PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 20 y 27 de septiembre y 4 de octubre de 2024
Principio del extremo
Genérica

¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que tod@s l@s alumn@s de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, tod@s aprenderéis a hacer demostraciones:

Test de los compañeros del grupo

- Cuando alguien del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestr@s compañer@s para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

Introducción

En muchos problemas conviene buscar un caso extremo, un elemento (número, figura...) que tenga unas características peculiares. Puede ser el número más pequeño, la esquina de una figura, el primer niño de una fila, etc. Este procedimiento se llama el **principio del extremo**.

Como ejemplo, vamos a resolver un problema.

Ejemplo resuelto. Llamemos M a un conjunto de puntos del plano tal que cada punto de M es el punto medio de alguna pareja de puntos de M. Demuestra que este conjunto es infinito.

Solución. Supongamos lo contrario. Introduzcamos entonces un sistema de coordenadas y consideremos el punto que está "más a la derecha", es decir, con la abscisa más grande. Si hay varios puntos así, consideremos el que tenga la ordenada más grande. Las coordenadas de este punto tienen que ser la media de las coordenadas de otros dos, pero eso es imposible. □

Por cierto, en el plano el conjunto M no puede ser finito, pero en otra estructura geométrica sí. ¿En cuál?

Problema 1. Supongamos que en el cielo hay una cantidad infinita de estrellas. Cada estrella tiene dos parámetros, brillo y tamaño, ambos son números naturales. Cada pareja de estrellas se distingue al menos en un parámetro. Demuestra que hay dos estrellas A, B tal que la estrella B es más brillante y más grande que A.

Para los problemas de geometría plana a menudo es imposible determinar el elemento "extremo" porque no existe ninguna orientación predeterminada. En estos casos resulta muy eficaz el procedimiento de proyectar ortogonalmente el plano a una recta aleatoria.

Ejemplo resuelto. En el plano hay 1000 segmentos. ¿Es posible que los extremos de cada segmento estén dentro de otro segmento?

Solución. Aquí la dificultad radica en que los segmentos tienen distinta orientación. ¡Proyectémoslos a una recta que no sea perpendicular a ninguno de ellos! Como los segmentos son finitos, y las posibles direcciones no, siempre podremos hacerlo. Elijamos un sistema de coordenadas en nuestra recta. Como resultado de la proyección, cada segmento en el plano se ha convertido en un intervalo cerrado $[a_i, b_i]$, donde a_i, b_i corresponden a los extremos de los segmentos. Ahora consideremos el punto más izquierdo, llamémoslo a_k. No puede estar dentro de ninguno de los demás segmentos porque las proyecciones de todos los demás segmentos están a su derecha. □

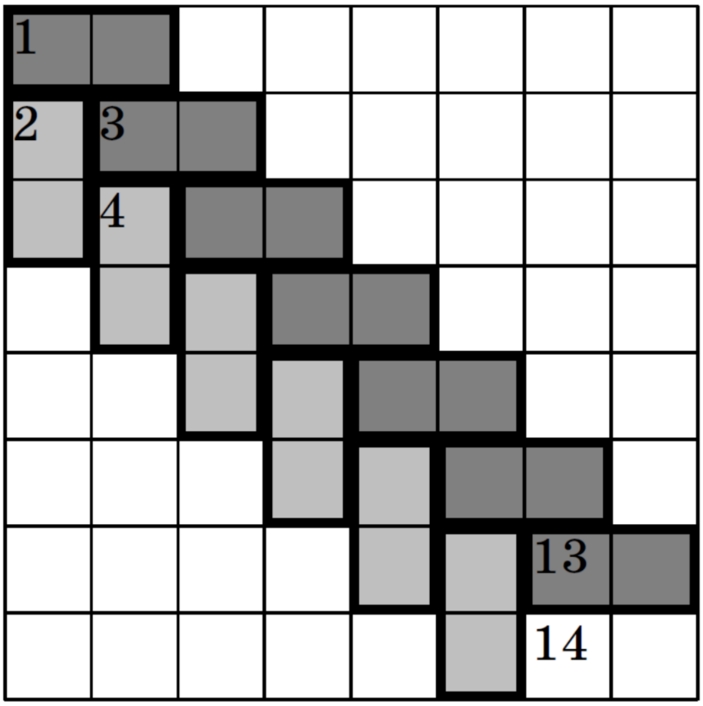
Problema 2. En el plano hay n polígonos, cada pareja de polígonos tienen al menos un punto en común. Demuestra que existe una recta que tiene al menos un punto en común con cada uno de ellos.

