veces menos, 600 gramos. Ahora restándolo de la primera ecuación (primer pesaje) vemos que dos mandarinas pesan 400 gramos, por lo que cada mandarina pesa 200 gramos, y cada manzana, 400 gramos. □

Problema 6. a) Asier salió a pasear en bici durante 4 horas a una velocidad de 22 km/h. ¿Cuánta distancia recorrió? Y si hubiera paseado n horas, ¿cuánta distancia habría recorrido?

b) Bárbara salió a caminar, y recorrió 10 kilómetros a una velocidad de 5 km/h. ¿Cuánto tiempo tardó? Y si hubiera recorrido n kilómetros, ¿cuánto tiempo habría tardado?

c) Carlos caminó durante 5 horas, primero en una carretera horizontal, luego subió una montaña y luego regresó al punto de partida por el mismo camino. La velocidad de Carlos fue de 4 km/h en la carretera horizontal, 3 km/h al subir la montaña y 6 km/h al bajar de la montaña. **Nuestro objetivo va a ser calcular la distancia total recorrida por Carlos, en kilómetros**. En principio, puede parecer que no tenemos los suficientes datos, pero vamos a hacer el problema paso a paso y ver que, usando letras, podemos llegar a la solución.

i) Llama h a la longitud de la carretera horizontal, y c a la longitud de la carretera en cuesta, ambas medidas en kilómetros. Halla una expresión para la distancia total recorrida por Carlos (esta expresión dependerá de h y c).

ii) Halla una expresión que dependa de h y c para el tiempo total que ha tardado Carlos en hacer todo ese recorrido, y simplifícala todo lo posible. Para ello, usa ideas del apartado b).

iii) Como el enunciado nos dice que en total Carlos ha tardado 5 horas, iguala la expresión que has hallado en el apartado ii) a 5. De esta igualdad, y usando el apartado i), deduce cuántos kilómetros ha recorrido Carlos en total (tu respuesta tiene que ser un número).

d) ¿Es posible encontrar la longitud de la carretera horizontal que ha recorrido Carlos?

Solución. a) Recorrió $22 \cdot 4 = 88$ kilómetros. Si hubiera paseado n horas, habría recorrido $22n$ kilómetros.

b) Bárbara tardó $\frac{10}{5} = 2$ horas. Si hubiera recorrido n kilómetros, habría tardado $\frac{n}{5}$ horas.

c) i) La respuesta es $2h+2c = 2(h+c)$, ya que recorre la distancia horizontal y la distancia en cuesta dos veces.

ii) Siguiendo el razonamiento de la parte b), recorrer la carretera horizontal en un sentido le lleva $\frac{h}{4}$ horas, por lo que recorrer la carretera horizontal en los dos sentidos le lleva el doble, es decir, $2 \cdot \frac{h}{4} = \frac{h}{2}$.

Similarmente, subir la montaña le lleva $\frac{c}{3}$ horas, y bajarla le lleva $\frac{c}{6}$ horas, por lo que sube y baja la montaña en

$$\frac{c}{3} + \frac{c}{6} = \frac{2c+c}{6} = \frac{3c}{6} = \frac{c}{2} \text{ horas.}$$

Por tanto, la respuesta a este apartado es $\frac{h}{2} + \frac{c}{2} = \frac{h+c}{2}$ horas.

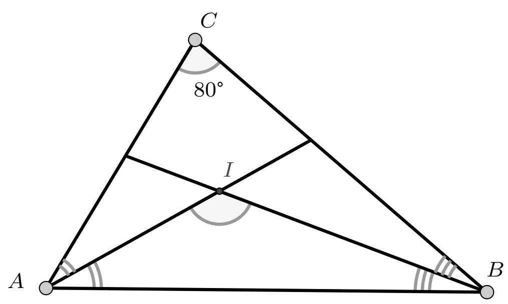
iii) Tenemos que $\frac{h+c}{2} = 5$. Multiplicando ambos lados por 4 obtenemos que $2(h+c) = 20$. Por tanto, usando el apartado i), vemos que Carlos ha recorrido 20 kilómetros.

d) No. Sólo sabemos el valor de $h+c$, pero no de h o c por separado. Por ejemplo, h podría ser 4 y $c = 6$; o h y c podrían ser ambas 5. Estas dos posibilidades están de acuerdo con todos los datos del enunciado, es decir, a Carlos le llevaría 5 horas recorrer esos caminos, así que no podemos saber el valor de h.

Observación: Las velocidades en el apartado c) se seleccionaron específicamente de manera que tengamos suficiente información para resolver el ejercicio. Si tomamos, por ejemplo, velocidades de 4, 3 y 5 km/h respectivamente, no podríamos encontrar $h+c$. □

Hay muchos problemas de geometría que requieren conocimientos geométricos mínimos para resolverlos (definiciones de bisectriz, punto medio, magnitud de un ángulo, suma de los ángulos de un triángulo) más **el arte de trabajar con las letras**.

Ejemplo resuelto. En el triángulo ABC, el ángulo $\angle C$ mide 80°. Encuentra el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.



Solución. Denotemos por I el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$. Queremos encontrar $\angle AIB$.

Sea $\alpha = \angle CAB$ y $\beta = \angle ABC$. Entonces, como la suma de los ángulos de cualquier triángulo es $180°$, aplicándolo al triángulo ABC obtenemos que $180° = 80° + \alpha + \beta$ y por lo tanto $\alpha + \beta = 100°$.

