PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fechas: 20 y 27 de septiembre y 4 de octubre de 2024
Principio del palomar y coloración
Genérica

¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que tod@s l@s alumn@s de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, tod@s aprenderéis a hacer demostraciones:

Test de los compañeros del grupo

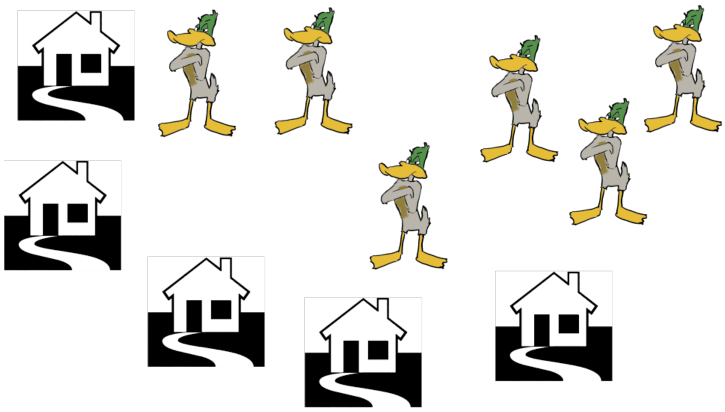
- Cuando alguien del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestr@s compañer@s para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

Principio del palomar

El **principio del palomar** dice lo siguiente:

> Tenemos palomas dentro de palomares. Si hay más palomas que palomares, entonces en algún palomar hay más de una paloma.



Aquí, "más" significa "$>$". Si queremos, podemos cambiar las palabras "palomar" por "caja" y "paloma" por "objeto" para poder aplicarlo a ejercicios que no tengan que ver con aves.

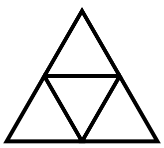
Por ejemplo, si hay 4 niñas que viven en 3 calles (las niñas juegan el papel de las palomas y las calles, de los palomares) entonces hay dos niñas que viven en la misma calle.

Ejemplo resuelto. El Crustáceo Crujiente tiene un menú del día con 4 primeros y 4 segundos. En la comida del PIM todos los comensales pidieron un menú distinto. ¿Cuánta gente podía haber, como mucho?

Solución. 4 primeros y 4 segundos son 16 menús distintos (puedes hacer una tabla con los primeros en las filas y los segundos en las columnas). Los 16 menús son 16 palomares; y los comensales, las palomas. Si hubiera 17 personas o más, el principio del palomar dice que dos personas comerían el mismo menú. Por tanto, había como mucho 16 personas. $\square$

Ejemplo resuelto. En un triángulo equilátero de lado 2 colocamos 5 puntos. Demostrar que hay dos puntos a distancia menor o igual que 1.

Solución. Dividimos el triángulo equilátero en cuatro triángulos equiláteros iguales de lado 1:



Estos cuatro triángulos van a ser nuestras cajas, y los 5 puntos van a ser nuestros objetos. Por el principio del palomar, habrá dos puntos en uno de los triángulos de lado 1. Como la mayor distancia entre dos puntos de un triángulo equilátero de lado 1 es 1, esos dos puntos estarán a distancia menor o igual que 1. $\square$

Problema 1. Demuestra que si elegimos 7 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, entre ellos siempre habrá dos que sumen 12.

Problema 2.

- En clase hay 25 personas y se tienen que poner en grupos de **como mucho** 4 personas. ¿Cuál es el mínimo número de grupos que tienen que formar?
- 1000 personas forman 11 equipos. ¿Cuál es el mínimo tamaño del equipo más grande?

- En clase hay n personas y se tienen que poner en grupos de **como mucho** 4 personas. ¿Cuál es el mínimo número de grupos que tienen que formar?
- 1000 personas forman k equipos. ¿Cuál es el mínimo tamaño del equipo más grande?
- $n \cdot k$ palomas se reparten entre n palomares. ¿Cuál es el mínimo número de palomas que podemos encontrar en algún palomar?[1] ¿Y si viene una paloma más?

El principio del palomar tiene la siguiente generalización:

Sean n, k números naturales. Si tenemos n cajas y colocamos más de $n \cdot k$ objetos en ellas, entonces hay al menos una caja con más de k objetos.

Quizás tu sentido estético rechace el uso de letras para referirse a números. Al fin y al cabo, el programa se llama *Cifras y letras* y no *Letras y también letras*. Aquí tienes una versión sin letras:

Queremos colocar una serie de objetos en unas cajas. Si el resultado de dividir el número de objetos entre el número de cajas es mayor que un cierto número natural, entonces hay al menos una caja que tiene más objetos que ese número natural.