El principio del extremo suele funcionar muy bien en los tableros. A veces conviene considerar la fila o la columna que sea "especial" en cierto sentido (la que tenga más huecos, la suma mínima o máxima, etcétera). Otras veces es conveniente considerar las esquinas, como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo resuelto. El tablero de ajedrez está cubierto por dominós 2×1. Demuestra que hay al menos una pareja de dominós que forma el cuadrado 2×2.

Solución. Como ocurre a menudo en las matemáticas, podemos intentar construir un contraejemplo y ver dónde falla. Empecemos a cubrir el tablero desde la esquina superior izquierda y vayamos bajando en diagonal. ¿Qué ocurre?

La esquina superior izquierda puede estar cubierta por un dominó vertical u horizontal. Sin perder la generalidad podemos considerar que es horizontal (si no, lo reflejamos simétricamente respecto a la diagonal principal).



Debajo de la esquina el dominó también puede ir en vertical o en horizontal. Si va en horizontal, ya hemos encontrado el cuadrado 2×2. Si no, se va a formar una nueva esquina superior izquierda. Bajando de esta manera llegaremos al cuadrado 2×2 en la esquina inferior derecha, que sólo puede ser cubierto por dos dominós del mismo tipo, ambos verticales o ambos horizontales (en la Figura son el 13 y el 14). $\square$

Aunque el principio del extremo se usa mucho en la geometría, aparece con frecuencia en problemas numéricos.

Ejemplo resuelto. En cada casilla de una cuadrícula infinita hay un número natural escrito. Resulta que cada número es la media de sus 4 vecinos (arriba, abajo, izquierda, derecha). Demuestra que todos los números son iguales

Solución. Considera el número más pequeño de todos. Tiene que ser la media de sus vecinos, pero si al menos alguno de sus vecinos es mayor, la media será mayor, por lo que sus vecinos tienen que ser todos iguales a él. $\square$

Problema 3. ¿Es posible ordenar los números de 1 a 100 de tal manera que el valor absoluto de la resta de dos vecinos sea mayor o igual a 50?

A menudo el elemento extremo a considerar no es el propio número sino la máxima potencia de un divisor suyo.

Ejemplo resuelto. Busca todas las soluciones en números naturales de la ecuación $3^n = x^2 + y^2$

Solución. Consideremos la máxima potencia de 3 que esté en la descomposición de x, y y simplificaremos la ecuación dividiendo por ella. La parte izquierda no puede ser igual a 1 porque $x^2 + y^2 \geqslant 2$. Ahora la ecuación es idéntica a la anterior, pero al menos una de las incógnitas, x o y no es múltiplo de tres. Esto es posible solamente si $3 \nmid x, 3 \nmid y$, pero en este caso $x^2 \equiv 1 \ (mod\ 3), y^2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$ y la ecuación no puede tener soluciones en naturales. $\square$

Problema 4. Resuelve en números enteros la ecuación

$$x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$$

Descenso infinito

El descenso infinito es un método de demostración matemático y una modalidad de reducción al absurdo. Consiste en que suponemos que existe un elemento mínimo con determinadas características y luego se construye otro menor todavía que también las cumple, lo que genera una contradicción.