Como AI es la bisectriz del angulo $\angle CAB$, $\angle IAB = \frac{\alpha}{2}$. De la misma forma, $\angle ABI = \frac{\beta}{2}$. Por lo tanto, como la suma de los ángulos del triángulo AIB es de $180°$, obtenemos que

$$\angle AIB = 180° - (\angle IAB + \angle ABI) = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 130°.$$

□

Problema 7. Siguiendo los pasos del ejemplo resuelto anterior, deduce cuál sería el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ si el valor del ángulo C fuera de x grados.

Solución. En ese caso, $\alpha + \beta = 180° - x$, por lo que $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180°-x}{2}$, por lo que el ángulo que buscamos es

$$\angle AIB = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{180° - x}{2} = \left(\frac{180+x}{2}\right)^{\circ}.$$

□

Resumamos lo que hemos visto en esta introducción. **Las habilidades claves** para la resolución de varios tipos de problemas matemáticos son las siguientes:

- introducir letras,
- inventar expresiones a partir de letras,
- combinar ecuaciones, desigualdades, identidades, funciones a partir de expresiones.

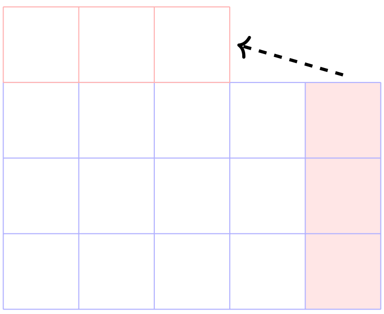
Problemas

Problema 8. Demuestra que el cuadrado de cualquier número es 1 más que el producto del siguiente número por el anterior. Intenta visualizarlo con rectángulos y escribirlo con letras.

Solución.

$$(n-1)(n+1) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$$

Se puede observar en este ejemplo: si tenemos un rectángulo $(n-1)\times(n+1)$ podemos llevarnos la última columna vertical y colocarla en horizontal arriba. Faltará un cuadradito para completar el cuadrado $n \times n$.



□

Problema 9. El cuadrado de 10 más 10 es múltiplo de 11. Comprobémoslo:

$$10 \times 10 + 10 = 110 = 11 \times 10$$

¿Es verdad que el cuadrado de 123456 más 123456 es múltiplo de 123457?

Solución. Primero usemos las letras. Si nuestro número es n, su cuadrado es $n \times n = n^2$. Y si lo sumamos con este mismo número nos da $n \times n + n$. Ahora hagamos un truco: $n = n \times 1$, ¿verdad? Ahora podemos aplicar la propiedad distributiva:

$$n \times n + n = n \times n + n \times 1 = n \times (n + 1)$$

¡Bingo! Vemos que el resultado es $n + 1$ multiplicado por algo, es decir, es múltiplo de $n + 1$, el número siguiente.

□

Problema 10. El profesor Quibble es un gran aficionado a los animales. Todas sus mascotas menos dos son gatos. Todas sus mascotas menos dos son perros. Todas sus mascotas menos dos son tortugas. ¿Podemos saber cuántas mascotas tiene y cuáles son? Plantea el problema usando letras.

Solución. Si escribimos los datos con letras llamando T la cantidad de tortugas, P, la de perros, G la de gatos y R la cantidad del resto de mascotas, tendremos $T + G + P + R - 2 = T$, simplificando (quitando T de ambos lados), $G + P + R = 2$. Análogamente, $T + G + R = 2, T + P + R = 2$.

De las ecuaciones $G + P + R = 2$ y $T + G + R = 2$ obtenemos que $P = T$. De las ecuaciones $T + G + R = 2$ y $T + P + R = 2$ obtenemos que $P = G$. Por tanto, $T = G = P$. Si el profesor tiene alguna tortuga, entonces el profesor tiene al menos un gato, y la ecuación $T + G + R = 2$ nos dice que $R = 0$ y que el profesor tiene un gato y una tortuga, y por tanto también un perro. Es decir, tiene tres mascotas en total: un perro, un gato y una tortuga. ¡Pero también puede ocurrir que no tenga ningún gato, ninguna tortuga ni ningún perro! Por ejemplo, puede tener dos canarios, o un canario y un periquito, y eso también satisface las condiciones del enunciado.

En resumen, no podemos saber cuántas mascotas tiene, pero tendrá 2 o 3. Si supiéramos que tiene 3 sí sabríamos qué mascotas tiene, pero si tiene 2 no. □

Problema 11. El profesor Quibble ha intentado averiguar cuánto pesan sus mascotas. Pero no ha conseguido pesarlos por separado, sino de dos en dos. El perro y el gato juntos pesaban 13 kilos. El perro y la tortuga, 17 kilos. El gato y la tortuga, 14 kilos. ¿Cuánto pesa cada animal?

Solución. Sumando las tres ecuaciones vemos que el doble de la suma de todos los pesos es $13+14+17 = 44$, por lo que juntos los tres animales pesan 22 kilos. De ahí que el perro pese 8kg, el gato, 5kg., y la tortuga, 9kg.

□

Problema 12. Un tren AVE mide 200 metros de largo y va de Madrid a Zaragoza a 300 km/h, saliendo a las 4 de la tarde. El tren Regional Exprés sale de Zaragoza a Madrid también a las 4 de la tarde, lleva una velocidad de 160 km/h y mide 50 metros de largo. Los dos trenes van en vías paralelas, una al lado de la otra, y se cruzan durante su trayecto. ¿Cuánto tiempo transcurre mientras el AVE se cruza con un señor que está sentado en el Regional Exprés?