Ejemplo resuelto. En Madrid hay ahora mismo más de 10 personas con el mismo número de pelos en la cabeza.

Solución. Se estima que el número de pelos que tiene una persona en su cuero cabelludo está entre 100.000 y 150.000. Por muy peluda que sea una persona, podemos asumir que no tendrá 300.000 pelos o más. En Madrid hay más de 3 millones de personas, así que el resultado se sigue del principio del palomar: hay una caja por cada número de pelos entre 0 y 299.999 (300.000 cajas) y más de $300.000 \cdot 10$ objetos (el número de habitantes de Madrid). □

Problema 3. Marcamos 5 puntos en el cuadrado $ABCD$. Demostrar que al menos dos de ellos están a distancia como mucho $\frac{1}{2}|AC|$.

Problema 4. En una cuadrícula 8×8, ¿cuál es el número máximo de cuadrados que se pueden marcar para que no haya tres o más cuadrados marcados en ninguna fila ni columna?

Problema 5. Lanzamos 50 dardos sobre un tablero de 70×70 centímetros. Todos los dardos caen en el tablero. Demostrar que hay al menos 2 dardos que están a distancia menor de 15 cm.

Coloración

La idea del método de coloración consiste en dividir los objetos matemáticos en grupos, dotándolos de ciertas propiedades. A cada grupo se le asigna un color, y luego usamos esta división para encontrar la solución correcta. Muchos problemas comparten esta misma idea: colorear una tabla con varios colores de manera que se evidencie que alguna condición del problema no puede cumplirse.

Los típicos ejemplos de problemas de coloración son problemas con un tablero de ajedrez. Estos problemas se pueden resolver utilizando las propiedades de este tablero y las características de los "movimientos" de las piezas de ajedrez. Entre las propiedades del tablero de ajedrez a menudo hay que fijarse en el número total de casillas y la cantidad de casillas negras y blancas por separado.

Ejemplo resuelto. ¿Es posible que un caballo de ajedrez recorra todas las casillas del tablero 5×5 y regrese a la casilla de inicio?

[1] Estamos preguntando que, de todos los números naturales posibles, encuentres el más grande que satisface que siempre hay algún palomar con ese número (o más) de palomas.

Solución. Al colorear el tablero de la misma forma que un tablero de ajedrez obtendremos 13 casillas negras y 12 blancas.

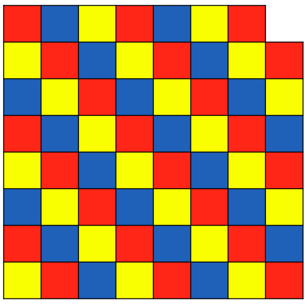
Supongamos que el caballo empieza en una casilla negra. Entonces después de 24 jugadas estará en una casilla negra y por lo tanto no podrá volver a la casilla inicial en la última jugada. □

Problema 6. De un tablero de ajedrez estándar de 8×8 se recortaron las casillas C5 y G2. ¿Es posible cubrir lo que queda con fichas de dominó de 1×2? ¿Y si se recortaron las casillas C6 y G2?

A veces hay que buscar una coloración diferente a la estándar.

Ejemplo resuelto. ¿Es posible cubrir con baldosas rectangulares de tamaño 1×3 un tablero rectangular de tamaño 8×8 en el que se ha recortado una casilla en una esquina?

Solución. Coloreamos el tablero en tres colores:



Hay 22 casillas rojas, 20 azules y 21 amarillas. Sin embargo, cada pieza de tamaño 1×3 cubre una casilla de cada calor (esto no depende de la forma en la que la pongamos en el tablero). Por lo tanto, no se puede cubrir con baldosas rectangulares de tamaño 1×3 un tablero rectangular de tamaño 8×8 en el que se ha recortado una casilla en una esquina. □

Problema 7. Demostrar que un tablero de 10×10 no se puede cubrir con rectángulos de tamaño 1×4.

Problemas

Problema 8. Se toman 28 puntos en el interior de un cubo de lado 3. Probar que hay al menos dos puntos a distancia menor o igual que $\sqrt{3}$.

Problema 9. Tenemos 8 números naturales distintos no mayores de 15. Demostrar que entre sus diferencias positivas por pares hay tres iguales.

Problema 10. Nos dan 100 números enteros cualesquiera. Demuestra que hay 15 de ellos tales que la diferencia de cualesquiera dos números de esos 15 es divisible por 7.

Problema 11. En un papel cuadriculado están marcadas 2000 celdas al azar. Demostrar que entre ellas siempre es posible elegir por lo menos 500 celdas que no se toquen (se considera que las celdas que tienen al menos un vértice común se tocan).