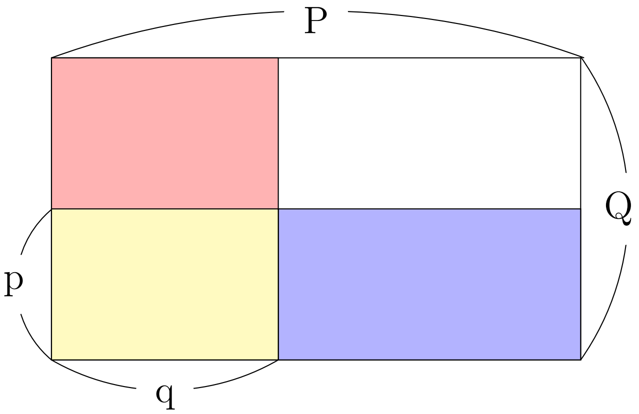
Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que no existen dos números de Fibonacci vecinos múltiplos de 7.

Supongamos que no es así. Entre todos estos números existe la pareja más pequeña, $7|F_k, 7|F_{k+1}$. Pero entonces $7|F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ y la pareja F_{k-1}, F_k es más pequeña que la pareja más pequeña. Contradicción.

Vamos a ver un ejemplo más sofisticado y muy importante. El siguiente resultado se llama el teorema fundamental de Aritmética. Aquí presentamos una de sus muchas demostraciones.

Ejemplo resuelto. Un entero positivo no puede tener dos descomposiciones en números primos distintas.

Demostración. Entre todos los números naturales con dos descomposiciones en primos elegiremos el más pequeño: $n = pP = qQ$, donde $p \nmid Q, q \nmid P$. Consideremos ahora el número $n' = n - pq = p(P - q) = q(Q - p)$.



Es fácil observar que este nuevo número también tiene dos descomposiciones distintas, ya que $p \nmid Q - p, q \nmid P - q$ y es más pequeño que el más pequeño con estas características. Contradicción. □

Problema 5. En una carretera circular se encuentran unas cuantas gasolineras. La cantidad de gasolina de la que disponen en total es algo superior a la necesaria para recorrer toda la carretera, pero ninguna dispone de tanta gasolina. Un coche con depósito infinito vacío quiere repostar y recorrer la carretera entera. ¿Es verdad que siempre podrá hacerlo partiendo de alguna gasolinera?

Problemas

Problema 6. Un número natural es un número entero positivo.

a) Se dan seis números naturales. Todos son diferentes y suman 22. Encuentra estos números y prueba que no hay otros.

b) La misma pregunta sobre 100 números que suman 5051.

Problema 7. Es fácil dividir el cubo $3 \times 3 \times 3$ en 27 cubitos pequeños con 6 cortes planos. ¿Podemos reducir la cantidad de cortes si se permite reordenar los trozos?

Problema 8. En el torneo mundial de pulso chino (también llamado guerra de pulgares o gallitos), cada pareja de participantes se enfrentó una vez, y no hay empates. Al final del torneo, cada participante tiene una lista que incluye:

1. A los que ha derrotado.

2. A los que han sido derrotados por alguien del punto 1.

Demuestra que alguien tiene en su lista a todos los demás.

Problema 9. Hay una patata que cumple que cualquier corte plano tiene forma de círculo. Demuestra que la patata es perfectamente redonda.

Problema 10. Demuestra que los números $1, 2, ..., 16$ se pueden colocar en fila india pero no en círculo de modo que la suma de cada pareja sea un cuadrado perfecto

Problema 11. Encima de la mesa hay 48 monedas que no se solapan. Demuestra que siempre podemos apartar una de ellas moviéndola sin descolocar las demás.

Problema 12. ¿Existe una pirámide triangular tal que cada arista tiene una cara en la que esta arista está formando un ángulo obtuso?

Problema 13. Demuestra que cada poliedro tiene al menos dos caras con el mismo número de lados.

Problema 14. En una sesión de parlamento cada uno de los 450 parlamentarios le pegó una bofetada a algún compañero suyo. Demuestra que en este parlamento hay un grupo de 150 personas en el que nadie pegó a nadie.