Solución. Hay datos que no se usan aquí. La velocidad que lleva el AVE con respecto al señor sentado en el otro tren es de $300 + 160 = 460$ km/h. Por tanto, hay que calcular cuánto tiempo tarda un objeto moviéndose a 460 km/h en recorrer 200 metros, o $0,2$ kilómetros. La solución es

$$\frac{0,2}{460} \text{ h } = \frac{0,2}{460} \cdot 3600 \text{ s } = 33,12 \text{ s } .$$

□

Problema 13. Algunos números enteros positivos n tienen la siguiente propiedad: para todo número entero positivo par m, los dos últimos dígitos de $n \cdot m$ coinciden con los dos últimos dígitos de m. Aquí, estamos interpretando que los enteros positivos menores que 10 tienen dos dígitos, por ejemplo, los últimos dos dígitos de 8 son 08.

Encuentra todos los números enteros positivos menores que 100 que tienen esta propiedad.

Solución. El número 1 claramente cumple la propiedad. 51 también lo cumple, porque $51 \cdot m = 50m + m$, y si m es par, $50m$ acaba en 00. El último dígito de un tal n con esa propiedad tiene que ser 1, porque los dos últimos dígitos de $10n$ son 10. Las decenas no pueden ser $2, 3$ ni 4, porque $2n$ tiene que acabar en 02. $61 \cdot 2 = 122$, $71 \cdot 2 = 142$, $81 \cdot 2 = 162$, $91 \cdot 2 = 182$. Por tanto, los dos únicos enteros positivos menores que 100 que tienen esta propiedad son 1 y 51. □

Problema 14. La velocidad media de un autobús sin contar las paradas es de 48 km/h, y contando las paradas es de 40 km/h. De media, ¿cuántos minutos por cada hora está parado el autobús?

Solución. Llamamos t al tiempo (en horas) que está parado el autobús cada hora. Tenemos que, en una hora, el autobús con paradas recorre

$$(1 - t) \cdot 48 = 40 \text{ km}.$$

De lo que sacamos que $t = \frac{1}{6}$ horas, es decir, para 10 minutos. □

Problema 15. Piensa un número de 3 cifras distintas. Escríbelo al revés y resta el menor al mayor. Quédate con el resultado y debajo escribe el mismo número con las cifras invertidas. Suma estos dos últimos números. ¿Qué número te ha salido?

Solución. Llamemos el número original abc. Supongamos que $a > c$, si no, lo invertimos. Llamemos $r = a - c$. Después de la primera resta tenemos el número

$$abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99r = 100r - r = (r - 1)9(10 - r)$$

Su inversión será $(10 - r)9(r - 1)$. Juntos suman

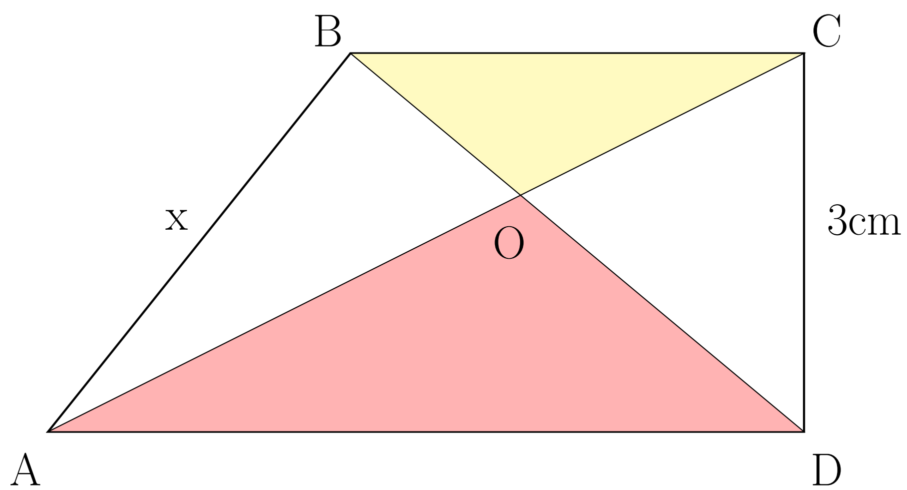
$$100(r - 1) + 90 + 10 - r + 100(10 - r) + 90 - r - 1 = 1000 + 90 - 1 = 1089$$

□

Problema 16. He pensado un número, le he sumado el anterior y el siguiente. ¿Es verdad que el resultado es un múltiplo de 3?

Solución. Si el número que he pensado es n, la suma es $n + (n - 1) + (n + 1) = 3n$, múltiplo de 3. □

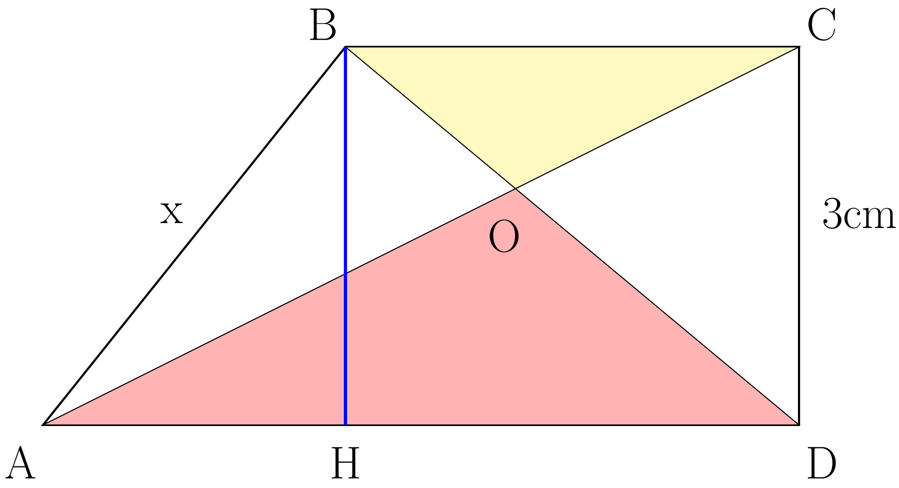
Problema 17. La altura del trapecio rectángulo de la figura es igual a 3 cm. Las diagonales y las bases del trapecio forman dos triángulos. El área del triángulo AOD es 6 cm^2 mayor que la del triángulo BOC. Busca el lado x.