Problema 12. ¿Es posible hacer un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con un agujero de $1 \times 1 \times 1$ en el centro con 13 ladrillos de $1 \times 1 \times 2$?

Problema 13. Demuestra que un grafo con n vértices, cada uno de grado no menor que $\frac{n-1}{2}$, es conexo.

Problema 14. Hay una habitación con forma de triángulo equilátero de 20 metros de lado. Si en la habitación hay 5 adolescentes aromáticos/as, demuestra que hay al menos 2 de ellos que están a 10 metros o menos de distancia.

Si hay 17 en la habitación, demuestra que hay dos menos de 5 metros.

¿Y si hay 1025?

Problema 15. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes, y todos son hombres o mujeres. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo género.

Problema 16. Tom Sawyer quiere pintar una valla de tablas de madera muy larga de tal forma que dos tablas entre las cuales hay exactamente dos, tres o cinco tablas deben pintarse en diferentes colores. ¿Cuál es la menor cantidad de colores que necesitará Tom para este trabajo?

Problema 17. Ocho rectángulos 1×3 y un cuadrado 1×1 cubren completamente un tablero 5×5. Demuestra que el cuadrado 1×1 se encuentra necesariamente en el cuadrado 1×1 del centro del tablero.

Problema 18. En una línea recta están marcados 50 segmentos cerrados (pueden tener intersecciones y también uno puede estar dentro de otro). Demostrar que, o bien hay ocho segmentos que tienen un punto en común, o hay ocho segmentos disjuntos.

Problema 19. En una carretera de circunvalación hay 25 oficiales de policía situados a intervalos iguales. Los policías están numerados en algún orden del 1 al 25. Se requiere que cambien posición para que nuevamente haya un policía en cada puesto y que estén situados según su número en el sentido de las manecillas del reloj (después del número 1 hay un número 2, después del número 2 hay un número 3, etc.). Demuestra que si lo hacen de modo que la distancia total recorrida entre todos los policías sea la menor posible, entonces uno de los policías permanecerá en su puesto.

Problema 20. El fondo de una caja rectangular está pavimentado con mosaicos de 1×4 y 2×2. Los mosaicos se derramaron fuera de la caja y se perdió un mosaico de 2×2. Lo reemplazaron con un mosaico de 1×4. Demuestre que ahora el fondo de la caja no se puede pavimentar.

Problema 21. Hay 100 fichas en orden, numeradas del 1 al 100. Podemos hacer 2 movimientos:

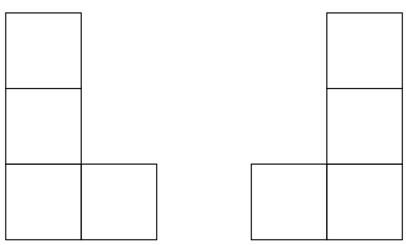
- Por el precio de un euro, podemos intercambiar dos fichas vecinas.
- Gratis, podemos intercambiar dos fichas que estén a distancia 4 (con 3 fichas entre las dos).

¿Qué cantidad mínima de euros habrá que gastar para reorganizar las fichas en orden inverso?

Problema 22. Pintaremos un 10% de la superficie de una esfera de rojo, y el 90% restante de azul. Demuestra que podemos inscribir en la esfera un cubo de tal manera que todos sus vértices sean azules.

Problema 23. Los vértices de un polígono convexo están pintados de tres colores. Están presentes todos los colores y no hay dos vértices adyacentes del mismo color. Demostrar que el polígono se puede dividir en triángulos por diagonales de tal manera que cada triángulo tenga vértices de tres colores diferentes.

Problema 24. Tenemos un tablero $n \times n$ al que le faltan los cuadraditos 1×1 de las cuatro esquinas. El objetivo de este problema es determinar para qué valores de $n \geq 3$ se puede cubrir (sin superponer las piezas) completamente el tablero con piezas de tetris de tipo "L" y "J", es decir, con piezas de estas formas, donde cada cuadradito es de 1×1:



a) Demuestra que si n es impar no podemos cubrir el tablero de esa forma.

b) Demuestra que tampoco podemos hacerlo si n es divisible por 4.

c) Demuestra que si n es un número par no divisible por 4, entonces sí se puede cubrir el tablero de esa forma.

Problema 25. En un manual de botánica, cada planta se caracteriza por 100 rasgos (cada rasgo está presente o ausente). Las plantas se consideran diferentes si se diferencian en al menos 51 rasgos.

(a) Demuestra que el manual no puede contener un conjunto con más de 50 plantas en que cada par de ellas es diferente.

(b) ¿Puede ser exactamente 50?