Problema 15. En el plano hay N rectas trazadas de manera aleatoria. Demuestra que para cada recta existe una zona triángular formada por esta recta y otras dos.

Problema 16. Hay 13 números en una fila. Se sabe que la suma de tres números seguidos es siempre positiva. ¿Puede la suma de los 13 números ser negativa?

Problema 17. En la recta numérica se posan 2025 saltamontes que miden lo mismo que un punto. Cada saltamontes puede saltar por encima de otro de tal manera que la distancia entre ellos no cambie. Saltando solamente a la derecha los saltamontes pueden conseguir que la distancia entre dos de ellos sea 1. ¿Es verdad que saltando a la izquierda también pueden conseguirlo?

Problema 18. Se sabe que son enteros los números a, b, c y también las expresiones $a/b + b/c + c/a$ y $a/c + c/b + b/a$. Demuestra que $|a| = |b| = |c|$.

Problema 19. En el plano hay n puntos. Demuestra que existe una línea quebrada (hecha de segmentos rectos) que pasa por todos estos puntos y no tiene intersecciones.

Problema 20. Tenemos una tabla rectangular de números enteros positivos. Se pueden hacer dos operaciones: duplicar todos los números de una fila, o restar 1 a todos los números de una columna. Demuestra que después de una sucesión de estas operaciones se puede llegar a una tabla de ceros.

Problema 21. En una mesa rectangular se colocan en paralelo a los bordes de la mesa cuadrados iguales de n colores distintos. Se sabe que en cualquier subgrupo de n cuadrados de colores distintos hay dos que se pueden fijar en la mesa con una única chincheta. Demuestra que todos los cuadrados de un determinado color se pueden fijar en la mesa usando $2n - 2$ chinchetas.

Problema 22. En algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se colocan fichas idénticas. Para cada casilla vacía se sabe que la suma de fichas que hay en la misma horizontal o vertical es mayor o igual a n. Demuestra que hay como poco $n^2/2$ fichas.

Problema 23. Un rectángulo está dividido en triángulos rectángulos de tal manera que dos triángulos vecinos comparten siempre un lado, el cateto para uno de ellos y la hipotenusa para el otro. Demuestra que el lado largo del rectángulo es como poco el doble del lado corto.

Problema 24. Encuentra todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw$$

Problema 25. ¿Es verdad que cualquier triángulo se puede dividir en 1000 triángulos de los que se pueda formar un cuadrado?

Problema 26. Unos puntos están situados en el plano de tal manera que cualquier grupo de 3 de ellos se puede encerrar en un círculo de radio 1. Demostrar que entonces todos los puntos también se pueden encerrar en un círculo de radio 1.

Problema 27. En el despacho del director de ICMat hay 2024 teléfonos, cada par de los cuales está conectado por un cable de uno de los cuatro colores. Se sabe que están presentes los cables de los cuatro colores. ¿Siempre se puede elegir un conjunto de teléfonos de tal manera que los cables que los conectan sean de exactamente tres colores?

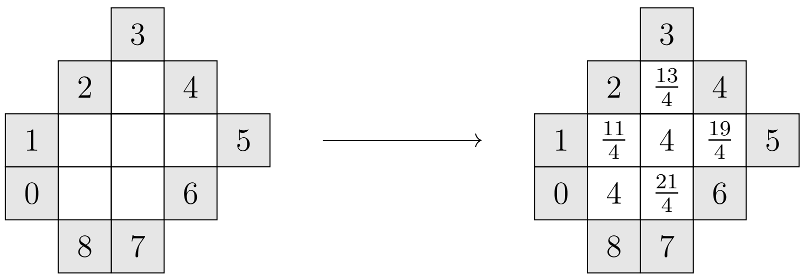
Problema 28. (1) Sea X un grafo con $4n$ vértices. Se sabe que entre cualquier conjunto de $n+1$ vértices de X hay por lo menos dos conectados por una arista. Demuestra que X tiene por lo menos $6n$ vertices.