Solución. Calculemos la resta de las áreas rosa y amarilla:

$$A_{AOD} - A_{BOC} = A_{ACD} - A_{BCD} = \frac{3(|AD| - |BC|)}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

De ahí sacamos que $|AD| - |BC| = 4$ cm. Pero si trazamos la altura BH desde B, la longitud del segmento AH es $|AH| = |AD| - |BC| = 4$ cm.



Del triángulo rectángulo ABH hallamos que $x = 5$.

□

Problema 18. Ana ha pensado un número y se lo ha dicho en secreto a su amiga Laura.

Luego Ana le ha sumado 2 y ha multiplicado el resultado por 5.

Laura lo ha multiplicado por 7, le ha restado 8 y le ha dado el mismo resultado que a Ana. ¿Cuál era el número secreto de Ana?

Solución. Vemos que $5(n + 2) = 7n - 8$. Simplificando tenemos $2n = 18$, de ahí $n = 9$. □

Problema 19. Isa ha dibujado unos cuantos cuadrados y varios triángulos. Su hermano menor ha contado 49 lados en total y 15 figuras distintas. ¿Cuántos triángulos había?

Solución. Si todos fueran triángulos, tendrían $15 \cdot 3 = 45$ lados. Los 4 lados que nos sobran deben pertenecer a 4 cuadrados. Entonces había 11 triángulos.

Lo mismo se puede resolver con ecuaciones:

$$t + c = 15, 3t + 4c = 49$$

Ahora se resuelve fácil multiplicando la primera ecuación por 3.

□

Problema 20. He pensado un número, lo he multiplicado por 5, luego le he sumado 2, he multiplicdo el resultado por 2 y le he restado 4. Me ha dado 1780, ¿qué número he pensado?

Haz tú la prueba con dos o tres números, ¿por qué el resultado siempre termina en 0? Llama el número inicial n. Escribe todas las operaciones con él, demuestra que termina en 0 y explica cómo hallar el número inicial sabiendo el resultado.

Solución. Vamos a escribir las operaciones por orden:

$$5n$$

$$5n + 2$$

$$(5n + 2) \times 2 = 10n + 4$$

$$(5n + 2) \times 2 - 4 = 10n + 4 - 4 = 10n$$

Es múltiplo de 10, además, si le quitamos el 0 final me da el número inicial.

□

Problema 21. Piensa un número de 3 cifras distintas y apúntalo en tu cuaderno. Luego lo escribes al revés y restas el menor del mayor. Si me dices solamente la última cifra, puedo adivinar qué resultado te ha salido. ¿Cómo lo hago?

Solución. Si mi número n es abc, tiene a centenas, b decenas y c unidades, es decir $n = 100a + 10b + c$. El número al revés es $\bar{n} = cba = 100c + 10b + a$. Supongamos que $a > c$ (da igual porque siempre restamos el menor del mayor), entonces la resta es

$$abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 9 \cdot 11 \cdot (a - c)$$

Acabamos de ver que el resultado es múltiplo de 9 y, además, múltiplo de 99. Todos los múltiplos de 99 por un dígito $(a - c)$ son los siguientes:

$$99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891$$

Como ves, la cifra de decenas es siempre 9. ¡Es normal, como $a > c$, las unidades del número mayor son menores que las del número invertido y las decenas coinciden, por tanto es resta con llevadas y en el medio va siempre 9. Además, las unidades y las centenas de la resta siempre suman 9 porque es múltiplo de 9. De modo que si me dices, por ejemplo, que la cifra de las unidades es 3, sé que las decenas son 9 y las centenas, $9 - 3 = 6$, por lo que tu número es 693.

□

Problema 22. En este acertijo cada letra representa un dígito. Si una letra aparece varias veces, representa el mismo dígito todas las veces. Además, letras distintas siempre representan dígitos distintos. Encuentra el valor de cada letra.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{D} & \mathrm{O} & \mathrm{S} \\ & & & \mathrm{D} & \mathrm{O} & \mathrm{S} \\ + & & \mathrm{T} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ \hline & \mathrm{S} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{T} & \mathrm{E} \end{array}$$

Solución. S no puede ser 0: si lo fuera, mirando a la primera columna empezando por la derecha, obtendríamos que $E = S$, y eso contradice el enunciado. Si sumamos tres dígitos, como mucho nos podemos llevar 2 en la primera columna empezando por la derecha. Por tanto, en la segunda también nos podremos llevar 2 como mucho, ya que la suma de $O + O + R$ es menor que 27, y $27 + 2 = 29$. Así, vemos que en la tercera columna también nos llevaremos 2 como mucho. Por tanto, como $T \neq I$, o bien $T = 9$ y nos hemos llevado 1 o 2 en la tercera columna empezando por la derecha, o $T = 8$ y nos hemos llevado 2. En cualquier caso, $S = 1$, y por tanto $E = 3$. Así, el puzzle nos queda

$$\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{D} & \mathrm{O} & 1 \\ & & & \mathrm{D} & \mathrm{O} & 1 \\ + & & \mathrm{T} & \mathrm{R} & 3 & 1 \\ \hline & 1 & \mathrm{I} & 3 & \mathrm{T} & 3 \end{array}$$