Problema 26. ¿Se puede cubrir completamente un tablero de ajedrez de 8×8 con quince rectángulos 1×4 y un cuadrado 2×2?

Problema 27. Juan tiene 3 años y solo conoce el número 1. Demuestra que puede escribir un número divisible por 123.

Problema 28. Nos dan 7 segmentos cuyas longitudes son como poco 1 cm y como mucho 10 cm. Demuestra que hay 3 de estos segmentos con los que puedes formar un triángulo.
Pista: Tres segmentos de longitudes a, b y c (con $0 < a \leq b \leq c$) pueden formar un triángulo cuando $a + b > c$.

Problema 29. En la Asamblea de Madrid hay 136 diputados. Tenemos que formar comités con todos los diputados, de manera que cada diputado esté solamente en uno de los comités. Cada diputado odia a exactamente tres de los otros diputados, pero la relación de odiarse no tiene por qué ser mutua: si el diputado A odia al diputado B, entonces B no tiene por qué odiar a A. Al formar los comités, tenemos que seguir la siguiente regla: ningún diputado puede estar en el mismo comité que alguien a quien odia.

a) Encuentra una manera de odiarse unos diputados a otros tal que no es posible ponerlos en 6 comités.

b) Demuestra que siempre es posible repartir a los diputados en 7 comités.

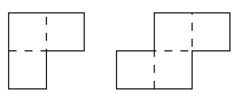
Problema 30. Sean a, b, c números reales distintos de 0 que satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{b} &= b + \frac{1}{a} \\ b + \frac{1}{c} &= c + \frac{1}{b} \\ c + \frac{1}{a} &= a + \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Demuestra que al menos dos de los tres números a, b, c son iguales.

Problema 31. A cada punto del plano se le asigna un color entre rojo, azul y negro. Demostrar que hay dos puntos del mismo color cuya distancia es igual a 1.

Problema 32. Tenemos dos tipos de piezas formadas por tres y cuatro cuadraditos 1×1 respectivamente:



Queremos cubrir completamente un tablero rectangular con este tipo de piezas de manera que no se solapen. Permitimos rotar y reflejar las piezas. Usando sólo estos dos tipos de piezas, demuestra que es posible cubrir de esta manera un tablero $(2m - 1) \times (2n - 1)$ para todo par de números enteros $m, n \geq 4$, y que además el número mínimo de piezas que necesitaremos para hacerlo será mn.

Problemas para hacer en casa

27 de septiembre

Problema 33. El Empire State Building tiene 102 pisos. Supongamos que un ascensor para 52 veces mientras desciende desde la última planta hasta la planta baja. Prueba que el ascensor ha parado en dos pisos cuya suma es 102.

Problema 34. Demuestra que todo polígono de 9 lados tiene un par de diagonales con un ángulo menor de 7°.

Problema 35. Tenemos 51 puntos en un cuadrado de lado 1. Demuestra que hay un círculo de radio $\frac{1}{7}$ que contiene a 3 de estos puntos

Problema 36. Tenemos un conjunto de 25 puntos en el plano de manera que si elegimos tres cualesquiera de ellos, hay dos que están a distancia menor que 1. Probar que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos a 13 de dichos puntos.

4 de octubre

Problema 37. Nos dan cien números enteros cualesquiera. Demuestra que hay 15 de ellos tales que la diferencia de cualesquiera dos números de esos 15 es divisible por 7.

Problema 38. ¿De cuántas maneras se pueden escribir todos los números del 1 al 9 en las celdas de un tablero 3×3 de manera que la celda que contiene a cualquier número menor que 9 tiene un lado en común con la que contiene al número siguiente?

Problema 39. Un escarabajo está sentado en el centro de un cubo $3 \times 3 \times 3$. Puede pasar de un cubo $1 \times 1 \times 1$ a otro por una de sus 6 caras. Demuestra que no podrá recorrer todos los cubos $1 \times 1 \times 1$ sin pasar dos veces por el mismo cubo.

Problema 40. En cada celda de un tablero de 9×9 se sienta un escarabajo. Cuando suena el silbato, cada uno de los escarabajos se arrastra hacia una de las celdas adyacentes en diagonal. Después de esto en algunas celdas puede haber más de un escarabajo y algunas celdas estarán desocupadas. Demuestra que habrá al menos 9 celdas desocupadas.

Problema 41. Un tenista juega al menos un partido cada día para entrenar. Al mismo tiempo, para no trabajar demasiado, no juega mas de 12 partidos a la semana. Demuestre que es posible encontrar varios de esos días consecutivos durante los cuales el tenista jugó exactamente veinte partidos.