(2) En un plano se marcan $4n$ puntos y se conectan con segmentos todas las parejas de puntos cuya distancia es de 1 cm. Resultó que entre cualesquiera $n+1$ puntos siempre hay al menos dos conectados por un segmento. Demuestre que en total se han trazado al menos $7n$ segmentos.

Problema 29.

- Hay n líneas en el plano en **posición general**: no hay 2 paralelas ni 3 que se cortan en un punto. ¿Cuántas regiones forman?
- Demuestra que en este caso, si $n \geq 3$, al menos $\frac{2n-2}{3}$ de las regiones son triángulos.
- Hay n planos en el espacio en **posición general**: 3 de ellos siempre se cortan en un punto (ni en el vacío, ni en una recta), y 4 de ellos nunca se cortan. ¿En cuántas regiones dividen el espacio?
- Demuestra que en este caso, si $n \geq 5$, al menos $\frac{2n-3}{4}$ de las regiones son tetraedros.

Problema 30. Hay una forma hecha de cuadrados. En cada cuadrado del borde (que no tiene 4 vecinos) hay escrito un número real. Demuestra que hay una única manera de rellenar la cuadrícula de manera que en cada cuadrado del interior está escrita la media de los 4 vecinos. Por ejemplo:



Problemas para hacer en casa

27 de septiembre

Problema 31. En una cuadrícula infinita juegan Ana y Belén. Cada jugada consiste en pintar un lado de una casilla de un color cualquiera. Está prohibido volver a pintar los lados pintados. Ana quiere en menos de 100 movimientos crear una línea cerrada en la que todos los segmentos sean de colores distintos, Belén intenta impedírselo. ¿Quién gana?

Problema 32. Demuestra que los números $1, 2, ..., 16$ se pueden colocar en fila india pero no en círculo de modo que la suma de cada pareja sea un cuadrado perfecto

Problema 33. El pintor-camaleón se mueve por un tablero una casilla en horizontal o vertical. Cada vez que llega a una casilla, o bien la pinta de su color, o bien adopta su color. Se le coloca en un tablero negro de 8×8, ¿conseguirá pintarlo a modo de tablero de ajedrez?

Problema 34. En la pizarra están escritos $N \geq 9$ números distintos no negativos, menores que uno. Resultó que para cualquier conjunto de ocho números distintos de la pizarra, se puede encontrar un noveno número, diferente de ellos, tal que la suma de estos nueve números sea un número entero. ¿Para qué valores de N es esto posible?

Problema 35. ¿Podemos dividir todos los números de 1 a k para algún entero k en dos grupos de tal manera que los números de cada grupo escritos en fila formen el mismo número largo?

4 de octubre

Problema 36. Tenemos $n > 2$ números naturales y todos distintos $a_1, a_2, ..., a_n$ escritos en círculo. En cada paso estos números se sustituyen por la media de ellos y sus vecinos derechos, es decir,

$$a_1' = \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2' = \frac{a_2 + a_3}{2}, ..., a_n' = \frac{a_n + a_1}{2}$$

Demuestra que en algún momento al menos una de las medias deja de ser entera.

Problema 37. Una mañana de cada uno de 100 aeropuertos despegó un avión y se dirigió al aeropuerto más cercano. Las distancias entre los aeropuertos son todas distintas. ¿Cuál es el máximo de aviones que pueden haber aterrizado en un aeropuerto?

Problema 38. En algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se colocan fichas idénticas. Para cada casilla vacía se sabe que la suma de fichas que hay en la misma horizontal o vertical es mayor o igual a n. Demuestra que hay como poco $n^2/2$ fichas.

Problema 39. Encuentra todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw$$

Problema 40. En una circunferencia se marcan 100 números naturales tales que su máximo divisor común es 1. Se permite sumar a cualquier número el máximo común divisor (MCD) de sus dos vecinos. Demuestre que, mediante estas operaciones, se pueden hacer todos los números coprimos por pares.