Mirando a la segunda columna por la derecha, vemos que $O + O + 3 = 2O + 3$ es un número impar. Antes dudábamos en si T era 8 o 9, pero ahora podemos estar seguros de que $T = 9$. Por tanto, o bien $2O + 3 = 9$, o bien $2O + 3 = 19$ ($2O + 3 = 29$ es imposible). Por tanto, o bien $O = 3$ o bien $O = 8$. Como $E \neq O$, la única posibilidad es que $O = 8$. Por tanto, el puzzle nos queda

$$\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{D} & 8 & 1 \\ & & & \mathrm{D} & 8 & 1 \\ + & & 9 & \mathrm{R} & 3 & 1 \\ \hline & 1 & \mathrm{I} & 3 & 9 & 3 \end{array}$$

Mirando a la tercera columna por la derecha vemos que el número $2D + R + 1$ acaba en 3 y además nos tenemos que llevar 1 o 2. Como 8 y 9 ya están cogidos por otras letras, tenemos que $2D + R + 1 \leq 2 \cdot 7 + 7 + 1 \leq 22$, por lo que $2D + R + 1 = 13$. Como en la tercera columna por la derecha nos hemos llevado 1, esto implica que $I = 0$. Ahora sólo nos queda resolver $2D + R = 12$. Empezamos probando todos los valores posibles de R, que son $2, 4, 5, 6, 7$ (el resto están cogidos por otras letras). De hecho, la ecuación $2D + R = 12$ nos dice que R tiene que ser par. Si $R = 2$, entonces $D = 5$. Si $R = 4$, entonces $D = 4$, y $D = R$ es imposible. Si $R = 6$, entonces $D = 3$, y $D = E$ es imposible. Por tanto, la solución es

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 8 & 1 \\ & & & 5 & 8 & 1 \\ + & & 9 & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}$$

□

Problema 23. Si tenemos que calcular la suma $1+2+3+\ldots+100$, podemos calcularla de esta manera:

- Llamamos S a $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.
- Sumamos $S + S$, pero cambiando el orden de los sumandos en la segunda S:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & (& 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 &) \\ + & (& 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 &) \\ \hline & & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & \end{array}$$

por lo que $2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{\text{100 veces}} = 101 \cdot 100.$

Así, despejamos S de la expresión anterior y obtenemos que

$$1 + 2 + \ldots + 100 = S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

a) Siguiendo los pasos del enunciado, encuentra una expresión breve que dependa de n para la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

b) Yunji ha querido sumar todos los números del 1 al 300, pero como no conoce la fórmula que hemos deducido en el apartado a), se ha equivocado al hacer tantas cuentas y se ha olvidado de sumar uno de los números. Nos dice que el resultado le ha salido un cuadrado perfecto. ¿Qué número se ha olvidado de sumar?

Solución. a) $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

b) La suma de todos los números del 1 al 300 es $\frac{300\cdot 301}{2} = 45150$. Los cuadrados perfectos menores que ese número son $212^2 = 44944$, $211^2 = 44521, \ldots, 1 = 1^2$. Si el resultado le hubiera dado 212^2, se habría dejado de sumar el número $45150 - 44944 = 206$. Si le hubiera dado 44521 o menos, tenía que haberse olvidado de sumar un número mayor o igual que $45150 - 44521 = 629$, y esto no es posible. Por tanto, la respuesta es 206.

□

Problema 24. Pitágoras quiere construir infinitos triángulos rectángulos y dar una lista de las longitudes de sus lados. Para ello, sigue el siguiente método:

- Elige un número par cualquiera como la longitud de uno de los catetos.
- Luego eleva la mitad de este número par al cuadrado, le resta uno, y usa esa cantidad como la longitud del segundo cateto.
- Finalmente, suma dos a la longitud del segundo cateto para obtener la longitud de la hipotenusa.

Demuestra que este método le funciona a Pitagoras, es decir, que existe un triángulo rectángulo tal que las longitudes de los catetos y la hipotenusa son las descritas por su método, sea cual sea el número par que elija como longitud del primer cateto. En otras palabras, comprueba que la suma de los cuadrados de lo que Pitágoras dice que son los catetos coincide con el cuadrado de lo que Pitágoras dice que es la hipotenusa (es decir, comprueba que las longitudes dadas cumplen el teorema de Pitágoras)[1].

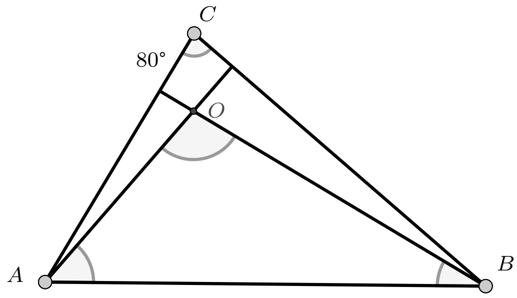
[1] Un triángulo es rectángulo si y sólo si $a^2 + b^2 = c^2$, donde $a \leq b \leq c$ son las longitudes de sus tres lados. Es decir, los triángulos rectángulos cumplen el teorema de Pitágoras (como ya sabemos), pero además son los únicos triángulos que lo cumplen.

Solución. Los números pares positivos son los números que son el doble de un número natural, por lo que siempre se pueden escribir como $2n$ para algún número natural n [2]. El primer cateto es un número **par**, así que lo denotamos por $2n$, donde n puede ser cualquier número natural. Luego, el segundo cateto es igual a $\left(\frac{2n}{2}\right)^2 - 1 = n^2 - 1$. La hipotenusa es igual a $(n^2 - 1) + 2 = n^2 + 1$. Como

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = 4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2,$$

se satisface que la suma de los cuadrados de los catetos es el cuadrado de la hipotenusa, y este triangulo es efectivamente rectángulo. □

Problema 25. En el triángulo ABC, el ángulo $\angle C$ mide $80°$. Encuentra el ángulo entre las alturas dibujadas hacia los lados AC y BC.



Solución. Denotemos por O el punto de intersección de las altitudes dibujadas hacia los lados AC y BC. Queremos encontrar $\angle AOB$.

Sea $\alpha = \angle CAB$ y $\beta = \angle ABC$. Entonces, como la suma de los ángulos del triángulo ABC es $180°$, entonces $\alpha + \beta = 100°$.

Como la recta AO es perpendicular a la recta CB, $\angle BAO = 90° - \angle ACB = 10°$. Por lo tanto, $\angle OAB = \alpha - 10°$. De la misma forma, $\angle ABO = \beta - 10°$. Por lo tanto

$$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle ABO) = 180° - (\alpha - 10° + \beta - 10°) = 200 - (\alpha + \beta) = 100°.$$

□

Problema 26. En una habitación oscura hay 100 monedas tiradas en el suelo. Entre ellas, 80 muestran cara y 20, cruz. No puedes distinguir por el tacto de qué lado está una determinada moneda, pero puedes dar la vuelta a cualquier cantidad de monedas. ¿Puedes conseguir dos montones en los que haya la misma cantidad de cruces?
Pista: Los montones no tienen por qué ser iguales. Llama n a la cantidad de monedas a las que vas a dar la vuelta, y m al número de cruces entre esas n monedas. ¿Puedes hallar el valor de n con los datos del enunciado?

Solución. Supón que apartas n monedas aleatorias y que entre ellas hay m cruces. Entonces entre el resto de las monedas hay $20 - m$ cruces. Si volteas las monedas que has apartado, entre ellas habrá $n - m$ cruces, para igualar estas cantidades simplemente coge $n = 20$ monedas. □

Problema 27. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por $1, 2, 3, \ldots$. El castillo consta de diferentes pasillos, y cada habitación está en un solo pasillo. Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación n está en el mismo pasillo que la habitación $3n + 1$ y que la habitación $n + 81$. Determina el número máximo de pasillos que puede tener el castillo.

Solución. Como k está en el mismo pasillo que $3k + 1$ para todo k, cualquier entero positivo n está en el mismo pasillo que

$$3n + 1, \quad 3(3n + 1) + 1 = 9n + 4, \quad 3(9n + 4) + 1 = 27n + 13, \quad 3(27n + 13) + 1 = 81n + 40$$

y esta última está en el mismo pasillo que 40 porque k está en el mismo pasillo que $k + 81$, que es el mismo que el de $k + 81 \cdot 2$, el mismo de $k + 81 \cdot 3 \ldots$. Por tanto, todas las habitaciones están en el mismo pasillo. □

[2] Similarmente, los números pares positivos son los que se pueden escribir como $2n - 1$ para algún número natural n.

Problema 28. El *factorial* de un número entero positivo n, denotado por $n!$, es el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que él, es decir.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

El *factorial doble* de un número entero positivo n, denotado por $n!!$, es el producto de todos los enteros positivos pares menores o iguales que n. Por ejemplo, $7!! = 6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$.

¿Qué número es más grande, $(2024!!)!$ o $(2024!)!!$?

Solución. Para cualquier número entero positivo par n, tenemos que

$$(n!!)^2 = n^2 \cdot (n-2)^2 \cdot \ldots \cdot (2)^2 > n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

También tenemos que

$$(2n)! = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \ldots \cdot 2 \cdot 1 > n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot 1^2 = (n!)^2$$

Por tanto,

$$(2024!)!! > \sqrt{(2024!)!} > \left(\frac{2024!}{2}\right)!$$

Ahora,

$$\frac{2024!}{2} = 2024 \cdot 2023 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 > 2024 \cdot 2022 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

por lo que

$$\left(\frac{2024!}{2}\right)! > (2024!!)!$$

Por tanto, $(2024!)!!$ es más grande. $\square$

Problema 29. A cada pareja de números entero x e y corresponde un determinado número $x \maltese y$. Encuentra $2024 \maltese 2025$ si se sabe que para tres números cualesquiera x, y, z se cumplen las siguientes identidades: $x \maltese x = 0$ y $x \maltese (y \maltese z) = (x \maltese y) + z$.

Solución. Tenemos las siguientes igualdades

$$x \maltese y = x \maltese (y \maltese y) - y = x \maltese 0 - y = x \maltese (x \maltese x) - y = x \maltese x + x - y = x - y.$$

(Hay varias maneras de llegar a esta expresión).

Por lo tanto, $2024 \maltese 2025 = -1$. $\square$

Problema 30. Demuestra que hay un número infinito de tripletas de números naturales a, b, c para los cuales se cumple la igualdad $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Solución. Esta igualdad se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{15} + \left(\frac{b}{c}\right)^{15} = c.$$

Elijamos números naturales arbitrarios n y m y pongamos $c = n^{15} + m^{15}, a = c \cdot n, b = c \cdot m$. $\square$

Problema 31. Si P, I, M satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} P + I + M &= 3, \\ \frac{1}{P} + \frac{1}{I} + \frac{1}{M} &= 4, \\ P^2 + I^2 + M^2 &= 5. \end{aligned}$$

Encuentra el valor del producto $P \cdot I \cdot M$.

Solución. Tenemos que

$$4PIM = PIM\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{I}+\frac{1}{M}\right) = PI + PM + IM.$$

Por otra parte,

$$9 = 3^2 = (P+I+M)^2 = (P^2+I^2+M^2) + 2(PI+PM+IM) = 5 + 2\cdot 4PIM = 5 + 8PIM,$$

por lo que

$$PIM = \frac{9-5}{8} = \frac{1}{2}.$$

□

Problema 32. Adrián y Belén tienen una moneda trucada que cuando la tiras al aire tiene probabilidad $\frac{4}{7}$ de salir cara y probabilidad $\frac{3}{7}$ de salir cruz. Juntos juegan al siguiente juego: se van a turnar tirando la moneda, y gana el primero que saque cruz. Si Adrián es el primero en jugar, ¿cuál es la probabilidad de que gane?
Pista: Empieza llamando p a la probabilidad de que gane Adrián, y encuentra una expresión que dependa de p para la probabilidad de que gane Belén.

Solución. Llamamos p a la probabilidad de que gane Adrián. La probabilidad de que gane Belén es $\frac{4}{7}\cdot p$, porque para que Belén gane se tiene que dar primero que Adrián saque cara en el primer turno (probabilidad $\frac{4}{7}$, y que después de eso jueguen una partida en la que gana el primero (probabilidad p, el primero en este caso es Belén.)

Como siempre gana o Adrián o Belén, tenemos que $p+\frac{4}{7}p=1$, por lo que $p=\frac{7}{11}$. □

Problema 33. Tenemos una máquina a la que, si le metemos un número entero positivo n, nos devuelve el número $\frac{n}{2}$ si n es par, y nos devuelve el número $5n+1$ si n es impar. Jugamos a un juego que consiste en meter un número entero positivo n a la máquina, coger el número que nos devuelva, volver a meterlo a la máquina, y así sucesivamente. Encuentra el menor número entero positivo n para el cual, si empezamos metiéndole ese número a la máquina y jugamos al juego, la máquina nunca nos devolverá el número 1 (aunque jugáramos muchísimo rato) en ninguno de los pasos.

Solución. Denotamos por $d_m(n)$ al número que nos devuelve la máquina después de m pasos al empezar metiéndole el número n. También, Empezamos haciendo un ejemplo: $d_1(1)=6$, $d_1(6)=3$, $d_1(3)=16$, $d_1(16)=8$, $d_1(8)=4$, $d_1(4)=2$, $d_1(2)=1$. Por tanto, $d_7(1)=d_1(2)=d_5(3)=d_2(4)=1$, y el número que buscamos es mayor o igual que 5.

$d_1(5)=26$, $d_2(5)=d_1(26)=13$, $d_3(5)=d_1(13)=66$, $d_4(5)=d_1(66)=33$, $d_5(5)=d_1(33)=166$. Vamos a demostrar el siguiente enunciado: Para todo entero positivo m, la última cifra de $d_{2m-1}(5)$ es 6. Si m es par, y la última cifra de $d_{2m}(5)$ es 3. Demostramos este enunciado por inducción. El caso base es $m=1$, y ya hemos calculado tanto $d_1(5)=26$ como $d_2(5)=13$, por lo que sabemos que el resultado es cierto. Para el paso de inducción, asumimos que el resultado es cierto para un cierto $m\geq 3$, y tenemos que ver que es cierto para $m+1$. Tenemos que $d_{2(m+1)-1}(5)=d_1(d_{2m}(5))$. Por hipótesis de inducción, $d_{2m}(5)$ es impar (porque acaba en 3). Por tanto, $d_{2(m+1)-1}(5)=5\cdot d_{2m}(5)+1$, y la última cifra de esto es 6. También tenemos que $d_{2(m+1)}(5)=d_1(d_{2(m+1)-1}(5))$. Acabamos de demostrar que $d_{2(m+1)-1}(5)$ acaba en 6, luego es un número par tal que su mitad acaba en 3. Por tanto, $d_{2(m+1)}(5)=\frac{d_{2(m+1)-1}(5)}{2}$ acaba en 3, y esto termina nuestra demostración del paso de inducción.

En resumen, acabamos de demostrar que, para todo entero positivo k, $d_k(5)$ acaba en 6 si k es impar, y en 3 si k es par, para todo entero positivo k. En particular, $d_m(5)\neq 1$ para todo entero positivo m, por lo que la respuesta a este ejercicio es 5. □

Problema 34. Un número natural se incrementó en un 10% y nuevamente obtuvimos un número natural. ¿Podría ser que la suma de sus cifras disminuyó exactamente un 10%?

Solución. Sí es posible: 998888888880, 99999906666660, 8...80 (45 ochos).

Ayuda para buscar estos números: la suma de los dígitos del número N original hay que escoger igual al múltiplo de 90; si es igual a $90n$, entonces al sumar N y $0,1N$ debería haber $11n$ traspasos al siguiente dígito a la hora de sumar. □

Problema 35. ¿Existe un conjunto infinito de números enteros positivos que no se pueden representar de la forma $n^2 + p$, donde n es un número entero y p es un número primo (positivo)?

Solución. Sí. Si un cuadrado perfecto m^2 se pudiese expresar así, tendríamos que $n^2 + p = m^2$ para algún n entero y algún p primo. Por tanto, $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = p$. Como p es primo, esto sólo es posible si $m - n = 1$ y $m + n = p$. Por tanto, $n = m - 1$ y $p = 2m - 1$. Es decir, de poder representar un cuadrado perfecto en la manera que nos dice el enunciado, esa representación es única, y además, para dar una respuesta afirmativa a este ejercicio sólo hay que encontrar infinitos números enteros positivos m tales que $2m - 1$ no es primo. Por ejemplo, si m acaba en 3, $2m - 1$ acaba en 5, por lo que, salvo que $m = 3$ y $2m - 1 = 5$, el número $2m - 1$ no es primo porque es mayor que 5 y es divisible por 5. Por tanto, el conjunto de los números de la forma $(10k + 3)^2$, donde k varía en todos los enteros mayores o iguales que 1, es un conjunto infinito formado únicamente por números que no se pueden representar de la forma que nos dice el enunciado. □

Problema 36. Demuestra que cualquier número entero se puede expresar como la suma de los cubos de cinco números enteros. Por ejemplo,

$$52 = 4^3 + (-3)^3 + 2^3 + 2^3 + (-1)^3.$$

Ayuda: Demuestra que cada número divisible por 6 se puede expresar como suma de 4 cubos.

Solución. Observemos que $(n+1)^3 + (n-1)^3 - 2n^3 = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 = 6n$. Por lo tanto, cualquier número divisible por 6 se puede expresar como la suma de cuatro cubos.

Al añadir 0, obtenemos la suma de cinco cubos. Al añadir ± 1, ± 8 y 27, representamos de manera correspondiente todos los números en forma de suma de cinco cubos. □

Problema 37. En la circunferencia se colocan n números, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uno de los cuales es igual a 1 o -1. Además, la suma de los productos de números adyacentes es igual a cero, y en general, para cada $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, la suma de los productos de números que están separados por k lugares es igual a cero. Es decir,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = 0, x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2 = 0, x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3 = 0,$$

y así sucesivamente. (Por ejemplo, para $n = 4$, uno de los números puede ser -1 y los otros tres pueden ser 1).

Demuestra que n tiene forma $n = 4k^2$ para algún número natural k.

Solución. Observemos que si la suma de n unos y menos unos es cero, entonces n es par. Por lo tanto sólo hay que demostrar que n es un cuadrado.

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + \ldots x_n^2) + (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2) + \ldots.$$

En el lado derecho de esta ecuación, el primer término es igual a n, mientras que todos los demás son iguales a 0. Por lo tanto, n es un cuadrado. □

Problemas para hacer en casa

18 de octubre

Problema 38. En el triángulo recto ABC, $\angle A = (2x + y^2)^\circ$, $\angle B = 2x^\circ$, $\angle C = \frac{x}{2}^\circ$. Halla el valor de x. Observa que no te hemos dicho cuál de los tres ángulos es el recto.

Solución. El ángulo recto de un triángulo rectángulo es el más grande. Como $y^2 \geq 0$ sea lo que sea y, tenemos que $\angle A \geq \angle B = 4\angle C$, y por lo tanto $\angle A = 90°$. Como la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, tenemos que

$$\angle A = 180° - 2x - \frac{x}{2} = \frac{360 - 5x}{2},$$

por lo que

$$90 = \frac{360 - 5x}{2} \quad \Rightarrow \quad 180 = 360 - 5x \Rightarrow x = 36.$$

□

25 de octubre

Problema 39. En una piscina hay 3 grifos. Si abrimos el primero, tardamos 8 horas en llenarla por completo. Si hubiéramos abierto el segundo, habríamos tardado 12 horas, y con el tercer grifo habríamos tardado 24 horas. ¿Podemos saber cuánto tiempo tardaríamos en llenar la piscina por completo si abriéramos todos los grifos a la vez? ¿Y la cantidad de litros que caben en la piscina?

Solución. Llamamos x a la capacidad de la piscina, en litros. La velocidad del primer grifo es de $\frac{x}{8}$ l/h, la del segundo es $\frac{x}{12}$ l/h, y la del tercero es $\frac{x}{24}$ l/h. En una hora, al abrir todos los grifos se habrá llenado

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{12} + \frac{x}{24} = \frac{3x + 2x + x}{24} = \frac{6x}{24} = \frac{x}{4} \text{ l}.$$

Por tanto, tardaremos 4 horas en llenar los x litros.

Con los datos que nos han dado no podemos saber cuántos litros caben en la piscina. Si una piscina cumple los datos del enunciado, otra piscina el doble de grande cuyos grifos echaran el doble de agua por hora también cumpliría los datos del enunciado. □

8 de noviembre

Problema 40. Un autobús va de A a B en línea recta a 80 km/h. Otro autobús va de B a A en línea recta a 95 km/h. Los dos autobuses salen a la misma hora. En el momento en el que se encuentran, uno de los autobuses ha recorrido 180 km más que el otro. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

Solución. La distancia es el tiempo por la velocidad. Llamamos d_i a la distancia (en kilómetros) que ha recorrido el tren i hasta que se encuentran los dos autobuses (para $i = 1, 2$), y t el tiempo (en horas) que ha transcurrido hasta que se encuentran. El tren que va más rápido habrá recorrido una mayor distancia. Planteamos las ecuaciones.

$$\begin{aligned} d_1 &= 80t \\ d_2 &= 95t \\ d_2 &= d_1 + 180 \end{aligned}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la segunda, obtenemos que $d_1 + 180 = 95t$. Como la primera ecuación nos dice que $d_1 = 80t$, obtenemos que $180 = 15t$, y por tanto $t = 12$ h. Nosotros queremos hallar $d_1 + d_2$. De la primera y la tercera ecuación obtenemos que

$$d_1 + d_2 = 175t = 175 \cdot 12 = 2100 \text{ km}.$$

□